



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Ветохин, Точный дескриптивный тип множества правильных линейных систем, *Дифференц. уравнения*, 2000, том 36, номер 8, 1128–1129

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.88

2 декабря 2024 г., 22:02:57



КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.926.4

ТОЧНЫЙ ДЕСКРИПТИВНЫЙ ТИП МНОЖЕСТВА ПРАВИЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А. Н. ВЕТОХИН

Для заданного натурального числа n рассмотрим линейное пространство M_n систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \in R^+, \quad (1)$$

где $A: R^+ \rightarrow \text{End } R^n$ — кусочно-непрерывная ограниченная оператор-функция. Пусть $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ — показатели Ляпунова системы (1). Согласно определению [1, с. 139], система (1) называется правильной, если коэффициент неправильности Ляпунова

$$\sigma(A) = \lambda_1(A) + \dots + \lambda_n(A) - \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t \text{Sp } A(\tau) d\tau$$

обращается в нуль.

Известно много различных интересных свойств правильных систем, в частности, в качественной теории дифференциальных уравнений известна теорема Миллионщикова — Оселедца, согласно которой почти все (в смысле всякой нормированной меры, инвариантной относительно сдвигов по t) системы с ограниченными равномерно непрерывными коэффициентами правильны.

В настоящей работе описан дескриптивный тип [2, с. 248] множества правильных систем в пространстве систем вида (1), наделенном метрикой $\rho(A, B) = \sup_{t \in R^+} \|A(t) - B(t)\|$, получившееся таким образом метрическое пространство будем обозначать через M_n^u .

Теорема. Если $n > 1$, то множество правильных систем является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ и не является множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве M_n^u .

Доказательство теоремы будет разбито на ряд лемм.

Лемма 1. Множество правильных систем является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в пространстве M_n^u .

Доказательство. Множество правильных систем можно определить как $\sigma^{-1}(0)$ — прообраз нуля при отображении $\sigma(\cdot): M_n \rightarrow R$. Так как показатели Ляпунова являются функциями второго класса Бэра на пространстве M_n^u [3], а функция, определяемая формулой $A \mapsto \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t \text{Sp } A(\tau) d\tau$, непрерывна на этом пространстве, то множество $\sigma^{-1}(0)$ является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ [2, с. 248]. Итак, мы установили, что множество правильных систем является множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в пространстве M_n^u . Лемма 1 доказана.

Проведем некоторое дополнительное построение. Построим метрическое пространство $B(N)$ следующим образом: точками пространства $B(N)$ являются по определению всевозможные (счетные) последовательности $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \dots)$ натуральных чисел. Расстояние между двумя точками $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \dots)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m, \dots)$ определяется как $\rho'(\alpha, \beta) = 1/m$, где m наименьшее из тех натуральных чисел, для которых $\alpha_m \neq \beta_m$. Обозначим через P_ω множество тех последовательностей, которые стремятся к бесконечности. Бэрром доказано, что характеристическая функция множества P_ω не принадлежит второму классу Бэра на пространстве $B(N)$ [4].

Пусть $I_n: M_n \rightarrow \{0, 1\}$ — характеристическая функция множества правильных систем.

Лемма 2. Существует непрерывное отображение $\varphi: B(N) \rightarrow M_n^u$ такое, что $I_2(\varphi(\alpha)) = 1$ при $\alpha \in P_\omega$, $I_2(\varphi(\alpha)) = 0$ при $\alpha \notin P_\omega$.

Доказательство. Каждому $\alpha = (\alpha_k)_{k=1}^\infty \in B(N)$ поставим в соответствие систему уравнений

$$\dot{x} = U_\alpha(t)x \quad (2)$$

с кусочно-непрерывной функцией $U_\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при $t \in [2^k, 2^{k+1} - k - 1)$ и $U_\alpha(t) = u_k^\alpha(t) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ при $t \in [2^{k+1} - k - 1, 2^{k+1})$, $u_k^\alpha = (k+1)^{-1} \arccos(\exp(-(2^{k+1} - 2^k - k - 1)/\min\{\alpha_k, k\}))$, $k = 1, 2, \dots$

Для правильности этой системы необходимо и достаточно [5], чтобы $\lim_{k \rightarrow \infty} (2^{k+1} - 2^k - k - 1)^{-1} \ln |\cos(u_k^\alpha(k + 1))| = 0$. Для системы (2) имеет место равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (2^{k+1} - 2^k - k - 1)^{-1} \ln |\cos(u_k^\alpha(k + 1))| = \lim_{k \rightarrow \infty} [-1/\min\{\alpha_k, k\}].$$

Пусть $\alpha \in P_\omega$, тогда получаем $\lim_{k \rightarrow \infty} [-1/\min\{\alpha_k, k\}] = 0$, т.е. система (2) является правильной. Если $\alpha \notin P_\omega$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} [-1/\min\{\alpha_k, k\}] < 0$, т.е. система (2) не является правильной. Итак, мы получили отображение $\varphi: \mathcal{B}(N) \rightarrow M_2^u$ такое, что $I_2(\varphi(\alpha)) = 1$ при $\alpha \in P_\omega$, $I_2(\varphi(\alpha)) = 0$ при $\alpha \notin P_\omega$. Отображение φ является непрерывным. Действительно, пусть $\rho(\alpha, \beta) = 1/m$, т.е. $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_m = \beta_m$. Тогда получаем $U_\alpha(t) = U_\beta(t)$ на отрезке $[0, 2^{m+1}]$,

$$\rho(U_\alpha(t), U_\beta(t)) = \sup_{t > 2^{m+1}} \|U_\alpha(t) - U_\beta(t)\| = \sup_{k > m+1} |u_k^\alpha - u_k^\beta| \leq \pi/(m+1),$$

а следовательно, отображение φ является непрерывным. Лемма 2 доказана.

Завершение доказательства теоремы. Допустим, что множество правильных систем является не только множеством типа $F_{\sigma\delta}$, но и множеством типа $G_{\delta\sigma}$, тогда $I_n: M_n \rightarrow \{0, 1\}$ — характеристическая функция этого множества принадлежит второму классу Бэра на пространстве M_n^u [2, с. 249]. Отображение $\varphi: \mathcal{B}(N) \rightarrow M_n^u$, определяемое формулой $\alpha \rightarrow \dot{x} = \{U_\alpha(t), \underbrace{-2, \dots, -2}_{n-2}\}x$, где $U_\alpha(t)$ из леммы 2, является непрерывным. Рассмотрим сложное отображение $I_n(\varphi): \mathcal{B}(N) \rightarrow \{0, 1\}$. С одной стороны, оно является отображением второго класса Бэра [2, с. 219], с другой — совпадает с характеристической функцией множества P_ω (лемма 2), т.е. не принадлежит второму классу Бэра на пространстве $\mathcal{B}(N)$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Автор благодарен И. Н. Сергееву за оказанное внимание к работе.

Литература

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.
2. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.; Л., 1934.
3. Миллиончиков В. М. // Мат. заметки. 1985. Т. 38, № 1. С. 92 — 109.
4. Baire R. // Acta Math. 1906. Vol. 30. P. 1 — 48.
5. Макаров Е. К. // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 12. С. 2091 — 2098.

г. Москва

Поступила в редакцию
26 сентября 1997 г.