

*А. П. Широков*

## ОБ ОДНОМ ТИПЕ $G$ -СТРУКТУР, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ АЛГЕБРАМИ

### ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1.	Общее понятие о $G$ -структуре . . . . .	425
§ 2.	Ассоциативные унитарные алгебры и аналитические функции от переменной из алгебры . . . . .	430
§ 3.	Почти алгебраические структуры и связности . . . . .	436
§ 4.	Геометрические приложения почти алгебраических структур . . . . .	448
	Цитированная литература . . . . .	450

### § 1. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ О $G$ -СТРУКТУРЕ

Структуры на дифференцируемом многообразии, изучаемые в этой статье, являются частным случаем общего понятия  $G$ -структуры, исследовавшегося Бернардом ([16], [17]), Чженем ([18]) и рядом других геометров. Поэтому целесообразно остановиться сначала на кратком изложении этого понятия, используя обозначения статьи [17] и ограничиваясь действительными  $G$ -структурами, поскольку в дальнейшем будут рассматриваться только действительные структуры. С самого же начала следует отметить, что в настоящей статье не ставится задача изучения дифференциально-топологических свойств многообразий и потому все рассмотрения носят локальный характер.

Пусть  $X_n$  — дифференцируемое многообразие класса  $C^\omega$  и  $E(X_n, L_n)$  — главное расслоенное пространство линейных реперов этого многообразия с естественной проекцией  $p: E \rightarrow X_n$ . Для краткости мы будем нередко обозначать это пространство просто через  $E$ . Если  $x$  — точка из  $X_n$ , а  $T_x$  — касательное векторное пространство к  $X_n$  в точке  $x$ , то элемент  $z \in E$  из слоя  $p^{-1}(x)$  есть репер  $\{e_i\}$  пространства  $T_x$ . Элемент  $z$  можно отождествить с изоморфным линейным отображением векторного пространства  $R^n$  на  $T_x$ , при котором фиксированный канонический базис  $\{f_i\}$  из  $R^n$  переходит в репер  $\{e_i\}$ . Элементы одного и того же слоя переводятся друг в друга преобразованиями общей линейной группы  $L_n = GL(n, R)$ . Как известно, на пространстве  $E(X_n, L_n)$  можно определить фундаментальную 1-форму  $\theta$  со значениями в  $R^n$ . Эта форма относит вектору  $v_z$ , касательному к  $E$  в точке  $z$ , вектор  $\theta(v_z) \in R^n$  следующим образом: применяем к  $v_z$  проекцию  $p$ , полученный вектор  $dp(v_z)$  из  $T_{p(z)}$  относим к реперу  $z = \{e_i\}$  и, наконец, отыскиваем в  $R^n$  такой вектор, который при изоморфизме  $z$  переходит в  $dp(v_z)$ . Другими словами, имеем

$$\theta = z^{-1} \circ p. \quad (1)$$

Если  $R_g$  — правый сдвиг, определенный на  $E$  элементом  $g \in L_n$ , то ясно, что  $dR_g^* \theta = g^{-1} \cdot \theta$ ; кроме того, равенство  $\theta(v_z) = 0$  равносильно условию вертикальности вектора  $v_z$ .

Рассмотрим затем подгруппу Ли  $G \subset L_n$ . Пусть  $H$  — такое множество реперов многообразия  $X_n$ , что реперы одного слоя  $H_x$  над точкой  $x \in X_n$  переводятся друг в друга преобразованиями группы  $G$ , и это множество образует дифференцируемое главное расслоенное пространство  $H(X_n, G)$ . В таком случае говорят, что на  $X_n$  задана  $G$ -структура  $S(G, H)$  с пространством реперов  $H$  и со структурной группой  $G$ . На пространстве  $H$  можно по способу (1) определить форму

$$\omega = z^{-1} \circ p,$$

где  $z$  — репер из  $H$ . Эта векторная 1-форма тоже называется фундаментальной 1-формой на  $H$ ; она обладает свойством  $dR_g^* \omega = g^{-1} \cdot \omega$ ,  $g \in G$ , обращается в нуль только на вертикальных векторах, и при естественном гомоморфизме  $f: H \rightarrow E$  мы имеем  $f^* \theta = \omega$ , где  $\theta$  — фундаментальная 1-форма на  $E$ .

$G$ -структура называется интегрируемой, если каждая точка многообразия  $X_n$  может быть заключена в окрестность, снабженную таким локальным сечением пространства  $H$ , что реперы, образующие это сечение, натуральны.

Если задано линейное представление  $\mathfrak{R}(G)$  группы  $G$  в некотором векторном пространстве  $M$ , то на пространстве

$H(X_n, G)$  можно ввести понятие тензорной  $q$ -формы типа  $\mathfrak{K}(G)$ : это такая  $q$ -форма  $\Omega$  со значениями в  $M$ , что

$$dR_g^* \Omega = \mathfrak{K}(g^{-1}) \Omega, \quad g \in G,$$

и при этом равенство  $\Omega(\tau) = 0$  равносильно условию  $\rho\tau = 0$ ,

где  $\tau \in \bigwedge^q T_z$ , а  $T_z$  — касательное векторное пространство к  $H(X_n, G)$  в точке  $z$ . Тензором на  $H$  типа  $\mathfrak{K}(G)$  со значениями в  $M$  называется такая функция  $t$  на  $H$  со значениями в  $M$ , что при  $g \in G, z \in H$  имеем  $t(z \cdot g) = \mathfrak{K}(g^{-1}) \cdot t(z)$ . С помощью фундаментальной 1-формы  $\omega$  можно установить взаимнооднозначное соответствие между  $q$ -формами  $\Omega$  типа  $\mathfrak{K}(G)$  на  $H$

со значениями в  $M$  и тензорами  $H$  со значениями в  $M \otimes_R \bigwedge^q R^{n*}$

и типа  $\mathfrak{K}(g) \otimes \bigwedge^q g^{-1}$ . Действительно, если  $\Omega$  — указанная выше тензорная  $q$ -форма, то ей можно однозначно отнести ассоциированный тензор  $t\Omega$ , определяемый равенством  $\Omega = (t\Omega) \cdot \bigwedge^q \omega$ , или в базисе  $\{e_A\}$  для  $M$  и в каноническом базисе  $R^n$ :

$$\Omega^A = \frac{1}{q!} (t\Omega)_{i_1 \dots i_q}^A \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_q},$$

где компоненты  $(t\Omega)_{i_1 \dots i_q}^A$  антисимметричны по нижним индексам, а  $\omega^i$  — линейно независимые формы на  $H$ , служащие компонентами форм  $\omega$ .

Связность на главном расслоенном пространстве  $H$  называется  $H$ -связностью. Эта связность  $\gamma$  задается с помощью формы связности  $\pi$  со значениями в алгебре Ли  $G$  группы  $G$ . Если  $\Omega$  — тензорная  $q$ -форма на  $H$  со значениями в  $M$  и типа  $\mathfrak{K}(G)$ , то определяется абсолютный дифференциал этой  $q$ -формы:

$$\nabla \Omega = d\Omega + \tilde{\mathfrak{K}}(\pi) \cdot \Omega,$$

где  $\tilde{\mathfrak{K}}$  означает представление алгебры Ли группы  $G$  в множестве эндоморфизмов пространства  $M$ . Абсолютный дифференциал фундаментальной 1-формы  $\omega$  определяет форму кручения связности:

$$\Sigma = \nabla \omega = d\omega + \pi \cdot \omega,$$

которой отвечает тензор кручения  $t\Sigma$ . Этот тензор принимает значения в пространстве  $P = R^n \otimes_R \bigwedge^2 R^{n*}$  и имеет тип  $\mathfrak{K}(G)$ , где  $\mathfrak{K}$  — такое представление линейной группы  $L_n$  в  $P$ , что

$\mathfrak{K}(l) = l \otimes \wedge^2 l^{-1}$ ,  $l \in L_n$ .  $H$ -связность можно продолжить до линейной связности  $\hat{\gamma}$  на главном расслоенном пространстве линейных реперов; при этом форма кручения  $\Sigma$  оказывается индуцированной формой кручения  $\hat{\Sigma}$  связности  $\hat{\gamma}$ .

В теории  $G$ -структур большую роль играет понятие структурного тензора для  $G$ -структуры. Это понятие вводится следующим образом. Пусть  $\gamma$  и  $\gamma'$  — две  $H$ -связности с формами  $\pi$  и  $\pi'$ , а  $\Sigma$  и  $\Sigma'$  — их формы кручения. Тогда  $u = \pi' - \pi$  есть тензорная 1-форма на  $H$  присоединенного типа и со значениями в  $G$ . Эта форма обладает ассоциированным тензором  $\xi = tu$ , так что  $u = \xi \cdot \omega$ . Тензор  $\xi$  принимает значения в пространстве  $N_G = \underline{G} \otimes_R R^{n*}$  и имеет тип  $'\mathfrak{K}(G)$ , где  $'\mathfrak{K}$  — такое представление  $L_n$  в  $\mathfrak{K} = L_n \otimes_R R^{n*}$ , что  $'\mathfrak{K}(l) = \text{ad } l \otimes l^{-1}$ . Так

как  $\mathfrak{K} = R^n \otimes R^{n*} \otimes R^{n*}$ , то  $P = R^n \otimes \wedge^2 R^{n*}$  можно рассматривать как факторизацию  $\mathfrak{K}$  по подпространству  $Q$ , порожденному элементами  $x \otimes f \otimes f$  ( $x \in R^n$ ,  $f \in R^{n*}$ ). Пусть  $A$  — естественная проекция  $\mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}/Q = P: x \otimes f \otimes f' \rightarrow x \otimes (f \wedge f')$ . По отношению к базису  $\{e_i\}$  пространства  $R^n$  отображение  $A$  имеет вид

$$t_{jk}^i \rightarrow (t_{jk}^i - t_{kl}^i),$$

и при этом для  $l \in L_n$  имеем

$$A \circ '\mathfrak{K}(l) = \mathfrak{K}(l) \circ A.$$

Вычисления показывают, что

$$t\Sigma' - t\Sigma = A \circ \xi. \quad (2)$$

Пусть  $V = A(N_G)$ ,  $M = P/V$ ,  $\alpha$  — естественная проекция  $P \rightarrow M$ . Так как  $V$  инвариантно относительно  $\mathfrak{K}(G)$ , то представление  $\mathfrak{K}(G)$  можно факторизовать и получить таким образом представление  $\rho$  группы  $G$  в  $M$ . Теперь в силу (2) выражение  $\alpha \circ t\Sigma' = \alpha \circ t\Sigma = t_S$  является функцией на  $H$  со значениями в  $M$  и такой, что при  $z \in H$ ,  $g \in G$  имеем  $t_S(z \cdot g) = \rho(g^{-1}) \cdot t_S(z)$ . Следовательно,  $t_S$  есть тензор на  $H$  со значениями в  $M$  и типа  $\rho(G)$ ; он называется структурным тензором  $G$ -структуры. Известно, что векторная 2-форма  $\Sigma$  на  $H$  будет кручением некоторой  $H$ -связности тогда и только тогда, когда  $\alpha \circ t\Sigma = t_S$ . В частности,  $G$ -структура обладает  $H$ -связностью нулевого кручения тогда и только тогда, когда ее структурный тензор равен нулю.

Предположим, что на окрестности  $U \subset X_n$  выбрано локальное сечение пространства  $H$ , образованное характерными для

$G$ -структуры реперами  $\{e_i\}$ , которым дуальны кореперы  $\{\theta^i\}$ . В таком случае можно определить отображение  $C_U: U \rightarrow P$  посредством равенства

$$d\theta^i = \frac{1}{2} b_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k,$$

где величины  $b_{jk}^i$  антисимметричны по нижним индексам и служат координатами в  $P$ . Как показал Бернар, структурный тензор  $t_S$  может быть на рассматриваемой окрестности  $U$  определен так:

$$(t_S)_U = \alpha \cdot C_U.$$

Отсюда следует, что для интегрируемой  $G$ -структуры структурный тензор равен нулю. Обратное положение верно не всегда. Во всяком случае,  $G$ -структуры с нулевым структурным тензором называются почти интегрируемыми.

Конкретные типы  $G$ -структур изучались многими авторами. В эту схему, например, укладывается понятие почти комплексной структуры, изучавшейся до и независимо от работ Бернара и Чжена и продолжающей привлекать внимание многочисленных исследователей вплоть до настоящего времени (см. [1]). Отметим также работу Кларка и Брукхеймера по тензорным структурам на дифференцируемых многообразиях (см. [19]). В этой работе изучается дифференцируемое многообразие  $X_n$ , на котором задано тензорное поле  $J$  типа  $(r, s)$ , причем компоненты этого тензора постоянны относительно некоторого допустимого (адаптированного) репера в окрестности каждой точки. Такое тензорное поле называется специальным. Множество допустимых реперов в каждой точке определяет группу  $G$  (подгруппу общей линейной группы), и в результате мы приходим к  $G$ -структуре на  $X_n$ . Реперы, в которых специальное тензорное поле имеет другие постоянные координаты, порождают эквивалентную  $G$ -структуру. Класс всех эквивалентных  $G$ -структур, определенный специальным тензорным полем  $J$  типа  $(r, s)$ , называется тензорной структурой типа  $(r, s)$  на  $X_n$ . Некоторая частная  $G$ -структура из класса эквивалентных  $G$ -структур называется репрезентативной структурой. При изучении тензорной структуры удобно выбрать вполне определенную репрезентативную структуру и назвать её нормальной репрезентативной. Связность для тензорной структуры определяется как такая линейная связность, форма которой, будучи ограничена на адаптированных реперах некоторой репрезентативной  $G$ -структуры, имеет значения в алгебре Ли  $\underline{G}$  группы  $G$ . Линейная связность на  $X_n$  будет связностью для тензорной структуры  $J$  тогда и толь-

ко тогда, когда  $\nabla J=0$ . Обратно, если  $J$  — дифференцируемое тензорное поле на  $X_n$  и если существует линейная связность, в которой  $\nabla J=0$ , то  $J$  определяет тензорную структуру, для которой данная связность служит структурной связностью. В другой своей работе ([20], см. также [21]) Кларк и Брукхеймер изучили свойства почти касательных структур, т. е. таких  $G$ -структур на четномерном многообразии  $X_{2n}$ , для которых группа  $G$  есть группа матриц вида  $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$ , где  $A$  и  $B$  — блоки  $n$ -го порядка. Это — один из примеров почти алгебраических структур, которые мы рассмотрим ниже: структура, определяемая алгеброй дуальных чисел; она характеризуется существованием структурного аффинора  $J$  с матрицей в адаптированном репере

$$(J) = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Линейная связность на  $X_{2n}$  будет связностью почти касательной структуры (будет ассоциирована с соответствующей  $H$ -связностью) тогда и только тогда, когда  $\nabla J=0$ . Для того, чтобы многообразие с почти касательной структурой имело ассоциированную связность без кручения, необходимо и достаточно, чтобы тензор Нейенхейса аффинора  $J$  был равен нулю.

Напомним, что тензор Нейенхейса [28] определяется для любого дифференцируемого аффинорного поля  $f$  и относит каждой паре векторных полей  $X, Y$  векторное поле

$$N(X, Y) = f[fX, Y] + f[X, fY] - [fX, fY] - ff[X, Y].$$

Если аффинор  $f$  задает интегрируемую тензорную (аффинорную) структуру, то тензор Нейенхейса такого аффинора равен нулю.

Наряду с указанными выше структурами большое внимание уделяется также структурам пространств — почти произведений (см., например, [7], [23]), почти контактными структурам (укажем для примера работы [30], [35]), почти кватернионными структурами и ряду других структур (см. [25], [26]; много сведений о почти кватернионных структурах приведено в обзорной статье [1]).

## § 2. АССОЦИАТИВНЫЕ УНИТАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕМЕННОЙ ИЗ АЛГЕБРЫ

Понятие о  $G$ -структуре, определяемой алгеброй, будет введено в связи с рассмотрением аналитической функции от переменной из алгебры и потому мы рассмотрим здесь этот вопрос.

Попытки построения теории аналитических функций для алгебр, обобщающих алгебру комплексных чисел, производились неоднократно. Впервые этот вопрос был изучен Шефферсом в 1893 году (см. [31]). Шефферс показал, что для унитар-

ной дистрибутивной алгебры над полем комплексных чисел необходимым и достаточным условием существования производной в обычном смысле является коммутативность алгебры; для существования же интеграла алгебра должна, сверх того, быть ассоциативной. Таким образом, наиболее близким и непосредственным обобщением теории аналитических функций комплексного переменного оказалась теория аналитических функций над коммутативной ассоциативной унитарной алгеброй. Приведем основные этапы рассуждений Шеффера. Пусть  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — базис дистрибутивной алгебры  $\mathfrak{A}_n$  с законом умножения

$$e_i e_j = \gamma_{ij}^s e_s, \quad (3)$$

где структурные константы  $\gamma_{ij}^k$  принадлежат полю комплексных чисел. Если  $x^1, \dots, x^n$  — комплексные переменные, а  $f^i(x^1, \dots, x^n)$  — обычные аналитические функции в комплексной области, то положим

$$x = x^s e_s, \quad f = f^s e_s.$$

Ставится вопрос: когда дифференциал функций  $f$ , то есть  $df = \partial_{ij} f^s dx^i e_s$ , можно представить в виде

$$df = f' dx \quad (4)$$

и одновременно в виде

$$df = dx' f. \quad (5)$$

В этом случае функция  $f$  называется аналитической функцией от  $x$ , а  $f'$  и  $'f$  — ее правой и левой производными по  $x$  (эти производные вообще говоря различны). Учитывая произвольность  $dx$  в формулах (4) и (5), мы видим, что алгебра должна обладать следующим свойством: для каждого элемента  $u \in \mathfrak{A}_n$  найдется такой элемент  $v \in \mathfrak{A}_n$ , что

$$uy = yv \quad (6)$$

при любом  $y \in \mathfrak{A}_n$ . Если алгебра унитарна, то есть обладает тем свойством, что в ней существует главная единица  $\varepsilon = \varepsilon^s e_s$ , то, полагая в (6)  $y = \varepsilon$ , получим  $u = v$ , то есть алгебра будет коммутативна; при этом из (4) и (5) будет следовать, что  $f' = 'f$ . Из (4) мы имеем, полагая  $f' = f'^s e_s$ :

$$\partial_{ij} f^t = \gamma_{sj}^t f'^s, \quad (7)$$

откуда  $f'^t = \varepsilon^s \partial_s f^t$ , так что

$$\partial_{ij} f^t = \gamma_{js}^t \varepsilon^s \partial_{ij} f^s. \quad (8)$$

Это — необходимое и достаточное условие для существования производной у функции  $f$ ; при выполнении этого условия

$$f' = \varepsilon^t \partial_{ij} f^s e_s \quad (9)$$

Если алгебра  $\mathfrak{A}_n$  ассоциативна, то есть если

$$\gamma_{ij}^s \gamma_{sk}^r = \gamma_{jk}^s \gamma_{is}^r, \quad (10)$$

то у всякой аналитической функции  $f$  найдется первообразная аналитическая функция  $F$ , так что согласно (7) мы будем иметь

$$\partial_j F^i = \gamma_{sj}^i f^s. \quad (11)$$

Действительно, используя (8) и (10), имеем из (11)

$$\partial_{kj} F^i = \gamma_{sj}^i \gamma_{kp}^s \varepsilon^t \partial_{it} f^p = \gamma_{sp}^i \gamma_{kj}^s \varepsilon^t \partial_{it} f^p,$$

так что  $\partial_{[kj]} F^i = 0$ , и условия интегрируемости системы (11) выполняются. Необходимость условия ассоциативности для существования первообразной также легко установить, если положить в (7)  $f' = x^2 = \gamma_{ij}^s x^i x^j e_s$ ; действительно, мы получим

тогда  $\partial_j f^i = \gamma_{st}^i \gamma_{pq}^s x^p x^q$ , а значит  $\partial_{kj} f^i = 2 \gamma_{sj}^i \gamma_{kp}^s x^p$ , и требование  $\partial_{[kj]} f^i = 0$  приведет нас к условию ассоциативности (10). Заметим, что в случае ассоциативности алгебры  $\mathfrak{A}_n$  условия (8) аналитичности функции  $f$  можно представить в виде

$$\gamma_{kj}^s \partial_{st} f^i = \partial_j f^s \gamma_{ks}^i. \quad (12)$$

Действительно, свертывая обе части (12) с  $\varepsilon^j$ , получим (8); обратно, используя (8) и (10), убедимся в справедливости (12). Точно так же убедимся, что условия (8) и (12) эквивалентны таким:

$$\gamma_{ks}^i \partial_j f^s = \gamma_{js}^i \partial_k f^s. \quad (13)$$

В дальнейшем понятие аналитической функции углублялось и обобщалось на некоммутативные алгебры; здесь можно отметить работы Хаусдорфа, Ринглеба, Ворда, Вагнера и других (см. [22], [29], [37], [38], [36], [33]). Изложим здесь точку зрения Ворда. Пусть  $\mathfrak{A}_n$  — конечная унитарная ассоциативная алгебра над полем  $F$  (под ним мы будем понимать поле действительных чисел). Введем матрицы  $\hat{R}$  и  $\hat{S}$  с элементами

$$R_i^k = \gamma_{ik}^l, \quad S_j^k = \gamma_{jl}^k. \quad (14)$$

Условия ассоциативности (10) принимают тогда вид

$$R_i^s R_s^k = \gamma_{ij}^s R_r^k, \quad S_i^m S_m^r = \gamma_{jk}^m S_r^i,$$

или в матричной записи

$$\hat{R} \hat{R} = \gamma_{ij}^s \hat{R}, \quad \hat{S} \hat{S} = \gamma_{jk}^m \hat{S}. \quad (15)$$

Таким образом, относя элементу  $\alpha = a^s e_s \in \mathfrak{M}_n$  матрицы  $\hat{R}(\alpha) = a^s \hat{R}_s$  и  $\hat{S}(\alpha) = a^m \hat{S}_m$ , мы приходим к двум регулярным матричным представлениям алгебры  $\mathfrak{M}_n$ . Для взаимной к  $\mathfrak{M}_n$  алгебры  $\overline{\mathfrak{M}}_n$  со структурными константами  $\overline{\gamma}_{ij}^k = \gamma_{ji}^k$  мы будем иметь, очевидно,  $\hat{R} = \hat{S}^T$ ,  $\hat{S} = \hat{R}^T$ .

Рассмотрим первую производную алгебры  $\mathfrak{D}$  для алгебры  $\mathfrak{M}_n$ , то есть алгебру наименьшего порядка, содержащую  $\mathfrak{M}_n$  и  $\overline{\mathfrak{M}}_n$  среди своих подалгебр. В качестве такой алгебры можно взять алгебру матриц, порожденную матрицами  $\hat{S} \hat{S}$ . Такую алгебру, действительно, можно построить, так как совокупность матриц  $\hat{S} \hat{S}$  замкнута относительно умножения; в самом деле, если учесть, что соотношение (10) можно записать в виде

$$\hat{S} \hat{S} = \hat{S} \hat{S}, \quad (16)$$

то мы имеем

$$\hat{S} \hat{S} \hat{S} \hat{S} = \hat{S} \hat{S} \hat{S} \hat{S} = \gamma_{ik}^p \gamma_{lj}^q \hat{S} \hat{S}.$$

Построенная алгебра содержит подалгебры, порожденные матрицами  $\hat{S} \hat{E} = \hat{S}$  и  $\hat{E} \hat{S} = \hat{S}$ , которые изоморфны алгебрам  $\mathfrak{M}_n$  и  $\overline{\mathfrak{M}}_n$ . С другой стороны, если первую производную алгебры  $\mathfrak{D}$  представить матрицами так, чтобы ее подалгебры  $\mathfrak{M}_n$  и  $\overline{\mathfrak{M}}_n$  представились матрицами, порожденными  $\hat{S}$  и  $\hat{S}$ , то она будет содержать и матрицы  $\hat{S} \hat{S}$ , так что построенная выше алгебра совпадет с  $\mathfrak{D}$ .

Пусть  $f(x) = f^s(x^1, \dots, x^n)_s e$  — функция от  $x = x^s e_s$ . В отличие от Шеффера, Ворд определяет производную  $\frac{df}{dx}$  для лю-

бой такой функции, понимая под этой производной якобиеву матрицу

$$\frac{df}{dx} = \frac{D(f^1, \dots, f^n)}{D(x^1, \dots, x^n)}.$$

Функция  $f(x)$  называется аналитической тогда и только тогда, когда ее производная  $\frac{df}{dx}$  принадлежит матричному представлению первой производной алгебры  $\mathfrak{D}$  для алгебры  $\mathfrak{A}_n$ . Это определение аналитичности по существу совпадает с определением Хаусдорфа, который называл функцию  $f(x)$  аналитической в том случае, если

$$df = \partial_{ij} f^s dx^i dx^j = \varphi^{ij} dx^i dx^j,$$

то есть если

$$\partial_{ij} f^l = \varphi^{pq} \gamma_{pj}^m \gamma_{mq}^l = \varphi^{pq} \bar{S}_j^m S_m^l.$$

Но при этом условии мы видим, что

$$\frac{df}{dx} = \varphi^{pq} \hat{S}_j^p \hat{S}_j^q,$$

то есть  $\frac{df}{dx}$  принадлежит алгебре  $\mathfrak{D}$ .

Ясно, что в случае коммутативности алгебры  $\mathfrak{A}_n$  функция, аналитическая в смысле Ворда, будет также аналитической в смысле Шеффера, и наоборот. Действительно, если  $\mathfrak{A}_n$  коммутативна, то  $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}_n$ , и условие аналитичности по Ворду означает, что

$$\frac{df}{dx} = \lambda^i \hat{S}_i,$$

то есть  $\partial_{ij} f^l = \lambda^s \gamma_{sj}^l$ , а это равносильно условию (8).

Может случиться, что производная  $\frac{df}{dx}$  аналитической (по Ворду) функции  $f$  принадлежит не просто алгебре  $\mathfrak{D}$ , но одной из ее подалгебр  $\mathfrak{A}_n$  или  $\bar{\mathfrak{A}}_n$ . Согласно Спампинато ([33]), в этом случае функция  $f(x)$  называется вполне дифференцируемой слева или справа. Если функция вполне дифференцируема слева, то это означает, что

$$\frac{df}{dx} = (\partial_j f^l) = \lambda^m \hat{S}_m,$$

то есть  $\partial_{ij} f^l = \lambda^m \gamma_{jm}^l$ , а значит

$$df = \partial_j f^i e dx^j = \lambda^m \gamma_{jm}^i dx^j e = dx \Lambda,$$

где  $\Lambda = \lambda^m e$ . Если же функция вполне дифференцируема справа, то

$$\frac{df}{dx} = (\partial_j f^i) = \lambda^m \hat{S}_m,$$

то есть  $\partial_j f^i = \lambda^m \gamma_{mj}^i$ , а значит

$$df = \partial_j f^i dx^j e = \lambda^m \gamma_{jm}^i dx^j e = \Lambda dx,$$

где снова  $\Lambda = \lambda^m e = \varepsilon^s \partial_s f^m e = \varepsilon^s \partial_s f$ .

В последние годы делались также попытки построения теории аналитических функций над конечными неассоциативными алгебрами (см. [24], [27]).

В заключение отметим, как может быть введено понятие аналитической функции от нескольких переменных из алгебры. Рассмотрим  $m$  переменных из алгебры  $\mathfrak{A}_n$ :

$$X^a = x^{(a-1)n+s} e \quad (a, b, c, \dots = 1, \dots, m).$$

Функция  $f = f^s(x^1, \dots, x^{mn}) e$  будет называться аналитической по переменным  $X^1, \dots, X^m$ , если она аналитична по каждой из этих переменных в отдельности, то есть если каждая из якобиевых матриц

$$\frac{D(f^1, \dots, f^m)}{D(x^{(a-1)n+1}, \dots, x^{an})}$$

принадлежит матричному представлению первой производной  $\mathfrak{D}$  алгебры  $\mathfrak{A}_n$ .

Рассмотрим, далее, взаимно однозначное дифференцируемое преобразование некоторой области евклидова пространства с координатами  $x^\alpha$  ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, \dots, mn$ ):

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^{mn}).$$

Положив  $Y^a = y^{(a-1)n+s} e$ , мы будем говорить, что преобразование  $x \rightarrow y$  определяет аналитическое преобразование переменных  $X^1, \dots, X^m$ , если каждая из функций  $Y^a$  является аналитической функцией от  $X^1, \dots, X^m$ . Это означает, что якобиева матрица

$$(\gamma_{\beta\alpha}^a) = \frac{D(y^1, \dots, y^{mn})}{D(x^1, \dots, x^{mn})}$$

состоит из блоков  $n$ -го порядка, каждый из которых принадлежит матричному представлению первой производной  $\mathfrak{D}$

алгебры  $\mathfrak{A}_n$ . В частности, если алгебра  $\mathfrak{A}_n$  коммутативна, то подобное строение якобиевой матрицы  $(\gamma_{\beta}^{\alpha})$  будет иметь место тогда и только тогда, когда она коммутирует с каждой из  $n$  блочно-диагональных матриц  $(f_{\beta}^{\alpha})$ , где

$$f_{\beta}^{\alpha} \begin{matrix} (a-1)n+1 \\ (b-1)n+1 \end{matrix} = \delta_{\beta}^{a-1} \gamma_{jk}^{\alpha}.$$

### § 3. ПОЧТИ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И СВЯЗНОСТИ

Построим для ассоциативной унитарной алгебры  $\mathfrak{A}_n$  матричное представление ее первой производной алгебры  $\mathfrak{D}$  и обозначим через  $G$  максимальную группу матриц, содержащуюся в  $\mathfrak{D}$ .

Дадим определение почти алгебраической структуры сначала для частного случая, когда размерность  $n$  многообразия  $X_n$ , наделенного такой структурой, совпадает с порядком алгебры  $\mathfrak{A}_n$ .

Выбрав в каждой точке  $x$  многообразия  $X_n$  произвольный репер, построим множество реперов в  $x$ , полученных из данного преобразованиями линейной группы  $G$ . Объединение всех таких реперов, которые можно назвать допустимыми реперами, образует главное расслоенное пространство  $E(X_n, G, \rho, \Phi)$ , которое и определяет почти алгебраическую структуру на многообразии  $X_n$ . Почти алгебраическая структура на  $X_n$  называется интегрируемой, если главное расслоенное пространство  $E$  допускает локальные сечения, образованные натуральными реперами локальных координат, области которых покрывают  $X_n$  (эти локальные координаты также называются допустимыми).

Построенная почти алгебраическая структура является частным случаем общего понятия  $G$ -структуры (см. § 1), а именно такой  $G$ -структурой, группа  $G$  которой определена выше алгеброй  $\mathfrak{A}_n$ . Линейные преобразования из группы  $G$  определяются матрицами, компоненты которых относительно выбранных допустимых реперов имеют вид

$$A_j^i = a^{pq} \gamma_{jp}^{m+1} = a^{pq} \gamma_{qj}^{m+1} \gamma_{mp}^i. \quad (17)$$

В группе  $G$  содержатся подгруппы  $G_1$  и  $G_2$ , образованные невырожденными матрицами, принадлежащими регулярным матричным представлениям алгебр  $\mathfrak{A}_n$  и  $\mathfrak{A}_n$ . Матрицы из  $G_1$  можно получить, полагая в (17)  $a^{pq} = \lambda^p \varepsilon^q$  и подбирая надлежащим образом  $\lambda^p$ :

$$A_j^i = \lambda^p \gamma_{jp}^i; \quad (18)$$

аналогично, матрицы из  $G_2$  можно получить, полагая в (17)  $a^{pq} = \varepsilon^p \lambda^q$ :

$$A_i^l = \lambda^p \gamma_{pj}^l. \quad (19)$$

Подобно тому, как было построено главное расслоенное пространство  $E(X_n, G, \rho, \Phi)$ , можно построить главные расслоенные пространства  $E_1(X_n, G_1, \rho, \Phi_1)$  и  $E_2(X_n, G_2, \rho, \Phi_2)$ .

Инфинитезимальные связности в пространствах  $E, E_1, E_2$  порождают линейные связности на  $X_n$ , называемые почти алгебраическими связностями, и компоненты этих связностей относительно допустимых реперов имеют соответственно вид

$$\Gamma_{jk}^i = \gamma_{jp}^m \gamma_{qm}^l a_k^{pq}, \quad (20)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \gamma_{js}^l a_k^s, \quad (21)$$

$$\Gamma_{jk}^l = \gamma_{sj}^i a_k^s, \quad (22)$$

где  $a_k^{pq}$  и  $a_k^s$  — произвольные функции от точки. Если алгебра  $\mathfrak{A}_n$  коммутативна, то все три пространства  $E, E_1, E_2$  совпадают; в этом случае совпадают и связности (20) — (22). Вообще же компоненты (21) и (22) получаются из компонент (20), если там положить соответственно  $a_k^{pq} = \varepsilon^q a_k^p$  и  $a_k^s = \varepsilon^s a_k^s$ .

Взяв один из допустимых реперов, образующих главное расслоенное пространство  $E$ , рассмотрим аффиноры с координатами относительно этого репера

$$f_{ab}^i = \gamma_{ia}^s \gamma_{bs}^l. \quad (23)$$

При переходе от одного допустимого репера к другому компоненты этих аффиноров не остаются неизменными, но переходят в соответствующие компоненты некоторых линейных комбинаций этих же аффиноров в исходном репере. Нетрудно вычислить ковариантную производную от такого аффинора (23) в связности (20):

$$\nabla_k f_{ab}^i = a_k^{pq} (\gamma_{ap}^s \gamma_{qb}^m - \gamma_{pa}^s \gamma_{bq}^m) f_{sm}^l. \quad (24)$$

Существует ли аффинор  $f_{ab}^i$ , коммутирующий со всеми аффинорами (23)? Записав условие

$$\gamma_{ja}^s \gamma_{bs}^m f_{im}^l = f_{im}^s \gamma_{ja}^m \gamma_{bs}^l, \quad (25)$$

мы получим после свертывания с  $\varepsilon^j \varepsilon^b$ :

$$f_a^l = \varepsilon^j f_{im}^s \gamma_{ja}^m \gamma_{bs}^l,$$

так что искомый аффинор  $f_{ab}^i$  должен иметь вид  $f_{ab}^i = \rho^s \gamma_{sj}^i$ . Под-

ставляя это выражение для  $f_j^i$  в (25), получим

$$p^i \gamma_{ij}^m \gamma_{ma}^s \gamma_{bs}^l = \gamma_{ja}^s \gamma_{bs}^m \gamma_{im}^l p^i.$$

Свертывая обе части этого равенства с  $e$  и обозначая  $P = p_s^s e$ , получим условие для величины  $P$ :

$$e P e = P e e,$$

$$b \quad ja \quad bja$$

или  $e P = P e$ , т. е. величина  $P$  должна принадлежать центру алгебры  $\mathfrak{A}_n$ . Итак, с аффинорами (23) коммутируют те и только те аффиноры, которые могут быть представлены в виде

$$f_j^i = \varepsilon^a p^b f_{ab}^i, \quad (26)$$

где

$$p^s \gamma_{sj}^l = p^s \gamma_{js}^l. \quad (27)$$

Каждый из аффиноров (26) имеет одни и те же координаты во всех допустимых реперах. Положив в (26)  $p^b = \text{const}$  и учитывая (24), мы получим:

$$\begin{aligned} \nabla_k f_j^i &= \varepsilon^a p^b a_k^{pq} (\gamma_{ap}^s \gamma_{qb}^m - \gamma_{pa}^s \gamma_{bq}^m) f_j^i = \\ &= a_k^{pq} p^b (\gamma_{qb}^m - \gamma_{bq}^m) f_j^i = 0. \end{aligned}$$

Наоборот, если положить в (20)

$$a_k^{pq} = \varepsilon^p a_k^q, \quad (28)$$

где

$$a_k^s \gamma_{sj}^l = a_k^s \gamma_{js}^l, \quad (29)$$

то в связности

$$\Gamma_{jk}^l = a_k^s \gamma_{sj}^l = a_k^s \gamma_{js}^l \quad (30)$$

будут ковариантно постоянны все аффиноры (23). Положив  $A_k = a_k^s e$ , мы видим, что условие (29) обуславливает принадлежность величин  $A_k$  к центру алгебры  $\mathfrak{A}_n$ . Если почти алгебраическая структура интегрируема и компоненты (30) вычислены относительно натурального допустимого репера, то отсутствие кручения у рассматриваемой связности эквивалентно условию

$$a_k^s \gamma_{sj}^l = a_j^s \gamma_{sk}^l,$$

или  $A_k e = A_j e$ , откуда  $A_i = A_e$ , где  $A = a^s e$  — величина из центра алгебры  $\mathfrak{A}_n$ , обладающая свойством

$$A \begin{pmatrix} e e \\ i i \\ j j \end{pmatrix} = 0. \quad (31)$$

Таким образом, мы приходим в этом случае к связности без кручения

$$\Gamma_{jk}^i = a^m \gamma_{mk}^s \gamma_{sj}^i, \quad (32)$$

где  $A = a^m e$  — величина из центра алгебры  $\mathfrak{A}_n$ , удовлетворяющая условию (31) при любых  $i, j$ .

Обращаясь затем к связности (22), покажем, что в ней ковариантно постоянны аффиноры  $f_a^i$  ( $a = 1, \dots, n$ ) с компонентами относительно допустимых реперов

$$f_a^i = e^b f_{ab}^i = \gamma_{ja}^i. \quad (33)$$

Действительно, полагая  $a_k^{pq} = e^p a_k^q$  и используя (24), мы имеем:

$$\nabla_k f_a^i = a_k^q e^p (\gamma_{ap}^s - \gamma_{pa}^s) f_{sq}^i = 0.$$

Обратно, связность (22) характерна тем, что она оставляет ковариантно постоянными аффиноры  $f_a^i$  с компонентами (33) относительно допустимых реперов.

Связность (21) совершенно аналогична связности (22) и не будет особо рассматриваться.

Если структура интегрируема и компоненты связности (22) вычислены в натуральном допустимом репере, то эта связность будет иметь нулевое кручение при условии

$$\gamma_{sj}^i a_k^s = \gamma_{sk}^i a_j^s. \quad (34)$$

Свертывая обе части равенства (34) с  $e^k$ , мы получим

$$a_j^i = a^s \gamma_{sj}^i, \quad (35)$$

где  $a^s = e^k a_k^s$ . Подставляя (35) в (34), будем иметь условие

$$\gamma_{sj}^i \gamma_{mk}^s a^m = \gamma_{sk}^i \gamma_{mj}^s a^m, \quad (36)$$

которое означает, что величина из алгебры  $A = a^s e$  обладает свойством

$$A \begin{pmatrix} e e \\ k l \\ j k \end{pmatrix} = 0. \quad (37)$$

Итак, связность (22) без кручения имеет относительно допустимого натурального репера компоненты

$$\Gamma_{jk}^i = a^m \gamma_{mk}^s \gamma_{sj}^i, \quad (38)$$

где величина  $A = a^s e_s$  удовлетворяет условию (37) при любых индексах  $i, j$ .

Если сделать преобразование допустимого корепера  $\{\theta\}$ :

$$\theta^{i'} = A_s^{i'} \theta^s, \quad (39)$$

где  $A_j^{i'} = a^{pq} \gamma_{jp}^m \gamma_{qm}^i$ ,  $A_j^{i'} = b^{pq} \gamma_{jp}^m \gamma_{qm}^i$ , то коэффициенты связности преобразуются по формуле

$$\Gamma_{j'k'}^{i'} = \Gamma_{uv}^w A_j^u A_k^v A_w^{i'} + A_p^{i'} \partial_k A_j^p, \quad (40)$$

где  $\partial_k$  — символ пфаффовой производной. В частности, при преобразовании допустимого репера  $G_2$  — структуры мы в формулах (39) будем иметь

$$A_j^{i'} = p^s \gamma_{sj}^i, \quad A_j^{i'} = q^s \gamma_{sj}^i, \quad (41)$$

где величины из алгебры  $P = p^s e_s$ ,  $Q = q^s e_s$  связаны соотношением  $PQ = QP = \varepsilon$ . Записывая равенство (40), придем к соотношению

$$a_k^{i'} = \gamma_{rp}^w \gamma_{wm}^i \gamma_{nk}^v a_p^m q^n p^r + \gamma_{pm}^i p^p \partial_k q^m. \quad (42)$$

Обозначая  $A_k = a_k^i e_i$ , получим

$$A_k = P A_v Q \gamma_{nk}^v q^n + P \partial_k Q. \quad (43)$$

Переходя к связности без кручения, для которой  $A_k = A e_k$ , причем величина  $A = a^s e_s$  удовлетворяет условиям (37), мы находим в натуральном допустимом репере

$$A e_k = P A Q e_k + P \partial_k Q,$$

откуда после свертывания с  $e^k$

$$A = P A Q + P q^s \partial_s Q. \quad (44)$$

В частности, если алгебра  $\mathfrak{A}_n$  коммутативна и преобразования (41) записаны для натурального репера, так что  $A_j^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}$ , то, построив с помощью допустимых координат  $x^i$ ,  $x^{i'}$  величины из алгебры  $X = x^s e_s$ ,  $X' = x^{s'} e_{s'}$ , мы будем иметь

$P = \frac{dX'}{dX}$ ,  $Q = \frac{dX}{dX'}$  (в этом случае  $X'$  будет аналитической функцией от  $X$ ); формула (44) принимает вид

$$A = A \frac{dX}{dX'} + \frac{dX'}{dX} \frac{d^2 X}{dX'^2}. \quad (45)$$

Мы видим, что функция  $A$  преобразуется в этом случае так же, как объект связности одномерного пространства. Относя вектору  $v$  с координатами  $v^i$  относительно натурального допустимого репера величину из алгебры  $V = v^s e_s$ , мы сможем теперь записать условие параллельного переноса вектора в виде

$$dV + AV dX = 0. \quad (46)$$

Изложенные выше положения о почти алгебраических структурах и связностях можно обобщить на случай дифференцируемых многообразий  $X_{mn}$ , размерность которых является целым кратным порядка  $n$  алгебры  $\mathfrak{A}_n$ . Для этой цели мы рассмотрим группу  $G$   $mn$ -мерных матриц, образованных  $n$ -мерными блоками, принадлежащими матричному представлению первой производной алгебры  $\mathfrak{D}$  для алгебры  $\mathfrak{A}_n$ . Элементы этих матриц имеют вид

$$A_{(b-1)n+i}^{(a-1)n+i} = a_b^{apq} \gamma_{jp}^i \gamma_{qm}^i, \quad (47)$$

где  $a, b, c, \dots = 1, \dots, m$ . Рассмотрим также подгруппы  $G_1$  и  $G_2$  группы  $G$ , образованные  $mn$ -мерными матрицами,  $n$ -мерные блоки которых принадлежат регулярным матричным представлениям алгебр  $\mathfrak{A}_n$  и  $\bar{\mathfrak{A}}_n$ . Элементы таких матриц имеют соответственно вид

$$A_{(b-1)n+i}^{(a-1)n+i} = \lambda_b^{ap} \gamma_{jp}^i, \quad (48)$$

$$A_{(b-1)n+i}^{(a-1)n+i} = \lambda_b^{ap} \gamma_{jp}^i. \quad (49)$$

Мы можем затем построить главные расслоенные пространства допустимых реперов  $E(X_{mn}, G, p, \Phi)$ ,  $E_1(X_{mn}, G_1, p, \Phi_1)$ ,  $E_2(X_{mn}, G_2, p, \Phi_2)$ , задающие на  $X_{mn}$  почти алгебраическую структуру. Если структура интегрируема, т. е. если матрицы  $(A_{\beta}^{\alpha})$  имеют строение (47) — (49) в натуральном допустимом репере в координатной окрестности каждой точки, то допустимым координатам  $x^a$  можно поставить в соответствие  $m$  величин из алгебры  $X^a = x^{(a-1)n+s} e_s$ , и при переходе к новым допустимым координатам  $x^a$  соответствующие величины  $X^a$  окажутся аналитическими функциями от величин  $X^1, \dots, X^m$ .

Инфинитезимальные связности в пространствах  $E, E_1, E_2$  порождают линейные связности на  $X_{mn}$ , и компоненты этих

связностей относительно допустимых реперов будут соответственно иметь вид

$$\Gamma_{(b-1)n+j, (c-1)n+k}^{(a-1)n+i} = \gamma_{jp}^m \gamma_{qm}^i a_{bck}^{ppq}, \quad (50)$$

$$\Gamma_{(b-1)n+j, (c-1)n+k}^{(a-1)n+i} = \gamma_{js}^i a_{bck}^{as}. \quad (51)$$

$$\Gamma_{(b-1)n+j, (c-1)n+k}^{(a-1)n+i} = \gamma_{sj}^i a_{bck}^{as}, \quad (52)$$

где  $a_{bck}^{ppq}$ ,  $a_{bck}^{as}$  — произвольные функции от точки. Компоненты (51) и (52) получаются из (50), если положить соответственно  $a_{abk}^{cpq} = \varepsilon^q a_{abk}^{cp}$  и  $a_{abk}^{cpq} = \varepsilon^p a_{abk}^{cq}$ . В случае коммутативной алгебры связности (50) — (52) совпадают.

Рассмотрим аффиноры с координатами относительно допустимого репера

$$f_{pq}^{(a-1)n+i} = \delta_b^a \gamma_{jp}^s \gamma_{qs}^i. \quad (53)$$

Как и при выводе формулы (24), мы получим, что в связности (50)

$$\nabla_{(c-1)n+k} f_{pq}^{(a-1)n+i} = a_{cbk}^{anl} (\gamma_{pn}^s \gamma_{eq}^m - \gamma_{np}^s \gamma_{qi}^m) f_{sm}^{(a-1)n+i}. \quad (54)$$

Связность (52) характерна тем, что в ней ковариантно постоянны аффиноры с компонентами относительно допустимого репера

$$f_{(b-1)n+i}^{(a-1)n+i} = \delta_b^a \gamma_{jk}^i. \quad (55)$$

Аналогично, связность (51) характеризуется существованием ковариантно постоянных аффиноров с координатами относительно допустимого репера

$$f_{(b-1)n+i}^{(a-1)n+i} = \delta_b^a \gamma_{kj}^i. \quad (56)$$

Если почти алгебраическая структура на  $X_{mn}$  интегрируема и компоненты связности (52) вычислены относительно натурального допустимого репера, то отсутствие кручения у этой связности равносильно условиям

$$\gamma_{sj}^i a_{bck}^{as} = \gamma_{sk}^i a_{cbj}^{as}, \quad (57)$$

из которых свертыванием с  $\varepsilon^k$  находим

$$a_{cbj}^{ai} = a_{cb}^{as} \gamma_{sj}^i, \quad (58)$$

где

$$\gamma_{sj}^i a_{bc}^{pp} \gamma_{pk}^s = \gamma_{sk}^i a_{cb}^{pp, s} \gamma_{pj}^s.$$

Отсюда следует, что

$$a_{bc}^{ai} = a_{cb}^{ai}$$

и что величины

$$\Gamma_{bc}^a = a_{bc}^{as} e_s, \quad (59)$$

симметричные по нижним индексам, удовлетворяют условиям

$$\Gamma_{bc}^a (e_{kl} - e_{lk}) = 0 \quad (60)$$

для любых значений индексов  $k, j$ . Итак, связность (52) без кручения имеет относительно допустимого натурального репера компоненты

$$\Gamma_{(b-1)n+j, (c-1)n+k}^{(a-1)n+l} = a_{bc}^{as} \gamma_{sk}^l \gamma_{mj}^i, \quad (61)$$

где величины (59) симметричны по нижним индексам и удовлетворяют условиям (60) (см. [14]). Если алгебра  $\mathfrak{A}_n$  коммутативна, то преобразование допустимых координат  $x^a$  сопровождается аналитическим преобразованием соответствующих величин  $X^a = x^{(a-1)n+s} e_s$ , и при этом величины  $\Gamma_{bc}^a$  преобразуются так же, как коэффициенты аффинной связности  $m$ -мерного пространства.

Ставя в соответствие вектору  $v^a$  в натуральном репере величины  $V^a = v^{(a-1)n+s} e_s$ , мы можем записать условие параллельного переноса вектора  $v^a$  в связности (61) следующим образом:

$$dV^a + \Gamma_{bc}^a V^b dX^c = 0. \quad (62)$$

Следовательно, интегрируемая почти алгебраическая структура со связностью без кручения (61) служит вещественной реализацией  $m$ -мерного пространства над коммутативной алгеброй (см. [13]). Условие параллельного перенесения в связности без кручения (62) сохраняет свой вид и для некоммукативной алгебры.

Рассмотрим тензоры кривизны и кручения линейных связностей (20) — (22), предполагая, что почти алгебраическая структура на  $X_{mn}$  интегрируема и компоненты этих связностей записаны относительно допустимого натурального репера. Для связности (20) мы находим:

$$\begin{aligned} 2T_{jk}^i &= \gamma_{qm}^i (\gamma_{jp}^m a_k^{pq} - \gamma_{kp}^m a_j^{pq}), \\ R_{kfi}^s &= \gamma_{ip}^m \gamma_{qm}^s (\partial_k a_j^{pq} - \partial_j a_k^{pq}) + \\ &+ \gamma_{ip}^r \gamma_{qr}^m \gamma_{mn}^g \gamma_{tg}^s (a_l^{pq} a_k^{nt} - a_k^{pq} a_l^{nt}). \end{aligned}$$

Так как связности (21) и (22) аналогичны, то рассмотрим только вторую из них; для этой связности

$$2T_{jk}^i = \gamma_{qi}^l a_k^{qj} - \gamma_{qk}^l a_j^{qi},$$

$$R_{kjl}^s = \gamma_{qi}^s (\partial_k a_j^q - \partial_j a_k^q) + \gamma_{qi}^m \gamma_{tm}^s (a_j^q a_k^t - a_k^q a_j^t).$$

Вспомня формулу (35), мы видим, что в случае нулевого кручения и голономного допустимого репера  $a_i^t = a^s \gamma_{sf}^t$ , т. е.  $a_j^q e = A e$ , где  $A = a^s e$ , причем  $A(ee - ee) = 0$ . Образум затем выражение  $R_{kjl}^s e$ :

$$R_{kjl}^s e = (\partial_k A e - \partial_j A e) e + (A e A e - A e A e) e.$$

Преобразум второе слагаемое в этом равенстве:

$$A e A e - A e A e = A A e e - A A e e = A A (e e - e e) = 0.$$

Итак, в случае связности без кручения мы имеем

$$R_{kjl}^s = \gamma_{qi}^s (\gamma_{mj}^q \partial_k a^m - \gamma_{mk}^q \partial_j a^m); \quad (63)$$

где функция  $A = a^s e$  удовлетворяет условиям (37). В случае коммутативной алгебры условия (37) выполняются всегда, и если мы вспомним условия (13) аналитичности функции от переменной из алгебры, то можем сказать, что связность (38) будет локально евклидовой тогда и только тогда, когда аналитична функция  $A = a^s e$ .

Если же алгебра не коммутативна, то связность (38) будет локально евклидовой тогда и только тогда, когда функция  $A$ , удовлетворяющая условиям (37), вполне дифференцируема справа (см. § 2). Действительно, из (63) следует, что в случае  $R_{kjl}^s = 0$  справедливо равенство  $\partial_k a^q = \gamma_{mk}^q b^m$ ; обратно, если  $\partial_k a^q = \gamma_{mk}^q b^m$ , то, обозначая  $B = b^s e$ , мы будем иметь  $R_{kjl}^s e = B(ee - ee) e$ , и так как  $\partial_k A = B e$ , т. е.  $B = \varepsilon^k \partial_k A$ , то в силу (37)  $R_{kjl}^s e = 0$ , а значит  $R_{kjl}^s = 0$ .

Вычислим затем тензор кривизны и кручения связности (52), предполагая, что структура интегрируема и компоненты (52) записаны относительно допустимого натурального репера. Тензор кручения принимает вид

$$2T_{(b-1)n+j, (c-1)n+k}^{(a-1)n+l} = \gamma_{sf}^i a_{bck}^{as} - \gamma_{sk}^i a_{cbj}^{as}.$$

Для упрощения мы выпишем не сами компоненты тензора кривизны, а выражения

$$R_{(c-1)n+k, (b-1)n+l, (a-1)n+i}^{(e-1)n+s} = [\partial_{(c-1)n+k} a_{ab}^{ep} - \partial_{(b-1)n+l} a_{ack}^{ep}] e e +$$

$$+ [a_{ab}^p a_{fck}^{eq} - a_{ack}^p a_{fbj}^{eq}] eee. \quad (64)$$

q p i

Если кручение равно нулю, то, как мы видели, компоненты связности (52) принимают вид (61), где величины (59) удовлетворяют условиям (60). Для связности (61) выражение (64) принимает вид

$$R_{(c-1)n+k, (b-1)n+i, (a-1)n+i}^{(e-1)n+r} e = \\ = [\partial_{(c-1)n+k} \Gamma_{ab}^e e_j - \partial_{(b-1)n+i} \Gamma_{ac}^e e_k + \Gamma_{fc}^e e_{ab}^f e_i - \Gamma_{fb}^e e_{ac}^f e_k] e. \quad (65)$$

Если функции  $\Gamma_{ab}^c$  окажутся вполне дифференцируемыми справа по переменным  $X^a = x^{(a-1)n+s} e_s$ , то, обозначая

$$\overset{\circ}{\partial}_a = e^r \partial_{(a-1)n+r},$$

мы получим из (65)

$$e^k e^j e^i R_{(c-1)n+k, (b-1)n+j, (a-1)n+i}^{(e-1)n+s} e = \\ = \overset{\circ}{\partial}_c \Gamma_{ab}^e - \overset{\circ}{\partial}_b \Gamma_{ac}^e + \Gamma_{fc}^e \Gamma_{ab}^f - \Gamma_{fb}^e \Gamma_{ac}^f. \quad (66)$$

В частности, если алгебра коммутативна и функции  $\Gamma_{ab}^c$  аналитичны по переменным  $X^a$ , то выражение, стоящее в правой части формулы (66), оказывается тензором кривизны  $R_{cba}^e$  аналитической связности без кручения  $\Gamma_{ab}^c$ , а формула (66) принимает вид

$$e^k e^j e^i R_{(c-1)n+k, (b-1)n+j, (a-1)n+i}^{(e-1)n+r} e = R_{cba}^e.$$

Если в случае коммутативной алгебры задать связность

$$\Gamma_{(b-1)n+i, (c-1)n+k}^{(a-1)n+l} = a_{bc}^{as} \gamma_{sk}^m \gamma_{mj}^l,$$

не считая величины  $a_{bc}^{as}$  симметричными по нижним индексам, то в предположении аналитичности функций

$$\Gamma_{bc}^a = a_{bc}^{as} e_s = e^j e^k \Gamma_{(b-1)n+j, (c-1)n+k}^{(a-1)n+l} e_l$$

мы приходим к аналитической связности с кручением для  $m$ -мерного пространства над алгеброй.

Рассмотрим дифференцируемое многообразие  $X_{mn}$  со структурой, определяемой коммутативной ассоциативной унитарной алгеброй  $\mathfrak{A}_n$ . Такая структура характеризуется существованием на  $X_{mn}$   $n$  полей структурных аффиноров  $f_k^a$ .

компоненты которых в допустимом репере имеют вид

$$f_{(b-1) n+j}^{(a-1) n+i} = \delta_{b1}^{a1} f_{jk} \quad (67)$$

Эти аффиноры в случае коммутативной алгебры совпадают как с аффинорами (55), так и с аффинорами (56). Структурная группа является теперь группой матриц, коммутирующих с матрицами структурных аффиноров. Используя поля структурных аффиноров  $f$ , мы можем построить на  $X_{mn}$  тензорные поля  $N$  типа (2,1), являющиеся естественным обобщением тензорного поля Нейенхейса для аффинорной структуры. Каждый из этих тензоров относит векторным полям  $X, Y$  векторное поле

$$N_{kr}(X, Y) = f_{kr} [f_r X, Y] - [f_r X, f_k Y] + f_r [X, f_k Y] - f f_{kr} [X, Y]$$

и локально может быть определен так:

$$N_{rk}^Y = f_a^\sigma \partial_\sigma f_\beta^Y - f_\beta^\sigma \partial_\sigma f_r^Y - f_r^\sigma \partial_\sigma f_\beta^\sigma + f_\beta^Y \partial_\beta f_r^\sigma$$

где частные производные по локальным координатам можно заменить ковариантными производными в любой связности без кручения. В адаптированном репере эти тензоры принимают вид

$$N_{rk}^{Y(*)} = f_\tau^Y f_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta}^\tau + f_\beta^\tau f_\alpha^\sigma b_{\tau\sigma}^Y + f_\beta^\sigma f_\tau^Y b_{\alpha\sigma}^\tau + f_\tau^\sigma f_\alpha^\tau b_{\beta\sigma}^\tau \quad (68)$$

Построенные тензоры связаны соотношениями

$$N_{rk}^Y = -N_{kr}^Y$$

Ясно, что для интегрируемой структуры все тензоры  $N$  обращаются в нуль. Обратное можно проверить на ряде конкретных структур (например, определяемых коммутативными алгебрами 2-го, 3-го и 4-го порядков). Почти алгебраическую структуру, для которой все тензоры  $N$  обращаются в нуль, естественно назвать почти интегрируемой. Используя выражение (68) для тензора  $N$  в допустимом репере, мы получим в случае почти интегрируемой структуры равенство

$$f_\tau^Y f_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta}^\tau + f_\beta^\tau f_\alpha^\sigma b_{\tau\sigma}^Y + f_\beta^\sigma f_\tau^Y b_{\alpha\sigma}^\tau + f_\tau^\sigma f_\alpha^\tau b_{\beta\sigma}^\tau = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$f_\alpha^\sigma P_{\sigma\beta}^Y - f_\sigma^Y P_{\alpha\beta}^\sigma = 0,$$

где

$$P_{\alpha\beta}^{\gamma} = f_k^{\gamma} b_{\alpha\beta}^{\tau} - f_{\beta}^{\tau} b_{\alpha\tau}^{\gamma}.$$

Итак, при фиксированных номерах  $k$  и  $\beta$  матрица  $(P_{\alpha\beta}^{\gamma})$  коммутирует со всеми матрицами  $(f_{\beta}^{\alpha})$ . Это означает, что если положить  $\alpha = (a, i)$ ,  $\beta = (b, j)$ ,  $\gamma = (c, s)$ ,  $\tau = (e, t)$ , то мы получим равенство вида

$$\delta_e^c \gamma_{kt}^s b_{(a,i)(b,j)}^{(e,t)} - \delta_k^e \gamma_{kj}^t b_{(a,i)(e,t)}^{(c,s)} = \frac{m}{\varphi_k^c} a \gamma_{mi}^s,$$

или

$$\gamma_{kt}^s b_{(a,i)(b,j)}^{(c,t)} - \gamma_{kj}^t b_{(a,i)(b,t)}^{(c,s)} = \frac{m}{\varphi_k^c} a \gamma_{mi}^s. \quad (69)$$

Свертывая обе части этого равенства с  $\varepsilon^j$ , получим:

$$b_{(a,i)(b,k)}^{(c,s)} = \varepsilon^p b_{(a,i)(b,p)}^{(c,t)} \gamma_{tk}^s - \varepsilon^p \varphi_{(b,p)a}^c \gamma_{ti}^s. \quad (70)$$

Свертывая затем обе части (70) с  $\varepsilon^i \varepsilon^k$ , будем иметь

$$\varepsilon^p \varepsilon^q \varphi_{(b,p)a}^c = 0. \quad (71)$$

Далее, так как  $b_{\alpha\beta}^{\gamma} = -b_{\beta\alpha}^{\gamma}$ , то

$$\left( \varepsilon^p b_{(a,i)(b,p)}^{(c,t)} - \varepsilon^p \varphi_{(a,p)b}^t \right) \gamma_{tk}^s + \left( \varepsilon^p b_{(b,k)(a,p)}^{(c,t)} - \varepsilon^p \varphi_{(b,p)a}^t \right) \gamma_{ti}^s = 0.$$

Свертываем обе части этого выражения с  $\varepsilon^k$  и учитываем (71):

$$\varepsilon^p b_{(a,i)(b,p)}^{(c,s)} - \varepsilon^p \varphi_{(a,p)b}^s = \Omega_{ab}^{(c,t)} \gamma_{ti}^s,$$

где  $\Omega_{ab}^{(c,t)} = -\Omega_{ba}^{(c,t)}$ . Подставляя в (70), имеем:

$$\begin{aligned} b_{(a,i)(b,k)}^{(c,s)} &= \varepsilon^p \varphi_{(a,p)b}^t \gamma_{tk}^s - \varepsilon^p \varphi_{(b,p)a}^t \gamma_{ti}^s + \Omega_{ab}^{(c,m)} \gamma_{mi}^t \gamma_{tk}^s = \\ &= \left( \varepsilon^p \varphi_{(a,p)b}^t + \frac{1}{2} \Omega_{ab}^{(c,m)} \gamma_{mi}^t \right) \gamma_{tk}^s - \\ &- \left( \varepsilon^p \varphi_{(b,p)a}^t + \frac{1}{2} \Omega_{ba}^{(c,m)} \gamma_{mk}^t \right) \gamma_{ti}^s. \end{aligned}$$

Итак, при  $N = 0$  компоненты  $b_{(a,i)(b,l)}^{(c,k)}$  имеют вид

$$b_{(a,i)(b,k)}^{(c,s)} = p_{abt}^{ct} \gamma_{tk}^s - p_{bak}^{ct} \gamma_{ti}^s. \quad (72)$$

Обратно, если компоненты  $b_{ar}^\alpha$  в допустимом репере имеют вид (72), то соотношения (69) удовлетворяются:

$$\gamma_{ki}^s b_{(a,i)(b,j)}^{(c,t)} - \gamma_{kj}^t b_{(a,i)(b,t)}^{(c,s)} = (p_{bat}^{cm} \gamma_{kj}^t - p_{baj}^{ct} \gamma_{tk}^m) \gamma_{mi}^s.$$

Равенство (72) означает, что элемент  $\frac{1}{2} b_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \wedge \theta^\alpha \otimes e_\gamma$  принадлежит подпространству  $V$  (см. § 1), т. е. равенства  $N = 0$  равносильны обращению в нуль структурного тензора почти алгебраической структуры на  $X_{mn}$ .

Заметим, что связности типа (20) и (50) были введены нами параллельно с рассмотрением вопроса об аналитической функции от переменной из алгебры. Если алгебра  $\mathfrak{A}_n$  коммутативна, то вид этих связностей в натуральном репере сохраняется при аналитическом преобразовании локальных координат в смысле Шеффера; в более же общем случае ассоциативной унитарной алгебры указанные связности сохраняют строение своей матричной формы при тех преобразованиях локальных координат, которые аналитичны в смысле Ворда. Очевидно, можно было бы рассмотреть и более общие линейные связности, матричные формы которых принадлежат какому-то определенному матричному представлению заданной алгебры (не обязательно унитарной); такой более общей постановки вопроса мы здесь не касаемся.

#### § 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПОЧТИ АЛГЕБРАНЧЕСКИХ СТРУКТУР

Рассмотрим несколько примеров выделенных выше просторанств линейной связности. Остановимся сначала на просторанствах со связностями типа (20) и (50) и покажем, что такие связности естественным образом возникают при изучении некоторых однородных пространств.

1. Пусть в ассоциативной унитарной алгебре  $\mathfrak{A}_n$  определены преобразования  $T_a: x \rightarrow ax$ ,  $a \in \mathfrak{A}_n$ . Совокупность таких преобразований, отвечающих обратимым элементам  $a$ , образует группу Ли (изоморфно представляемую некоторой подгруппой  $G$  общей линейной группы  $GL(n, R)$ ). Элементу группы  $G$ , отвечающему преобразованию  $T_x$ , отнесем элемент алгебры  $x$ . Тогда в группе  $G$  будем иметь левые сдвиги  $L_a: x \rightarrow ax$ , где  $x$  — общий элемент группы  $G$ , представленный элементом алгебры  $x$ . Координаты элемента  $x$  задают координаты в  $G$ . Каждому элементу алгебры Ли группы  $G$  (касательному вектору в нейтральном элементе  $e$ ) можно сопоставить элемент алгебры  $\mathfrak{A}_n$ ; в частности, можно выбрать такой базис алгеб-

ры Ли, которому отвечает базис алгебры  $\mathfrak{A}_n: e_1, \dots, e_n$ . Элементу  $e_k$  отвечает левоинвариантное векторное поле  $e_k(x)$  на  $G$ , и координаты вектора  $e_k(x)$  равны  $e_k^i = x^s \gamma_{sk}^i$ . Отсюда следует, что скобка двух векторных полей  $e_k, e_r$  есть левоинвариантное векторное поле, отвечающее элементу  $e_k e_r - e_r e_k$ . Поэтому алгебра Ли группы  $G$  есть алгебра Ли ассоциативной алгебры  $\mathfrak{A}_n$  (см. [31]). Как известно ([32]), в групповом пространстве группы  $G$  существует три типа замечательных линейных связностей: две связности с абсолютными параллелизмами, порожденными правыми и левыми сдвигами, и их средняя связность без кручения. Если касательный вектор к  $G$  в нейтральном элементе отвечает величине из алгебры  $V_0 = v^s e_s$ , то соответствующее левоинвариантное векторное поле  $v(x)$  будет определяться величиной  $V = xV_0$ , и закон параллельного перенесения посредством левых сдвигов запишется уравнением  $dV = dx x^{-1} V$ . Положив  $x^{-1} = u^s e_s$ , мы находим коэффициенты соответствующей связности в натуральном репере:

$\Gamma_{jk}^i = -\gamma_{ks}^p \gamma_{pj}^i u^s$ . Мы видим, что это — связность типа (22), отвечающая значениям  $a_k^p = -\gamma_{ks}^p u^s$ . Аналогично, в той же системе координат мы находим связность с абсолютным параллелизмом, определяемым правыми сдвигами:  $\overset{2}{\Gamma}_{jk}^i = -\gamma_{sk}^p \gamma_{jp}^i u^s$ ; это — связность типа (21), отвечающая значениям  $a_k^p = -\gamma_{sk}^p u^s$ . Средняя связность  $\Gamma_{jk}^i = -\frac{1}{2} (\gamma_{ks}^p \gamma_{pj}^i + \gamma_{sk}^p \gamma_{jp}^i) u^s$  не имеет кручения и является связностью типа (20), отвечающей значениям  $a_k^p = -\frac{1}{2} (\epsilon^p \gamma_{ks}^q + \epsilon^q \gamma_{sk}^p) u^s$ . Векторное поле  $v^l = x^l$ , отвечающее главной единице  $e$ , является одновременно лево- и правопараллельным и потому абсолютно параллельно во всех трех связностях.

2. Рассмотрим пример однородного пространства, в котором определяется связность типа (50). Пусть  $\mathfrak{A}_n$  — унитарная ассоциативная алгебра с базисом  $\{e_i\}$  и со структурными константами  $\gamma_{ij}^k$  ( $i, j, k, \dots = 1, \dots, n$ ). Возьмем за основу  $m$ -мерное вещественное векторное пространство, в котором задана алгебраическая структура с помощью  $n$  структурных аффиноров  $f_{\beta}^{\alpha}$ , определяемых матрицами

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_k^\alpha \\ \beta \\ 0 \\ \hat{\gamma}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_k & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \hat{\gamma}_k \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}_k = (\gamma_{jk}^i), \quad (73)$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, \dots, mn).$$

Линейные преобразования, сохраняющие эту структуру, образуют группу  $G$ , и матрица любого из таких преобразований имеет вид

$\lambda^s \gamma_{sj}^i$	...	$\lambda^{an+s} \gamma_{sj}^i$	...
...	...	...	...
$\lambda^{bmn+s} \gamma_{sj}^i$	...	$\lambda^{(bm+a)n+s} \gamma_{sj}^i$	...
...	...	...	...

$$(a, b, c, \dots = 1, \dots, m-1),$$

где  $\lambda^s, \lambda^{an+s}, \lambda^{bmn+s}, \lambda^{(bm+a)n+s}$  — произвольные вещественные параметры. Это — самые общие матрицы, коммутирующие со всеми матрицами (73). В группе  $G$  выделим подгруппу  $H$ , преобразования которой определяются матрицами

$a^s \gamma_{sj}^i$	0	...	0
0	$b_{11}^s \gamma_{sj}^i$	...	$b_{1, m-1}^s \gamma_{sj}^i$
...	...	...	...
0	$b_{m-1, 1}^s \gamma_{sj}^i$	...	$b_{m-1, m-1}^s \gamma_{sj}^i$

Операторами этой подгруппы являются

$$Y_k \equiv \gamma_{kj}^i \xi^j p_i, \quad Y_{(am+b)n+k} \equiv \gamma_{kj}^i \xi^{an+j} p_{bn+1}.$$

Остающиеся операторы группы  $G$  суть

$$X_{an+k} \equiv \gamma_{kj}^i \xi^j p_{an+1}, \quad X_{amn+k} \equiv \gamma_{kj}^i \xi^{an+j} p_i.$$

Из соотношений

$$\begin{aligned} (X_{an+r}, Y_k) &= -\gamma_{rk}^s X_{an+s}, \quad (X_{cn+r}, X_{(am+b)n+k}) = \delta_{ac} \gamma_{kr}^s X_{bn+s}, \\ (X_{amn+r}, Y_k) &= \gamma_{kr}^s X_{amn+s}, \quad (X_{cmn+r}, Y_{(am+b)n+k}) = -\delta_{bc} \gamma_{rk}^s X_{amn+s} \end{aligned}$$

следует, что однородное пространство  $G/H$  редуکتивно (см. [10]). Преобразование с матрицей

$$f = \begin{array}{c|ccc|c} \delta_j^i & x^{n+s} \gamma_{sj}^i & x^{2n+s} \gamma_{sj}^i & \dots & x^{(m-1)n+s} \gamma_{sj}^i \\ \hline x^{mn+s} \gamma_{sj}^i & \delta_j^i & 0 & \dots & 0 \\ \hline x^{2mn+s} \gamma_{sj}^i & 0 & \delta_j^i & \dots & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline x^{(m-1)mn+s} \gamma_{sj}^i & 0 & 0 & \dots & \delta_j^i \end{array}$$

транзитивно смещает на пространстве  $G/H$  точку общего положения. Обратная к  $f$  матрица имеет вид

$$\begin{array}{c|cc|cc|c} u^s \gamma_{sj}^i & \dots & u^{an+s} \gamma_{sj}^i & \dots & \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \hline u^{bmn+s} \gamma_{sj}^i & \dots & u^{(bm+a)n+s} \gamma_{sj}^i & \dots & \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

Поэтому форма  $df \cdot f^{-1}$  со значениями в алгебре Ли группы  $G$  имеет вид

$$\theta^{an+r} X_{an+r} + \theta^{amn+r} X_{amn+r} + \psi^r Y_r + \psi^{(am+b)n+r} Y_{(am+b)n+r}$$

где

$$\begin{aligned} \psi^r &= \gamma_{ts}^r \sum_{(c)} u^{cnn+t} dx^{cn+s}, \\ \psi^{(am+b)n+r} &= \gamma_{ts}^r u^{bn+t} dx^{amn+s}, \\ \theta^{an+r} &= \gamma_{ts}^r \sum_{(c)} u^{(cm+a)n+t} dx^{cn+s}, \\ \theta^{amn+r} &= \gamma_{ts}^r u^t dx^{amn+s}. \end{aligned} \tag{74}$$

Если ввести в рассмотрение величины

$$\begin{aligned} x^a &= x^{an+s} e_s, \quad y^a = x^{amn+s} e_s, \\ u &= u^s e_s, \quad u^a = u^{an+s} e_s, \quad v^a = u^{amn+s} e_s, \\ u^{ab} &= u^{(am+b)n+s} e_s, \end{aligned}$$

то мы будем иметь соотношения

$$u + \sum_{(a)} v^a x^a = \varepsilon, \quad u^a + \sum_{(b)} u^{ba} x^b = 0,$$

$$u y^a + v^a = 0, \quad u^b y^a + u^{ab} = \varepsilon \delta^{ab},$$

откуда

$$u = (\varepsilon - \sum y^f x^f)^{-1}, \quad u^{ab} = \varepsilon \delta^{ab} + x^b (\varepsilon - \sum y^f x^f)^{-1} y^a,$$

$$u^a = -x^a (\varepsilon - \sum y^f x^f)^{-1}, \quad v^a = -(\varepsilon - \sum y^f x^f)^{-1} y^a, \quad (75)$$

где  $\varepsilon$  — главная единица алгебры. Составляя скобки

$$(X_{an+i}, \overset{a}{\psi} Y_a), (X_{amn+i}, \overset{a}{\psi} Y_a),$$

мы найдем, что по отношению к кореперу  $\left\{ \overset{an+i}{\theta}, \overset{amn+i}{\theta} \right\}$  форма инвариантной связности пространства  $G/H$  имеет отличные от нуля компоненты

$$\omega_{an+i}^{bn+j} = -\delta_a^b \gamma_{ik}^j \psi^k + \gamma_{hi}^j \psi^{(am+b)n+k},$$

$$\omega_{amn+i}^{bmn+j} = \delta_a^b \gamma_{ki}^j \psi^k - \gamma_{ik}^j \psi^{(bm+a)n+k}. \quad (76)$$

Используя (74), (75) и (76), легко убедиться, что эта связность не имеет кручения. Подсчитаем компоненты тензора кривизны относительно корепера  $\left\{ \overset{an+i}{\theta}, \overset{amn+i}{\theta} \right\}$ . Находим

$$(d\omega_{an+i}^{bn+j} + \omega_{cn+s}^{bn+i} \wedge \omega_{an+i}^{cn+s}) e =$$

$$= \delta_a^b \sum_{(c)} \overset{cmn+t}{\theta} \wedge \overset{cn+r}{\theta} eee - \overset{bn+t}{\theta} \wedge \overset{amn+r}{\theta} eee,$$

откуда

$$R_{emnt+s, gn+r, an+i}^{bn+j} = \delta_a^b \delta_{eg}^d \gamma_{it}^j \gamma_{sr}^t + \delta_{ae} \delta_{g}^b \gamma_{rs}^j \gamma_{ti}^t.$$

Аналогично получаем

$$R_{emnt+s, gn+r, amn+i}^{bmn+j} = -\delta_a^b \delta_{eg}^d \gamma_{sr}^t \gamma_{ti}^j - \delta_e^b \delta_{ag}^d \gamma_{it}^j \gamma_{rs}^t,$$

остальные компоненты тензора кривизны равны нулю. Для компонент тензора Риччи находим выражения

$$-R_{emnt+s, an+i} = \delta_{ea} [\gamma_{is}^t \gamma_{tr}^r + (m-1) \gamma_{si}^t \gamma_{rt}^r],$$

$$-R_{an+i, emnt+s} = \delta_{ea} [\gamma_{is}^t \gamma_{rt}^r + (m-1) \gamma_{si}^t \gamma_{tr}^r].$$

С помощью тензора Риччи образуем квадратичную форму

$$-R_{\sigma\tau}\theta^{\sigma}\theta^{\tau} = \sum_{(a)} (\gamma_{ir}^r + \gamma_{ri}^r) [\gamma_{is}^t + (m-1)\gamma_{si}^t] dx^{an+i} dx^{amn+s}. \quad (66)$$

Для ряда алгебр эта форма оказывается невырожденной, и полученное симметрическое  $2n(m-1)$ -мерное пространство становится римановым. Так будет, например, в случае алгебры кватернионов. Для этой алгебры квадратичная форма (66) не вырождается. Положив  $y^a = \bar{x}^a$ , где черточка означает операцию сопряжения кватерниона  $x^a = x^{4a+1} + ix^{4a+2} + jx^{4a+3} + kx^{4a+4}$ , мы выделим в исследуемом  $8(m-1)$ -мерном пространстве поверхность  $4(m-1)$  измерений. На этой поверхности индуцируется метрика с линейным элементом

$$ds^2 = \sum_{(a)} \frac{d\bar{x}^a dx^a}{1 - \sum \bar{x}^i x^i} + \frac{\sum_{(a)} d\bar{x}^a x^a \sum_{(c)} \bar{x}^c dx^c}{(1 - \sum \bar{x}^i x^i)^2}.$$

Мы пришли к унитарному пространству постоянной кривизны над алгеброй кватернионов (см. [11], [12]).

Полученные результаты значительно упрощаются, если положенная в основу ассоциативная алгебра коммутативна. В этом случае построенная связность обладает системой  $2n$  ковариантно постоянных аффиноров  $\varphi_{\beta}^{\alpha}$ ,  $\psi_{\beta}^{\alpha}$  с ненулевыми компонентами

$$\varphi_{bn+i}^{an+i} = \delta_b^a \gamma_{jk}^i, \quad \psi_{bmn+i}^{amn+i} = \delta_b^a \gamma_{jk}^i.$$

Это означает, что в рассматриваемом  $2(m-1)n$ -мерном пространстве имеется структура, определяемая тензорным произведением алгебры  $\mathfrak{A}_n$  и алгебры двойных чисел (см. [14]). Кроме того, мы получаем систему  $n$  ковариантно постоянных тензоров  $g_{\alpha\beta}^r$ , которые симметричны и имеют отличные от нуля компоненты

$$g_{an+i, bmn+i}^r = \delta_{ab} \gamma_{ij}^r.$$

Образовав линейный элемент со значениями в  $\mathfrak{A}_n$

$$d\Sigma^2 = e^r g_{\alpha\beta}^r \theta^{\alpha} \theta^{\beta},$$

мы имеем

$$d\Sigma^2 = G_{ab} dx^a dy^b = \frac{\Sigma dx^a dy^a}{e - \Sigma x^i y^i} + \frac{\Sigma y^c x^a dx^c dy^a}{(e - \Sigma x^i y^i)^2}.$$

Если положить  $K = -\ln(\varepsilon - \sum x^f y^f)$ , то

$$G_{ab} = \frac{\partial^2 K}{\partial x^a \partial y^b}.$$

Мы пришли к вещественной реализации многообразия нуль-пар  $(m-1)$ -мерного проективного пространства над алгеброй  $\mathfrak{M}_n$  (см. [11]). Аналогично, выбирая иным способом подгруппу  $H$ , можно строить вещественные реализации других однородных пространств и пространств образов симметрии над алгеброй  $\mathfrak{M}_n$ .

3. Многочисленные геометрические приложения находят тензорные произведения двух алгебр 2-го порядка, так как 4-мерные вещественные реализации одномерных симметрических пространств над этими алгебрами используются в линейчатой геометрии 3-мерных пространств с квадратичным мероопределением. Наличие нескольких (трех) ковариантно постоянных структурных аффиноров естественным образом приводит здесь к сопутствующим структурам, позволяющим вносить в многообразии прямых либо комплексную риманову, либо келерову метрику (см. [8]). В настоящее время эти вопросы детально изучаются и обобщаются преимущественно учениками Б. А. Розенфельда (см. [4], [5], [9], а также [14], [15]).

Ряд дифференциально-геометрических применений нашли алгебра плоральных чисел и прямые суммы простейших алгебр (см. [2], [6]).

В качестве еще одного примера пространств, определяемых алгебрами, отметим 4-мерное риманово пространство с линейным элементом

$$ds^2 = b(x^1, x^2, x^3)(dx^1)^2 + 2dx^1 dx^4 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2,$$

которое обладает структурой, определяемой неприводимой коммутативной алгеброй 4-го порядка с отличными от нуля структурными константами  $\gamma_{11}^1 = \gamma_{12}^2 = \gamma_{21}^2 = \gamma_{13}^3 = \gamma_{31}^3 = \gamma_{14}^4 = \gamma_{41}^4 = \gamma_{22}^4 = \gamma_{33}^4 = 1$ . Это так называемое общее «пространство  $P$ » (см. [34]).

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д. В., Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой. АН СССР, ВИНТИ, Итоги науки, Геометрия, 1963, Москва, 1965, 165—212
2. Вишневский В. В., О комплексных структурах  $B$ -пространств. Уч. зап. Казанск. унив., 1963, 123, кн. I, 24—48.
3. Джекобсон Н., Алгебры Ли. Москва, 1964
4. Железина И. И., Линейчатая квазиневклидова геометрия как комплексная евклидова геометрия. Учен. записки МГПИ им. В. И. Ленина, 1965, 233—240
5. —, Линейчатая галилеева геометрия как дуальная евклидова геометрия. Уч. зап. МГПИ им. В. И. Ленина, 1965, 241—247

6. Нейфельд Э. Г., Геометрия конформно-аптелева пространства. Учен. записки Казанск. ун-та, 1963, 123, кн. 1, 128—140
7. Норден А. П., Пространства декартовой композиции. Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1963, № 4, 117—128
8. —, Об одном классе четырехмерных  $A$ -пространств. Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1960, № 4, 145—157
9. Пецко Н. Д., Комплексная линейчатая геометрия. Автореферат диссертации. Москва, 1965
10. Рашевский П. К., О геометрии однородных пространств. Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, 1952, вып. 9, 49—74
11. Розенфельд Б. А., Неевклидовы геометрии. М., Гостехиздат, 1955
12. —, К теории симметрических пространств ранга I. Матем. сб., 1957, 41, (83), № 3, 373—380
13. Широков А. П., Об одном классе пространств над алгебрами. Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1961, № 1, 163—170
14. —, Пространства над ассоциативными унитарными алгебрами. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1963, 123, кн. 1, 222—247
15. —, О симметрических пространствах, определяемых алгебрами. Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1963, 37, № 6, 159—171
16. Bernard D., Definition globale du tenseur de structure d'une  $G$ -structure. C. r. Acad. sci., 1958, 247, 1546—1549
17. —, Sur la géométrie différentielle des  $G$ -structures. Ann. Inst. Fourier, 1960, 10, 151—270
18. Chern S. S., Sur les métriques riemanniennes compatibles avec un réduction du groupe structural. Sémin. topol. et géom. différent. Ch. Ehresmann. Fac. sci. Paris, 1961, 2
19. Clark R. S., Bruckheimer M., Tensor structures on a differentiable manifold. Ann. Math. pura ed appl., 1961, 54, 123—141
20. —, Sur les structures presque tangents. C. r. Acad. sci., 1960, 251, 627—629
21. Elliopoulos H. A., Structures presque tangents sur les variétés différentiables. C. r. Acad. sci., 1962, 255, 1563—1565
22. Hausdorff F., Zur Theorie der Systeme komplexer Zahlen. Leipzig. Berichte, 1900, Vol. 52, 43—61
23. Jano K., Affine connections in an almost product space. Kodai Math. Semin. Repts, 1959, 11, № 1, 1—24
24. Johnson H. H., On the pseudo-group structure of analytic functions on an algebra. Proceedings of the Amer. Math. Soc., 1961, Vol. 12, № 2, 218—224
25. Libermann P., Sur les structures presque complexes et autres structures infinitésimales régulières. Bull. Soc. Math. France, 1955, 83, № 3, 195—224
26. —, Sur les structures presque quaternioniennes. C. r. Acad. Sci., 1952, 234, 1030—1032
27. Moppert C. F., On the notion of analyticity. Proc. Amer. Math. Soc., 1959, Vol. 10, 574—576
28. Nyjenhuis A.,  $X_{n-1}$ -forming sets of eigenvectors. Indagationes math., 1951, 13, № 2, 200—212
29. Ringleb F., Beiträge zur Functionentheorie in hypercomplexen Systemen. I. Rend. Circolo mat. Palermo, 1933, 57, 311—340
30. Sasaki S., On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. I. Tôhoku Math. J., 1960, 12, 459—476
31. Scheffers G., Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlich complexen Functionen. Leipzig. Berichte, 1893, 45, 828—848

32. Schouten J. A., Zur Geometrie der kontinuierlichen Transformationsgruppen. Math. Ann., 1929, 102, 244—272
  33. Spampinato N., Sulle funzioni di una variabile in un'algebra complessa ad  $n$  unità dotata di modulo. I, II, III. Rend. Circolo mat. Palermo, 1933, 57, 235—272; 1935, 59, 185—227
  34. Takeno H., Gravitational null field admitting a parallel null vector field. The space-times  $H$  and  $P$ . Tensor, 1962, 12, № 3, 197—218
  35. Tashiro Y., On contact structure of hypersurfaces in complex manifolds. I. Tôhoku Math. J., 1963, 15, 62—78
  36. Wagner R. D., The generalized Laplace equations in a function theory for commutative algebras. Duke Math. J., 1948, 15, 455—461
  37. Ward J. A., A theory of analytic functions in linear associative algebras. Duke Math. J., 1940, 7, 233—248
  38. —, From generalized Cauchy—Riemann equations to linear algebras. Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, 456—461
-