D. O. Orlov, Exceptional set of vector bundles on the variety V_5, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1991, Number 5, 69–71 том, что пространство Y гомеоморфно предельному пространству факторизующего сигма-спектра $S_Y=\{Y_\alpha;\ q_\alpha^\beta,\ A\}$, состоящего из аналитических подпространств польских пространств и совершенных предельных проекций. Соответственно пространство X будет гомеоморфно предельному пространству факторизующего сигма-спектра $S_X=\{X_\alpha,\ p_\alpha^\beta,\ A\}$, состоящего из бэровских подпространств польских пространств и совершенных предельных проекций. При этом без ограничения общности можно считать, что индексные множества указанных спектров совпадают. В силу приведенного выше предложения существует хотя бы один индекс α, такой, что пространства X_α и Y_α бэровски изоморфны. В этом случае [4] Y_α будет бэровским подпространством некоторого польского пространства. Но тогда пространство Y гомеоморфно замкнутому подпространству произведения некоторого компакта и бэровского подпространства некоторого польского пространства (мы воспользовались совершенностью предельной проекции $q_\alpha: Y \to Y_\alpha$ спектра S_Y). Еще раз сославшись на теорему 5.8.7, можем констатировать, что Y является бэровским подмножеством своего стоун-чеховского расширения. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rogers C. A., Jayne J. E. and others. Analytic sets. London, 1980.
2. Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов//Успехи матем. наук. 1981. **36**, № 3. 3—62.
3. Chigogidze A. On Baire isomorphisms of non-metrizable compacta//Comment. math. Univ. carol. 1985. **26**, N 4. 811—820.
4. Куратовский К. Топология. Т. I. М., 1966.

Поступила в редакцию
30.10.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1991. № 5

УДК 512.723

Д. О. Орлов

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ НАБОР ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИИ V_5

Цель данной работы — построение полного исключительного набора векторных расслоений на многообразии Фано V_5, которое мы обозначим через X; X есть неособое трехмерное многообразие Фано индекса 2 с $\mathrm{Pic}\,X=\mathbf{Z}$ над полем $\mathbf{C}$ (см. [1]).

1. Пусть H — образующая $\mathrm{Pic}\,X$, тогда линейная система $|H|$ очень обильна и задает вложение Φ_H: $X \hookrightarrow \mathbf{P}^6$. Многообразие X имеет несколько описаний:

а) X есть сечение общим подпространством коразмерности 3 грассманова многообразия $G(2, 5) \subset \mathbf{P}^9$ двумерных подпространств в пятимерном векторном пространстве, канонически вложенного в $\mathbf{P}^9$ (см. [1]);
б) X — результат раздутия скрученной кубической кривой Y на $\mathbf{Q}^3$ — трехмерной квадрике и стягивания затем собственного прообраза двумерной квадрики $Y \subset \mathbf{Q}^2 \simeq \mathbf{P}^3 \cap \mathbf{Q}^3 \subset \mathbf{P}^4$ (см. [1]);
в) X есть минимальная гладкая компактификация фактора $SL_2(\mathbf{C})/\Gamma$ по бинарной группе октаэдра Γ (см. [2]).

Замечание. Из б) следует, что $K_0(X)=\mathbf{Z}^4$.

2. Определение. Упорядоченный набор расслоений $\varepsilon=(E_0, \ldots, E_n)$ называется исключительным, если $\mathrm{Ext}^i(E_\alpha, E_\beta)=0$, когда $i>0$ и когда $i=0$, а $\alpha>\beta$, и, кроме того, $\mathrm{Ext}^0(E_\alpha, E_\alpha)=\mathbf{C}$ (см. [3, 4]).

Пусть V — векторное пространство, $\dim V=5$, тогда $G(2, V^*)$ вложено в $\mathbf{P}(\Lambda^2 V^*) = \mathbf{P}^9$. На $G=G(2, V^*)$ есть стандартные точные последовательности:

$$0 \to \widetilde{S}^* \to V^* \to \widetilde{T} \to 0,$$

$$0 \to \widetilde{T}^* \to V \to \widetilde{S} \to 0,$$

$$rk(\widetilde{S}) = 2,\ rk(\widetilde{T}) = 3 \text{ и } \det(\widetilde{S}) = \det(\widetilde{T}) = O(\widetilde{H}).$$

Обозначим через S и T ограничение $\widetilde{S}$ и $\widetilde{T}$ на X.

Теорема. *Наборы* $\varepsilon = (O_X, S, O_X(H), S(H))$, $\varepsilon_1 = (O_X, S, T^*(H), O_X(H))$ *и* $\varepsilon_2 = (O_X, T, S, O_X(H))$ *являются исключительными на* X.

Доказательство. Для пучка O_X на G существует комплекс Кошуля $K^{\cdot} \to O_X$, где $K^n = O_G(n\widetilde{H}) \otimes \Lambda^{-n} \mathcal{N}$, $-3 \leqslant n \leqslant 0$, а $\mathcal{N}$ — трехмерное векторное подпространство в $\Lambda^2 V$. Тогда для всякого векторного расслоения E имеем спектральную последовательность с членом $E_1^{pq} = H^q(E \otimes \ {}^p)$, которая сходится к $H^{p+q}(E|_X)$. Когомологии тензорных степеней тавтологических расслоений на грассмане посчитаны в работе [5]. В нашем случае спектральная последовательность будет вырождаться в первом члене, и из элементарных вычислений следует утверждение теоремы.

Обозначим через $R_n (0 \leqslant n)$ неприводимое представление группы $SL_2(\mathbf{C})$ размерности $n+1$, которое реализуется на формах степени n от двух неизвестных. Если мы отождествим наше векторное пространство V с R_4, то $\mathcal{N} \subset \Lambda^2 V = R_2 \oplus R_6$ будет соответствовать R_2. Так как наши расслоения исключительны и, значит, инвариантны относительно $SL_2(\mathbf{C})$, то все группы $\mathrm{Ext}^i(,)$ между ними имеют естественную структуру $SL_2(\mathbf{C})$-представлений. Из той же спектральной последовательности находим, что

$$\mathrm{Hom}(O_X, S) = R_4 = V,\ \mathrm{Hom}(O_X, O_X(H)) = R_6 \subset \Lambda^2 V,$$

$$\mathrm{Hom}(O_X, S(H)) = R_1 \oplus R_8 \oplus R_{10} \subset \Lambda^2 V \otimes V,$$

$$\mathrm{Hom}(S, S(H)) = R_0 \oplus R_4 \oplus R_6 \oplus R_8 \subset V \otimes V,$$

$$\mathrm{Hom}(O_X, T) = R_4 = V^*,\ \mathrm{Hom}(T, S) = \mathrm{Hom}(S, T^*(H)) = R_2 = \mathcal{N},$$

$$\mathrm{Hom}(O_X, B^*(H)) = R_2 \oplus R_6 = \Lambda^2 V^*.$$

Определение. Левой перестройкой $L_A B$ исключительной пары (A, B) называется расслоение C, являющееся ядром $\mathrm{Hom}(A, B) \otimes A \to B \to 0$ канонического гомоморфизма, если он есть эпиморфизм. Аналогично определяется правая перестройка (см. [3, 4]).

Замечание. Перестройка всегда определена в производной категории $D^b(\mathrm{Sh}(X))$ (см. [3]).

Исключительный набор можно продолжить до бесконечной в обе стороны последовательности (если все перестройки определены) по индукции. Если $\varepsilon = (E_0, \ldots, E_n)$, то будем обозначать $E_{-i} = L^n E_{n-i+1}$, $E_{n+i} = R^n E_{i-1}$ (см. [3, 4]).

Определение. Исключительный набор $\varepsilon = (E_0, \ldots, E_n)$ называется витком спирали, если бесконечная в обе стороны последовательность, построенная по нему, удовлетворяет условию $E_L = E_{L+n+1} \otimes K_X$.

Теорема. *Набор* $\varepsilon = (O_X, S, O_X(H), S(H))$ *является витком спирали.*

Доказательство. Достаточно проверить условие для левого переноса $S(H)$ и $O_X(H)$.

1) Перенос $S(H)$ через $O_X(H)$ очевиден, и мы получаем расслоение $T^*(H)$. Сюръективность гомоморфизма $\mathcal{N}\otimes S \to T^*(H)$ следует из того, что $T^*(H)$ порождено глобальными сечениями, и из сюръективности $\mathcal{N}\otimes V \to \Lambda^2 V^*$, которая легко проверяется для общего трехмерного подпространства $\mathcal{N}\subset\Lambda^2 V$. При $SL_2(\mathbf{C})$-инвариантном изоморфизме $\mathcal{N}^*\otimes S \tilde{\to} \mathcal{N}\otimes S$ сквозной гомоморфизм

$$0 \to T \to \mathcal{N}^* \otimes S \tilde{\to} \mathcal{N} \otimes S \to T^*(H) \to 0$$

$SL_2(\mathbf{C})$-инвариантен и, значит, является нулевым, так как $\mathrm{Hom}(T, T^*(H))=V^*=R_4$. После следующей очевидной перестройки мы получим набор

$$\varepsilon' = (S(-H),\ O_X,\ S,\ O_X(H)).$$

2) Пусть расслоение F — ядро гомоморфизма $V\otimes S \to O(H) \to 0$, который, очевидно, сюръективен. Имеем $H^0(X, F) = S^2V \oplus \mathcal{N}$, и, рассматривая $\Lambda^9\psi$, где $\psi: S^2V \to F$, легко показать, что F порождается глобальными сечениями. Существует однозначно определенный $SL_2(\mathbf{C})$-инвариантный изоморфизм $t: S^2V^* \oplus \mathcal{N}^* \tilde{\to} S^2V \oplus \mathcal{N}$, и сквозной гомоморфизм $S^*\otimes V^* \to$ $\to S^2V^* \oplus \mathcal{N}^* \tilde{\to} S^2V \oplus \mathcal{N}$ пропускается через $S^* \otimes V^* \to T^* \otimes V \to V \otimes V \to$ $\to S^2V \oplus \mathcal{N}$, и, значит, $0 \to F^* \to S^*V^* \oplus \mathcal{N}^* \tilde{\to} S^2V \oplus \mathcal{N} \to F \to 0$ — точная последовательность. Теорема доказана.

3. По исключительному набору можно построить алгебру $A = \mathrm{Hom}(E, E)$, где $E = \bigoplus_{i=0}^{n} E_i$. Используя теоремы 4.1 и 6.2 работы [3], мы получаем следствия.

Следствие. *Набор* ε *порождает произвольную категорию* $D^b(\mathrm{Sh}(V_5))$ *когерентных пучков на* V_5.

Следствие. *Произвольная категория* $D^b(\mathrm{Sh}(V_5))$ *эквивалентна производной категории* $D^b(\mathrm{mod}{=}A)$ *правых конечномерных модулей над* A.

Автор выражает благодарность А. Бондалу за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исковских В. А. Лекции по трехмерным алгебраическим многообразиям. Многообразия Фано. М., 1988.
2. Mukai S., Umemura H. Minimal rational threefolds//Lect. Notes Math. 1983. **1016.**
3. Бондал А. И. Представления ассоциативных алгебр и когерентные пучки//Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1989. **53**, № 1. 25—44.
4. Городенцев А. Л. Перестройки исключительных расслоений на $\mathbf{P}^n$//Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1988. **52**, № 1. 3—15.
5. Капранов М. М. Производная категория когерентных пучков на многообразиях Грассмана//Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1984. **48**, № 1. 192—202.

Поступила в редакцию
26.11.90