Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

S. P. Merkur'ev, An S-matrix regularization of the trace formula for a three-particle system,
Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 1976, Volume 63, 95–131

https://www.mathnet.ru/eng/znsl2052

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.91
December 16, 2025, 20:39:24

ОБ S -МАТРИЧНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ФОРМУЛЫ СЛЕДА ДЛЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ ЧАСТИЦ

С.П.Меркурьев

В настоящей работе рассматривается вопрос о выражении следа связной части резольвенты для системы трех частиц через матрицы рассеяния для систем двух и трех частиц. Доказанное здесь соотношение (I) позволяет также выразить третий групповой интеграл для статистики Больцмана в терминах S -матриц.

I. Пусть $R(z)$ - резольвента квантовомеханического оператора энергии H системы трех попарно взаимодействующих нерелятивистских бесспиновых частиц с выделенным движением центра инерции,

$$H = H_0 + \sum_{\alpha} V_\alpha \quad , \quad \alpha = 23, 31, 12$$

Здесь V_α - потенциалы взаимодействия частиц с номерами α и H_0 - оператор кинетической энергии. Пусть $R_0(z)$ - резольвента оператора H_0 и $R_\alpha(z)$, $\alpha = 23, 31, 12$ - резольвента оператора энергии H_α для системы, в которой учтено взаимодействие только α -ой пары частиц, $H_\alpha = H_0 + V_\alpha$. Все операторы действуют в гильбертовом пространстве $L_2(R^6)$. Их подробное описание можно найти в работе Л.Д.Фаддеева [I].

Связной частью резольвенты $R(z)$ называется оператор

$$R_c(z) = R(z) - R_0(z) - \sum_{\alpha} \left(R_\alpha(z) - R_0(z) \right),$$

определенный вне спектра оператора H.

Если E не является точкой дискретного спектра оператора H или операторов энергии двухчастичных подсистем h_α, $E \neq -\varkappa^2_{\alpha,i}$, $h_\alpha : L_2(R^3) \to L_2(R^3)$, то существуют пределы [2,3]

$$\Omega_\pm = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} Sp\, Im\, R_c(E \pm i\varepsilon),$$

где $Im\, R_c(z) \equiv \frac{1}{2i}\left(R_c(z) - R_c^*(z)\right)$. При этом третий групповой интеграл b_3 выражается через Ω_+ формулой [3]

$$b_3 = \frac{\sqrt{3}}{2\lambda^3} \left[\sum_i e^{-\beta \varepsilon_i} + \frac{1}{\pi} \int_{-\varkappa^2}^{\infty} e^{-\beta E}\, \Omega_+(E)\, dE \right], \quad \varkappa^2 = \max_{\alpha, i} \varkappa^2_{\alpha,i} ,$$

где ε_i - энергии связанных состояний оператора H.

Формулой следа называется соотношение, выражающее величины $\Omega_\pm$ в терминах матриц рассеяния для систем двух и трех частиц.

В ряде работ, посвященных вычислению третьего группового интеграла (см., например, [4,5,6,7]) высказывалась гипотеза, что величина Ω_+ выражается через след связной части оператора $S^*\frac{dS}{dE}$,

$$\left(S^*\frac{dS}{dE}\right)_c = S^*\frac{dS}{dE} - \sum_\alpha S_\alpha^*\frac{dS_\alpha}{dE},$$

где S – трехчастичная матрица рассеяния и S_α – матрица рассеяния для оператора H_α.

Однако, как было показано в работах В.С.Буслаева и автора [2,3], эта гипотеза является ошибочной, поскольку оператор $\left(S^*\frac{dS}{dE}\right)_c$ следа не имеет. Формула следа, в которой произведена регуляризация следа оператора $\left(S^*\frac{dS}{dE}\right)_c$ в терминах парных S-матриц, была впервые приведена в работе [3], где рассматривался вопрос о связи между третьим вириальным коэффициентом и матрицей рассеяния. Однако, ограниченный объем статьи [3] не позволил привести все вычисления в силу их громоздкости.

В настоящей работе приводятся вычисления, необходимые для доказательства формулы следа [3],

$$\Omega_+(E) = \frac{1}{2i}\,\mathrm{sp}\left(\left(S^*\frac{dS}{dE}\right)_c - A(E)\right) + \frac{1}{2i}\,\mathrm{sp}\,\tilde{A}(E), \qquad (1)$$

где операторы A и $\tilde{A}$, регуляризующие след $\left(S^*\frac{dS}{dE}\right)_c$, явно выражаются через двухчастичные матрицы рассеяния (см.(3.2) и (3.7)).

Всюду в этой работе будет предполагаться, что двухчастичные гамильтонианы h_α не имеют связанных состояний, т.е. рассеяние является абсолютно упругим. Это предположение позволит не останавливаться на второстепенных деталях. Существование неупругих каналов не отражается на виде регуляризации формулы следа и легко учитывается в рамках обычного формализма (см.[3]). Все условия на потенциалы взаимодействия из работы [3] будут считаться выполненными.

2. Напомним подготовительные соотношения из работы [3], которые используются при выводе формулы следа (1).

Пусть $T(z)$ и $T_\alpha(z)$, $\alpha = 23,31,12$ – T-матрицы для операторов энергии H и H_α, определяемые равенствами

$$T(z) = V - VR(z)V, \quad T_\alpha(z) = V_\alpha - V_\alpha R_\alpha(z)V_\alpha$$

Отметим, что ядра операторов T_α выражаются через ядра двухчастичных T-матриц $t_\alpha(k,k';z)$ посредством соотношений

$$T(P,P';z) = t_\alpha\left(k_\alpha, k'_\alpha; z - \frac{P_\alpha^2}{2h_\alpha}\right)\delta(p_\alpha - p'_\alpha); \qquad (2)$$

здесь $P = \{k_\alpha, p_\alpha\}$, $P \in R^6$ и k_α, p_α – обычные якобиевы импульсы [I].

Из уравнений Фаддеева [I] вытекает, что T-матрица $T(z)$ может быть представлена в виде суммы

$$T = \sum_\alpha T_\alpha + T_c,$$

где ядро оператора T_c является гладкой ограниченной функцией, когда переменная z изменяется вне спектра оператора H. Если $\operatorname{Im} z \to 0$, $\operatorname{Re} z > 0$, то ядро T_c приобретает сингулярности полюсного типа, которые могут быть явно выделены в виде

$$T_c(z) = -\sum_{\alpha\neq\beta} T_\alpha(z) R_0(z) T_\beta(z) + \tilde{T}(z),$$

где ядро $\tilde{T}$ имеет лишь слабые логарифмические особенности. Мы будем обращаться с ядром $\tilde{T}$ так, как если бы оно вообще не имело трехчастичных особенностей, не обсуждая здесь более подробно справедливость таких действий.

Пусть H_0 – квадратичная форма, порожденная трехчастичным оператором кинетической энергии в импульсном представлении,

$$H_0(P) \equiv \frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{P_\alpha^2}{2h_\alpha}, \quad \alpha = 23, 31, 12,$$

и $h_{\alpha 0}$ – квадратичная форма, отвечающая оператору кинетической энергии системы двух частиц, $h_{\alpha 0} = \frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha}$. Здесь m_α и h_α – приведенные массы частиц [I]. Рассмотрим поверхности $S^5_{H_0}$ и $S^2_{h_\alpha}$, определяемые уравнениями $H_0(P) = 1$ и $h_{\alpha 0} = 1$. Пусть $d\omega$ $(d\omega_\alpha)$ – элемент площади на $S^5_{H_0}$ $(S^2_{h_\alpha})$ относительно H_0 $(h_{\alpha 0})$,

$$d\omega = \sin^2\varphi_\alpha \cos^2\varphi_\alpha \, d\varphi_\alpha \wedge d\hat{k}_\alpha \wedge d\hat{p}_\alpha; \quad d\omega_\alpha = d\hat{k}_\alpha; \quad \alpha = 23, 31, 12. \qquad (C)$$

Здесь $\cos\varphi_\alpha = \frac{|k_\alpha|}{(2m_\alpha)^{1/2}} |H_0|^{-1}$; $d\hat{k}_\alpha$ $(d\hat{p}_\alpha)$ – элементы площади на единичной двумерной сфере, $\hat{k}_\alpha = |k_\alpha|^{-1} k_\alpha$, $\hat{p}_\alpha = |p_\alpha|^{-1} p_\alpha$. Пусть dP (dK_α) элемент объема в R^6 (R^3). Справедливы соотношения

$$dP = \rho_0(H_0)\, dH_0 \wedge d\omega, \quad dk_\alpha = \rho_\alpha(h_\alpha)\, dh_{\alpha 0} \wedge d\omega_\alpha,$$

где $\rho_0(H_0) = \frac{1}{2}(2m_\alpha)^{3/2}(2h_\alpha)^{3/2} H_0^2$, $\rho_\alpha(h_{\alpha 0}) = \frac{1}{2} h_{\alpha 0}^{1/2} (2m_\alpha)^{3/2}$.

Обозначим через $L_2(S^5_{H_0})$ $(L_2(S^2_{h_\alpha}))$ гильбертово пространст-

7 1522

во функций на $S^5_{H_0}$ $(S^2_{h_\alpha})$, квадратично суммируемых относительно $d\omega$ $(d\omega_\alpha)$.

Матрица рассеяния для системы трех частиц $S(E)$ действует как интегральный оператор в $L_2(S^5_{H_0})$ с сингулярным ядром

$$S(\omega,\omega';E)=\delta(\omega,\omega')-2\pi i\rho_0(E)T(E^{1/2}\omega,\ E^{1/2}\omega';\ E+i0). \tag{3}$$

Видно, что оно включает в себя все особенности ядра $T(P,P';z)$ оператора $T(z)$.

Аналогично, ядро двухчастичной матрицы рассеяния $s(E)$, $s(E):L_2(S^2_{h_\alpha})\to L_2(S^2_{h_\alpha})$ выражается через ядро двухчастичной T-матрицы формулой

$$s(\omega_\alpha,\omega_\alpha';E)=\delta(\omega_\alpha,\omega_\alpha')-2\pi i\rho_\alpha(E)t(E^{1/2}\omega_\alpha,\ E^{1/2}\omega_\alpha';\ E+i0).$$

Пусть $Q(\hat{Q})$ – оператор в $L_2(R^6)(L_2(S^5_{H_0}))$, задаваемый ядром $Q(P,P')$ $(\hat{Q}(\omega,\omega'))$. Через SpQ $(sp\hat{Q})$ в этой работе будет обозначаться след ядра

$$SpQ\equiv\int dPQ(P,P);\qquad sp\hat{Q}\equiv\int d\omega\,\hat{Q}(\omega,\omega). \tag{5}$$

Мы будем говорить при этом, что ядро $Q(\hat{Q})$ имеет след, если интеграл (5) конечен, не обсуждая существование инвариантного следа.

Положим $\mathring{T}=\sum_\alpha T_\alpha-\sum_{\alpha\neq\beta}T_\alpha R_0T_\beta$, так что $T=\mathring{T}+\tilde{T}$, где трехчастичными особенностями $\tilde{T}$ можно пренебречь. Обозначим через $\mathring{S}$ сингулярную часть матрицы рассеяния, которая возникает при подстановке в (3) оператора $\mathring{T}$ вместо оператора T.

В работе [3] была установлена следующая подготовительная формула следа:

$$\Omega_+=\frac{1}{2i}sp\left(S^*\frac{dS}{dE}-\mathring{S}^*\frac{d\mathring{S}}{dE}\right)+\Delta(E); \tag{4}$$

здесь $\Delta(E)=\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\Delta(E+i\varepsilon)$,

$$\Delta(E+i\varepsilon)=\frac{1}{2i}Sp\left(K_{H_0}(\mathring{T})-\sum_\alpha K_{H_0}(T_\alpha)\right), \tag{4'}$$

где $K_{H_0}(Q)$ – интегральный оператор с ядром

$$\rho_0^{-1}(H_0')\left(\frac{\partial}{\partial H_0}+\frac{\partial}{\partial H_0'}+\frac{\partial}{\partial E}\right)\rho_0(H_0')Q(P,P',E+i\varepsilon);\ H_0=H_0(P),\ H_0'=H_0(P').$$

Эта формула, однако, не вполне удовлетворительна, так как, хотя $\mathring{S}^*\frac{d\mathring{S}}{dE}$ и $\Delta(E)$, регуляризующие след оператора $S^*\frac{dS}{dE}$, вы-

ражаются через характеристики рассеяния, эти характеристики не сводятся к матрицам рассеяния. Точнее говоря, они содержат двухчастичные T-матрицы до четырехлинейных членов. К числу недостатков этой формулы следует отнести также то обстоятельство, что в операторе $\mathring{S}^* \frac{d\mathring{S}}{dE}$ кроме "истинно" сингулярных содержатся и регулярные члены, ядра которых имеют след.

Однако, как уже отмечалось выше, регуляризацию следа оператора $\left(S^* \frac{dS}{dE}\right)_c$ можно провести с помощью только двухчастичных матриц рассеяния (формула (1)).

Следует подчеркнуть, что если бы ядра $\left(S^* \frac{dS}{dE}\right)_c$ не имели особенностей на диагонали, в подготовительной формуле (4) можно было бы использовать предельное равенство $\varepsilon(x^2+\varepsilon^2)^{-1} \longrightarrow \pi\delta(x)$. В результате мы получили бы формулу следа $\Omega_+ = (2i)^{-1} sp\left(S^* \frac{dS}{dE}\right)_c$, которая предполагалась верной в работах [4,5,6,7] (ср.[3]). Из-за наличия особенностей в ядре $\left(S^* \frac{dS}{dE}\right)_c$ (и $K_{H_0}(\mathring{T})$) формальный предельный переход $\varepsilon(x^2+\varepsilon^2)^{-1} \to \pi\delta(x)$ невозможен. Аккуратный учет этих особенностей приводит к модифицированной формуле (1).

Вывод формулы (1) будет проведен по следующему плану. Сначала из оператора $\mathring{S}^* \frac{d\mathring{S}}{dE}$ будут отделены слагаемые, имеющие след (лемма 2.1). Все эти слагаемые в лемме 2.1 будут выражены в терминах ядер T_α и $Q_{\alpha\beta} \equiv T_\alpha R_0 T_\beta$. Получим формулу следа

$$\Omega_+(E) = \frac{1}{2i} sp\left(\left(S^* \frac{dS}{dE}\right)_c - A^{(1)}(E)\right) + \frac{1}{2i} \Delta^{(1)}(E), \tag{5}$$

где

$$\Delta^{(1)}(E) = \Delta(E) - \frac{1}{2i} sp\left(\mathring{S}^* \frac{d\mathring{S}}{dE} - \sum_\alpha S_\alpha^* \frac{dS_\alpha}{dE} - A^{(1)}(E)\right). \tag{6}$$

Величина $\Delta^{(1)}(E)$ вычисляется в лемме 2.2. В разделе 3 вводится явно выраженный через парные S-матрицы оператор $A(E)$, для которого разность $A - A^{(1)}$ имеет след. В результате устанавливается формула следа (1), где

$$sp\,\tilde{A} = sp\left(A(E) - A^{(1)}(E)\right) + \Delta^{(1)}(E).$$

В теореме 3.1 показывается, что след $sp\,(A - A^{(1)})$ с точностью до слагаемого $-\Delta^{(1)}$ выражается в терминах двухчастичных матриц рассеяния.

2. Вычисление $\Delta^{(1)}(E)$

Рассмотрим оператор $\mathring{S}^* \frac{d\mathring{S}}{dE}$, регуляризующий след в формуле

(4). Этот оператор равен линейной комбинации произведений парных T -матриц T_γ (и сопряженных к ним) до четырехлинейных членов. Будем называть такие m -линейные произведения однородными T - полиномами, а их линейные комбинации при $m \leqslant nT$ - полиномами n -ой степени.

Введем в рассмотрение оператор

$$A^{(1)}(E) = 2\pi i\, B^{(1)}(E) + C(E), \qquad (2.1)$$

где

$$B(E) = \sum_{\alpha \neq \beta} \left(\hat{Q}^*_{\alpha\beta} \frac{d}{dE} S_\alpha S_\beta - (S^*_\alpha + S^*_\beta - I) \frac{d}{dE} \hat{Q}_{\alpha\beta} \right),$$

$$C(E) = \sum_{\alpha \neq \beta} (S^*_\alpha - I) \frac{dS_\beta}{dE} .$$

Здесь I - тождественное преобразование $L_2(S^5_{H_0})$, через $\hat{Q}_{\alpha\beta}$ обозначен вклад ядра $Q_{\alpha\beta}$ в S -матрицу, определяемый формулой (3); S_α - матрица рассеяния для оператора H_α. Ядро S_α выражается через двухчастичную S -матрицу в соответствии с (2) и (3).

Лемма 2.1. При $E > 0$ ядро оператора

$$\left(S^* \frac{dS}{dE} \right)_c - A^{(1)}(E)$$

имеет след.

След слагаемых $\mathring{S}^* \frac{d\mathring{S}}{dE}$, которые входят в оператор (6), представляется в виде интегралов с одним или двумя сингулярными знаменателями вида

$$(H_0(p_{\gamma_1}, p_{\gamma_2}) - z)^{-1}, \qquad \gamma_1 \neq \gamma_2,$$

где через $H_0(p_{\gamma_1}, p_{\gamma_2})$ обозначена квадратичная форма оператора кинетической энергии, выраженная в терминах якобиевых импульсов p_{γ_1} и p_{γ_2} [3]. С помощью подходящего выбора гиперсферических координат на $S^5_{H_0}$ (см. (С)) рассматриваемый след можно записать в виде повторных интегралов типа Коши. Лемма (6.3) вытекает тогда из результатов [8].

Замечание. Слагаемые $A^{(1)}(E)$ четвертой степени $-Q^*_{\alpha\beta} \frac{d}{dE} \hat{T}_\alpha \hat{T}_\beta$, где $\hat{T} = \frac{i}{2\pi}(S_\alpha - I)$, являются сингулярными частями операторов $\hat{Q}_{\alpha\beta} \frac{d}{dE} \hat{Q}_{\alpha\beta}$. При рассмотрении следа остатка

$$sp\left(\hat{Q}^*_{\alpha\beta} \left(\frac{d}{dE} \hat{Q}_{\alpha\beta} + \frac{d}{dE} \hat{T}_\alpha \hat{T}_\beta \right) \right) \qquad (2.2)$$

необходимо учесть соотношение

$$2\pi i\,\delta(H_0-E)=(H_0-E-i0)^{-1}-(H_0-E+i0)^{-1}.$$

После этого сингулярные знаменатели под интегралами (2.2) приобретают вид $(k'^2-k^2-i0)^{-2}$. С помощью интегрирования по частям эти интегралы можно привести к интегралам типа Коши.

Подчеркнем, что ядро оператора $A^{(1)}$ на диагонали сингулярно, так что оператор $A^{(1)}$ следа не имеет. Ядра слагаемых второй степени $\hat{T}_\alpha^*\frac{d\hat{T}_\beta}{dE}$ имеют особенности типа $(\delta(x))^2$, ядра остальных слагаемых – особенности типа $(x\pm i0)^{-1}\delta(x)$, $x\in R^1$. Взаимных сокращений этих бесконечных членов, вообще говоря, не происходит. (Мы использовали здесь наглядное описание сингулярностей в эвристических целях).

Обозначим через $\Delta^{(1)}(E+i\varepsilon)$ слагаемые $\Delta(E+i\varepsilon)$, которые в пределе $\varepsilon\downarrow 0$ порождают величину $\Delta^{(1)}$ из (5). Мы проведем перестройку этих слагаемых и вычислим величину $\Delta^{(1)}(E)$, выразив ее через пределы T-матриц $T_\alpha(E\pm i0)$.

Отметим, что след $\Delta(E+i\varepsilon)$ содержит также члены, которые выдерживают формальный предельный переход $\varepsilon\downarrow 0$, использующий равенство

$$\varepsilon R_0R_0^*=\frac{\varepsilon}{(H_0-E)^2+\varepsilon^2}\longrightarrow\pi\,\delta(H_0-E). \tag{2.3}$$

Их пределы равны второму слагаемому (6).

Согласно (4′) след $\Delta^{(1)}(E+i\varepsilon)$ имеет вид

$$\Delta^{(1)}=\Delta^{(4)}+\Delta^{(3)}+\Delta^{(3)}_*+\sum_{i=1}^{2}\Delta^{(2)}_i, \tag{2.4}$$

где $\Delta^{(4)}$ – след однородных T-полиномов четвертой степени

$$\Delta^{(4)}=(2i\varepsilon)^3\sum_{\alpha\neq\beta}Sp\,R_0R_0^*Q^*_{\alpha\beta}R_0R_0^*\nabla_{H_0}(T_\alpha R_0R_0^*T_\beta);$$

$\Delta^{(3)}$ и $\Delta^{(3)}_*$ – следы двух типов T-полиномов третьей степени

$$\Delta^{(3)}=-(2i\varepsilon)^2\sum_{\alpha\neq\beta}Sp\,R_0R_0^*(T^*_\alpha R_0R_0^*\nabla_{H_0}Q_{\alpha\beta}+T^*_\beta R_0R_0^*\nabla_{H_0}Q_{\alpha\beta}),$$

$$\Delta^{(3)}_*=-(2i\varepsilon)^2\sum_{\alpha\neq\beta}Sp\,R_0R_0^*(Q^*_{\alpha\beta}R_0R_0^*\nabla_{H_0}T_\alpha+Q^*_{\alpha\beta}R_0R_0^*\nabla_{H_0}T_\beta);$$

и $\Delta^{(2)}_1$ и $\Delta^{(2)}_2$ – следы двух типов слагаемых второй степени

$$\Delta^{(2)}_1=-2i\varepsilon\sum_{\alpha\neq\beta}Sp\,R_0R_0^*\nabla_{H_0}Q_{\alpha\beta},$$

$$\Delta_2^{(2)} = -(2i\varepsilon)^2 \sum_{\alpha\neq\beta} \mathrm{Sp}\, R_0 R_0^* T_\alpha^* R_0 R_0^* \nabla_{H_0} T_\beta .$$

След $\Delta^{(1)}(E+i\varepsilon)$ будет преобразован в два этапа. Сначала $\Delta^{(1)}(E+i\varepsilon)$ будет записан в виде суммы следов однородных T-полиномов, каждый из которых имеет конечный предел при $\varepsilon\downarrow 0$ (лемма 2.2). Затем полученное выражение будет перестроено в компактную формулу, которая используется далее для вычисления операторов $\hat{A}$ и $\tilde{A}$ (Лемма 2.3).

Наметим путь рассуждений, которые проводятся на первом этапе. В каждом слагаемом (2.4) имеются выражения вида

$$\frac{\varepsilon^2}{(x^2+\varepsilon^2)^2}, \qquad \frac{\varepsilon}{(x^2+\varepsilon^2)(x\pm i\varepsilon)}, \qquad x\in R^1,$$

которые при формальном предельном переходе $\varepsilon\downarrow 0$ порождают расходимости типа $(\delta(x))^2$ и $\delta(x)(x\pm i0)$. В силу тождества

$$2i\varepsilon(x^2+\varepsilon^2)^{-1} = (x-i\varepsilon)^{-1} - (x+i\varepsilon)^{-1} \qquad (\varepsilon)$$

Из слагаемых (2.4) можно отделить члены, содержащие неопределенные при $\varepsilon\downarrow 0$ знаменатели

$$[(x+i\varepsilon)(x-i\varepsilon)]^{-1}$$

и знаменатели $(x\pm i\varepsilon)^{-2}$, которые при $\varepsilon\downarrow 0$ стремятся к обобщенным функциям $(x\pm i0)^{-2}$. Используя циклическую перестановочность операторов под знаком следа и применяя тождество Гильберта, можно показать, что слагаемые (2.4), отвечающие функциям $(x^2+\varepsilon^2)^{-1}$ взаимно уничтожаются при $\varepsilon\neq 0$. Остальные слагаемые имеют конечные пределы при $\varepsilon\downarrow 0$. Отметим, что упомянутые сокращения происходят как среди следов однородных T-полиномов одинаковой степени, так и среди следов T-полиномов различных степеней, которые могут быть приведены друг к другу с помощью тождества Гильберта.

Следует подчеркнуть, что описанный выше механизм сокращений бесконечных частей не действует в случае оператора $A^{(1)}(E)$, поскольку $A^{(1)}(E)$ следа не имеет.

Сделаем замечание о свойствах операторов T_α $(\alpha = 23, 31, 12)$, которые играют важную роль при вычислении предела $\Delta^{(1)}(E)$.

С помощью дифференцирования тождества Гильберта [1] для парных T-матриц легко получить тождества вида

$$2i\varepsilon \frac{\partial}{\partial k_\alpha^{(1)}} t_\alpha r_{\alpha 0} r_{\alpha 0}^* t_\alpha^* = \left(\frac{\partial}{\partial k_\alpha^{(2)}} t_\alpha\right)^* - \frac{\partial}{\partial k_\alpha^{(1)}} t_\alpha ,$$

$$2i\varepsilon \frac{\partial}{\partial k_\alpha^{(2)}} t_\alpha r_{\alpha 0} r_{\alpha 0}^* t_\alpha^* = \left(\frac{\partial}{\partial k_\alpha^{(1)}} t_\alpha\right)^* - \frac{\partial}{\partial k_\alpha^{(2)}} t_\alpha .$$

Здесь $\tau_{\alpha 0}=(h_{\alpha 0}-z)^{-1}$ и через $\frac{\partial Q}{\partial h_\alpha^{(i)}}$ $(i=1,2)$ обозначена производная по i -му энергетическому аргументу ядра Q. Например,

$$\frac{\partial}{\partial h_\alpha^{(2)}} Q(k_\alpha, k_\alpha') \equiv \frac{\partial}{\partial h_{\alpha 0}(k_\alpha')} Q(k_\alpha, k_\alpha').$$

Эти тождества порождают аналогичные соотношения для ядер T_α. Так, справедливы равенства

$$2i\varepsilon T_\alpha^* R_0 R_0^* \frac{\partial}{\partial H_2}(T_\alpha R_0 R_0^* T_\beta) = \frac{\partial}{\partial H_2}((T_\alpha^* - T_\alpha) R_0 R_0^* T_\beta),$$

$$2i\varepsilon \frac{\partial}{\partial H_1}(T_\alpha R_0 T_\beta R_0 R_0^* T_\beta^*) = \frac{\partial}{\partial H_1}(T_\alpha R_0 (T_\beta^* - T_\beta)),$$

где через $\frac{\partial Q}{\partial H_k}$ обозначен оператор, задаваемый ядром, продифференцированным по k -му энергетическому аргументу $H_0(P)$ или $H_0(P')$. Можно выписать множество подобных равенств, которые получаются с помощью подходящих дифференцирований тождества Гильберта для ядер $t_\alpha(k_\alpha, k_\alpha'; z)$. Значение этих формул состоит в том, что они позволяют понижать степени T -полиномов. В каждом конкретном случае будет ясно, каким образом они получены из исходного тождества [1].

Обозначим через $G=G(E)$ операцию формального умножения ядер $Q(P, P')$ интегральных операторов Q на δ -функцию $\delta(H-E)$:

$$GQ \sim \delta(H_0(P)-E) Q(P, P').$$

Аналогично, под $R_\pm = R_\pm(E)$ будет пониматься операция умножения ядер на функции $(H_0(P)-E\mp i0)^{-1}$.

Лемма 2.2. Имеет место представление

$$\Delta^{(1)}(E) = \tilde{\Delta}_1^{(3)} + \tilde{\Delta}_2^{(3)} + \tilde{\Delta}_1^{(2)} + \tilde{\Delta}_2^{(2)}, \tag{2.5}$$

в котором $\tilde{\Delta}_1^{(3)}$ и $\tilde{\Delta}_2^{(3)}$ - следы однородных T -полиномов третьей степени, определяемые равенствами

$$\tilde{\Delta}_1^{(3)} = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} Sp\, T_\alpha^{(-)} G \left[\nabla_{H_0}(T_\alpha^{(+)} R_+ T_\beta^{(+)}) R_+ - \nabla_{H_0}(T_\alpha^{(+)} R_- T_\beta^{(+)}) R_-\right],$$

$$\tilde{\Delta}_2^{(3)} = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} Sp\, G\, T_\beta^{(-)} \left[R_+ \nabla_{H_0}(T_\alpha^{(+)} R_+ T_\beta^{(+)}) - R_- \nabla_{H_0}(T_\alpha^{(+)} R_- T_\beta^{(+)})\right],$$

и $\tilde{\Delta}_1^{(2)}$ и $\tilde{\Delta}_2^{(2)}$ - следы однородных T -полиномов второй степени, равные

$$\tilde{\Delta}_1^{(2)} = \sum_{\alpha\neq\beta} Sp\left[R_+\nabla_{H_0}\left(T_\alpha^{(+)}R_+T_\beta^{(+)}\right) - R_-\nabla_{H_0}\left(T_\alpha^{(+)}R_-T_\beta^{(+)}\right)\right],$$

$$\tilde{\Delta}_2^{(2)} = \sum_{\alpha\neq\beta} Sp\left[R_-T_\beta^{(-)}R_-\nabla_{H_0}T_\alpha^{(+)} - R_+T_\beta^{(-)}R_+\nabla_{H_0}T_\alpha^{(+)}\right].$$

Здесь через $T_\alpha^{(\pm)}$ обозначены операторы $T_\alpha(E\pm i0)$.

Доказательство. Рассмотрим след однородного T-полинома четвертой степени $\Delta^{(4)}$. Почленно дифференцируя последний множитель под знаком следа,

$$\nabla_{H_0}\left(T_\alpha R_0 R_0^* T_\beta\right) = \left[\frac{\partial}{\partial H_1}T_\alpha R_0 R_0^* T_\beta + \frac{\partial}{\partial E}\left(T_\alpha R_0 R_0^*\right)T_\beta\right] + \left[\frac{\partial}{\partial H_2}\left(T_\alpha R_0 R_0^* T_\beta\right) + T_\alpha R_0 R_0^* \frac{\partial}{\partial E}T_\beta\right], \tag{2.6}$$

разобъем $\Delta^{(4)}$ соответственно (2.6) на два слагаемых.

В слагаемом $\Delta^{(4)}$, которое порождается первым членом (2.6), можно изменить порядок операторов под знаком следа и применить тождество Гильберта для операторов T_β. (В дальнейшем мы не останавливаемся на деталях, относящихся к подобным перестановкам операторов под знаком следа. В конкретных случаях всегда будет ясно, как следует расположить операторы, чтобы применить тождество Гильберта). Слагаемое $\Delta^{(4)}$ запишется в виде следа однородного T-полинома третьей степени

$$-(2i\varepsilon)^2 Sp\sum_{\alpha\neq\beta} R_0^* T_\alpha^* \left[\left(\frac{\partial}{\partial H_1}+\frac{\partial}{\partial E}\right)T_\alpha R_0 R_0^*\right]\left(T_\beta^* - T_\beta\right). \tag{2.7}$$

В слагаемом $\Delta^{(4)}$, отвечающем второму члену (2.6), можно применить тождество Гильберта для оператора T_α и представить его в виде

$$-(2i\varepsilon)^2 \sum_{\alpha\neq\beta} Sp\, T_\beta^* R_0^*\left(T_\alpha^* - T_\alpha\right)R_0 R_0^*\left(\frac{\partial}{\partial H_2}+\frac{\partial}{\partial E}\right)T_\beta. \tag{2.8}$$

Рассмотрим след $\Delta_*^{(3)}$ членов третьей степени, С помощью равенств

$$\nabla_{H_0}T_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial H_1}+\frac{\partial}{\partial E}\right)T_\alpha + \frac{\partial}{\partial H_2}T_\alpha, \tag{2.9}$$

$$\nabla_{H_0}T_\beta = \left(\frac{\partial}{\partial H_2}+\frac{\partial}{\partial E}\right)T_\beta + \frac{\partial}{\partial H_1}T_\beta, \tag{2.10}$$

запишем его в виде четырех групп слагаемых. В членах, содержащих операторы $\frac{\partial}{\partial H_2}T_\alpha$, можно применить тождество Гильберта для операторов T_α и представить их в виде следа T-полиномов второй степени.

$$(2i\varepsilon)\sum_{\alpha\neq\beta} Sp\, R_0 R_0^* \frac{\partial}{\partial H_2} T_\beta^* R_0^* (T_\alpha^* - T_\alpha). \qquad (2.11)$$

Аналогично, слагаемые, которые возникают от оператора $\frac{\partial}{\partial H_1} T_\beta$, можно записать в виде

$$(2i\varepsilon)\sum_{\alpha\neq\beta} Sp\, R_0^* \frac{\partial}{\partial H_1} (T_\beta^* - T_\beta) R_0 R_0^* T_\alpha. \qquad (2.12)$$

Соберем вместе представления (2.7)-(2.11) для слагаемых $\Delta^{(4)}$ и $\Delta_*^{(3)}$. Замечая, что слагаемые (2.7) и (2.8), содержащие по два сопряженных к T-матрице оператора, сокращаются со слагаемыми $\Delta_*^{(3)}$, которые порождаются первыми членами (2.9) и (2.10), приходим к следующему представлению:

$$\Delta^{(4)} + \Delta_*^{(3)} = \Delta_1^{(3)} + \Delta_2^{(3)} + \Delta^{(2)} + \delta\Delta^{(4)}. \qquad (2.13)$$

Здесь $\Delta_1^{(3)}$ и $\Delta_2^{(3)}$ равны слагаемым(2.7) и (2.8), которые отвечают операторам T_β и T_α в круглых скобках. Далее, величина $\Delta^{(2)}$ равна сумме следов (2.11) и (2.12), а величина $\delta\Delta^{(4)}$ равна слагаемому (2.7), в котором имеются два сопряженных к T-матрице оператора и производная $\frac{d}{dE} R_0 R_0^*$.

Преобразуем выражения (2.7) и (2.8) для слагаемых $\Delta_1^{(3)}$ и $\Delta_2^{(3)}$, дополняя производные ядер под знаком следа до символа ∇_{H_0} и понижая степень T-полиномов в остатке с помощью тождества Гильберта. В соответствии с этим планом оператор $[(\frac{\partial}{\partial H_1} + \frac{\partial}{\partial E}) T_\alpha R_0 R_0^*] T_\beta$ записывается в виде

$$\nabla_{H_0}(T_\alpha R_0 R_0^* T_\beta) - T_\alpha R_0 R_0^* (\frac{\partial}{\partial H_2} + \frac{\partial}{\partial E}) T_\beta \qquad (2.14)$$

и в слагаемом $\Delta_1^{(3)}$, которое порождается вторым членом (2.14) используется тождество Гильберта для оператора T_α. Аналогично получаем представление

$$(\frac{\partial}{\partial H_1} + \frac{\partial}{\partial E}) T_\alpha R_0 R_0^* T_\beta = \nabla_{H_0}(T_\alpha R_0 R_0^* T_\beta) - [(\frac{\partial}{\partial H_1} + \frac{\partial}{\partial E}) T_\alpha R_0 R_0] T_\beta \qquad (2.15)$$

и применяем в слагаемом $\Delta_2^{(3)}$, отвечающем второму члену (2.15) тождество Гильберта для T_β.

Рассмотрим след $\delta\Delta^{(4)}$ из (2.13). С помощью тождества Гильберта для ядер T_α запишем его в виде следа T-полинома второй степени

$$-2i\varepsilon \sum_{\alpha\neq\beta} Sp\, T_\beta^* R_0^* (T_\alpha^* - T_\alpha) \frac{d}{dE} R_0 R_0^* \qquad (2.16)$$

В слагаемых (2.16) с двумя сопряженными к T -матрице операторами перейдем к дифференцированию функции $\frac{\partial}{\partial E}\left((H_0(P)-E)^2+\varepsilon^2\right)^{-1}$ по H_0 и проинтегрируем относительно H_0 по частям. Найдем, что эти слагаемые равны величине

$$2i\varepsilon\sum_{\alpha\neq\beta} Sp\, R_0 R_0^* \left(\frac{\partial}{\partial H_1}+\frac{\partial}{\partial H_2}\right) T_\beta^* R_0^* T_\alpha^* . \qquad (2.17)$$

учитывая (2.17), имеем

$$\Delta^{(2)}+\delta\Delta^{(4)} = 2i\varepsilon\sum_{\alpha\neq\beta} Sp\, T_\alpha^* R_0^* \left[\left(\frac{\partial}{\partial H_1}+\frac{\partial}{\partial H_2}\right) T_\beta R_0 R_0^* + T_\beta \frac{\partial}{\partial E} R_0 R_0^*\right], \qquad (2.18)$$

поскольку члены $\Delta^{(2)}$ с двумя сопряженными к T -матрицам операторами взаимно уничтожаются. Наконец, объединяя представления для величин $\Delta_1^{(3)}$ и $\Delta_2^{(3)}$, которые порождаются формулами (2.14) и (2.15), с равенством (2.18), получаем соотношение

$$\Delta^{(4)}+\Delta_*^{(3)} = \Delta_{11}^{(3)}+\Delta_{12}^{(3)}+\Delta_{11}^{(2)}+\Delta_{12}^{(2)}, \qquad (2.19)$$

где в правой части введены следующие обозначения:

$$\Delta_{11}^{(3)}+\Delta_{12}^{(3)} = -(2i\varepsilon)^2\sum_{\alpha\neq\beta} Sp\left[R_0^* T_\alpha^* R_0 R_0^* + R_0 R_0^* T_\beta^* R_0^*\right]\nabla_{H_0}\left(T_\alpha R_0 R_0^* T_\beta\right),$$

$$\Delta_{11}^{(2)} = -(2i\varepsilon)\sum_{\alpha\neq\beta} Sp\, R_0^* \nabla_{H_0}\left(T_\alpha R_0 R_0^* T_\beta\right),$$

$$\Delta_{12}^{(2)} = 4i\varepsilon\sum_{\alpha\neq\beta} Sp\, R_0^* T_\alpha^* R_0 R_0^* \nabla_{H_0} T_\beta .$$

Заметим теперь, что каждому члену (2.19) отвечает определенная величина из совокупности $\Delta^{(3)}$, $\Delta_1^{(2)}$, $\Delta_2^{(2)}$ слагаемых (2.4) с аналогичной комбинацией T -матриц. Соответствующие слагаемые отличаются друг от друга только различными комбинациями операторов R_0 и R_0^*.

Под знаками следов $\Delta^{(3)}$ и $\Delta_1^{(2)}$ имеются операторы R_0 и $R_0 R_0^*$, разделенные T -матрицами и сопряженными к ним. В операторах из $\Delta_{11}^{(3)}$, $\Delta_{12}^{(3)}$ и $\Delta_{11}^{(2)}$ на аналогичных местах стоят операторы $R_0 R_0^*$ и R_0^*, причем операторам R_0 из (2.4) отвечают операторы $R_0 R_0^*$ из (2.19) а операторам R_0^* из (2.19) - $R_0 R_0^*$ из (2.4).

Рассмотрим сумму указанных слагаемых (2.4) и (2.19). С помощью тождества

$$2i\varepsilon R_0 R_0^* = R_0 - R_0^* \qquad (2.20)$$

раскроем операторы $R_0 R_0^*$, отвечающие операторам R_0 и R_0^*. Слагаемые, содержащие резольвенты R_0 и R_0^*, разделенные T-матрицами, взаимно уничтожатся. Останутся только слагаемые, в которых

имеется по два разделенных оператора R_0 или R_0^*. (Кроме того, T - полиномы третьей степени содержат операторы $\varepsilon R_0 R_0^*$). Переходя в этих слагаемых к пределу $\varepsilon \downarrow 0$, получим три первых члена из (2.5).

Используя (2.20) раскроем все операторы $R_0 R_0^*$ в сумме $\Delta_2^{(2)}$ и $\Delta_{12}^{(2)}$. Производя очевидные сокращения среди возникших слагаемых, придем к четвертому члену (2.5).

На основании результатов [8] можно убедиться, что каждое слагаемое (2.5) конечно.

Лемма 2.2 доказана.

Заметим, что ядра операторов (2.5), стоящих в квадратных скобках, имеют вид

$$\frac{f(x)}{(x-i0)^n} - \frac{f(x)}{(x+i0)^n}, \qquad n = 2,3.$$

С помощью равенства

$$(x-i0)^{-n} - (x+i0)^{-n} = (-1)^{n-1} 2\pi i \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \delta(x) \qquad (8)$$

аргументы этих ядер можно локализовать в окрестности энергетической поверхности. В этом плане величина $\Delta^{(1)}(E)$ преобразуется в лемме 2.3.

В дальнейшем нам понадобятся выражения производных функций $f(H_0^{1/2}\omega)$ относительно $H_0(P)$ через производное функций $f(P)$ $P = H_0^{1/2}\omega$, по переменным типа k и p . Нетрудно доказать справедливость следующего утверждения.

Предложение 2.I. Пусть $f(P)$ - дифференцируемая функция переменной P , $P \in R^6$. Если $H_0(P) \neq 0$, то имеют место равенства

$$\frac{\partial f(H_0^{1/2}\omega)}{\partial H_0} = \frac{k_\alpha^2}{H_0} \frac{\partial}{\partial k_\alpha^2} \tilde{f}(k_\alpha, p_\alpha) + \frac{p_\alpha^2}{H_0} \frac{\partial}{\partial p_\alpha^2} \tilde{f}(k_\alpha, p_\alpha), \qquad (k)$$

$$\frac{\partial f(H_0^{1/2}\omega)}{\partial H_0} = \frac{p_\alpha^2}{H_0} \frac{\partial}{\partial p_\alpha^2} \hat{f}(p_\alpha, p_\beta) + \frac{p_\beta^2}{H_0} \frac{\partial}{\partial p_\beta^2} \hat{f}(p_\alpha, p_\beta). \qquad (p)$$

Здесь $H_0 = H_0(P)$, $\tilde{f}(k,p) = f(P(k,p))$ и $\hat{f}(p_\alpha, p_\beta) = f(P(p_\alpha, p_\beta))$. В формуле (k) дифференцирование относительно $k_\alpha(p_\alpha)$ ведется при фиксированных $\hat{k}_\alpha = |k_\alpha|^{-1} k_\alpha$ и p_α ($\hat{p}_\alpha$ и k_α) . В формуле (p) при дифференцировании по $p_\alpha(p_\beta)$ считаются постоянными переменные $\hat{p}_\alpha$ и p_β ($\hat{p}_\beta$ и p_α).

Рассмотрим ядро $\frac{\partial}{\partial E} S_\alpha(\omega, \omega'; E)$ оператора $\frac{d}{dE} S_\alpha(E)$. Ис-

пользуя (k) , получаем

$$\frac{\partial}{\partial E} S_\alpha(\omega,\omega';E) = \delta(p_\alpha - p'_\alpha)\frac{h_\alpha}{E}\nabla_{h_\alpha} t_\alpha(k_\alpha,k'_\alpha;E-\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha}+i0),$$

где через $\nabla_E t_\alpha$ обозначено ядро

$$\nabla_E t_\alpha(k_\alpha,k'_\alpha;E-\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha}+i0) = \Big(\frac{1}{2E} + \frac{h_\alpha}{E}\frac{\partial}{\partial h_\alpha} + \frac{h'_\alpha}{E}\frac{\partial}{\partial h'_\alpha} +$$
$$+ (1-\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha E})\Big) t_\alpha(k_\alpha,k'_\alpha;E-\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha}+i0); \quad h_\alpha = \frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha}, \; h'_\alpha = \frac{k_\alpha'^2}{2m_\alpha}. \tag{2.21}$$

Отметим, что при $H_0(P) = H_0(P') = E$ имеет место равенство $\nabla_E t_\alpha = (-\frac{3}{2E} + \nabla_{H_0}) t_\alpha$. Продолжим оператор $\frac{d}{dE} S_\alpha(E)$ с энергетической поверхности, сопоставляя ему оператор $\nabla_E T_\alpha^{(+)} : L_2(R^6) \to L_2(R^6)$, задаваемый ядром

$$\nabla_E T_\alpha^{(+)}(P,P';E) = \delta(p_\alpha - p'_\alpha)\nabla_E t_\alpha(k_\alpha,k'_\alpha;E-\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha}+i0).$$

Заметим, что с помощью символов $T_\alpha^{(\pm)}$, $\nabla_E T_\alpha^{(\pm)}$ и $G(E)$ можно описывать любые комбинации операторов $\frac{d}{dE} S_\alpha$ и S_α $(\alpha = 23, 31, 12)$. Например, ядро произведения $\hat{T}_\beta \frac{d}{dE} S_\alpha$ можно представить в виде

$$(\hat{T}_\beta \frac{d}{dE} S_\alpha)(\omega,\omega';E) = -2\pi i \rho_0(E)(T_\beta^{(+)} G \nabla_E T_\alpha^{(+)})(P,P',E), \tag{2.22}$$

где $H_0 = H_0' = E$.

Переходя в тождествах Гильберта для операторов T_α к пределу $\varepsilon \downarrow 0$, получим аналогичные тождества для операторов $T_\alpha^{(\pm)}$. Их взаимное соответствие устанавливается путем замен $T_\alpha^* \leftrightarrow T_\alpha^{(-)}$, $T_\alpha \leftrightarrow T_\alpha^{(+)}$, $\varepsilon R_0 R_0^* \longleftrightarrow \pi G$. Такие формулы для $T_\alpha^{(\pm)}$ мы также будем называть тождествами Гильберта.

Далее мы часто обозначаем $T_\alpha^{(+)} \equiv T_\alpha$, $T_\alpha^{(-)} \equiv T_\alpha^*$. Это не вызывает недоразумений, так как операторы $T_\alpha(E \pm i\varepsilon)$ при $\varepsilon \neq 0$ ниже не фигурируют.

Лемма 2.3. Имеет место формула

$$\Delta^{(1)} = \delta\Delta^{(3)} + \delta\Delta^{(2)}, \tag{2.23}$$

где

$$\delta\Delta^{(3)} = (2\pi i)^2 \sum_{\alpha\neq\beta} Sp\,(T_\alpha^* G \nabla_E T_\alpha \frac{dG}{dE} T_\beta + G T_\beta^* \frac{dG}{dE} T_\alpha \nabla_E T_\beta),$$
$$\delta\Delta^{(2)} = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} Sp\, T_\beta^* \frac{dG}{dE} \nabla_E T_\alpha, \tag{2.24}$$

а символ $\frac{dG}{dE}$ означает операцию умножения на функцию $\frac{\partial}{\partial E}\delta(H_0-E)$.

Подчеркнем, что величина $\Delta^{(1)}$ не выражается в терминах S-матриц, хотя аргументы ядер T-матриц и их производных локализованы в окрестности энергетической поверхности. Наличие производной $\frac{dG}{dE}$ требует задания T-матриц и вне энергетической поверхности.

Доказательство леммы 2.3. Выкладки проводятся по следующей схеме. Каждое слагаемое (2.5) записывается в виде суммы членов, в каждом из которых имеется производная только одного ядра t_α или $R_0(R_0^*)$ (Исключение составляет случай $\tilde{\Delta}_2^{(2)}$, см. формулу (2.37)). Затем из производных ядер t_α образуются выражения $\nabla_E T_\alpha$. Степень возникающих при этом в остатке T-полиномов понижается с помощью тождества Гильберта. В результате выделяются величины $\delta\Delta^{(3)}$, $\delta\Delta^{(2)}$ и выписывается дефект, равный сумме следов T-полиномов второй степени. Слагаемые этого дефекта приводятся к такому виду, чтобы их сокращение стало очевидным.

Рассмотрим ядра операторов $\nabla_{H_0}T_\alpha R_\pm T_\beta$. Учитывая (k), представим эти ядра в виде суммы

$$\nabla_{H_0}(T_\alpha R_\pm T_\beta) = \sum_{i=1}^{3} Q^{(\pm)}_{\alpha\beta,i} \tag{2.25}$$

Операторы $Q^{(\pm)}_{\alpha\beta,1}$ содержат производные ядра t_α:

$$Q^{(\pm)}_{\alpha\beta,1}(P,P';E) = \Big[\frac{1}{2H_0'} + \frac{\bar{h}_\alpha}{H_0}\frac{\partial}{\partial h_\alpha^{(1)}} + \frac{\bar{h}_\alpha}{H_0}\frac{\partial}{\partial \bar{h}_{\alpha 2}} + \frac{\bar{h}'_\beta}{H_0'}\frac{\partial}{\partial \bar{h}'_{\beta 2}} +$$
$$+\left(1-\frac{\bar{h}_\alpha}{H_0}\right)\frac{\partial}{\partial E}\Big] t_\alpha\left(k_\alpha, k'_{\alpha\beta}: E-\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha}\right)\left(H_0(p_\alpha,p'_\beta)-E\mp i0\right)^{-1}\times \tag{2.26}$$
$$\times t_\beta\left(k_{\beta\alpha}, k'_\beta; E-\frac{p'^2_\beta}{2m_\beta}+i0\right).$$

Здесь $k'_{\alpha\beta}\equiv k_\alpha(p_\alpha,p'_\beta)$ ($k_{\beta\alpha}\equiv k_\beta(p_\alpha,p'_\beta)$) – якобиевы импульсы типа $k_\alpha(k_\beta)$, линейно выраженные через якобиевы импульсы p_α и p'_β (см. [3]). Далее, $H_0'=H_0(P')$, $H_0=H_0(P)$, $H_0(p_\alpha,p'_\beta)=$ $=\frac{1}{2m_\alpha}k'^2_{\alpha\beta}+\frac{1}{2n_\alpha}p_\alpha^2=\frac{1}{2m_\beta}k^2_{\beta\alpha}+\frac{1}{2n_\beta}p_\beta^2$. Под $\frac{\partial}{\partial\bar{h}_{\alpha 2}}t_\alpha(k_\alpha,k'_{\alpha\beta};E-\bar{h}_\alpha+i0)$ понимается производная ядра t_α относительно $\bar{h}_\alpha=(2n_\alpha)^{-1}p_\alpha^2$ по второму аргументу ($\bar{\omega}_\alpha=\bar{h}_\alpha^{-1/2}p_\alpha$ и p'_β фиксированы). Аналогично, через $\frac{\partial}{\partial\bar{h}'_{\beta 2}}t_\alpha$ обозначена производная по второму аргументу относительно $\bar{h}'_\beta$ при фиксированных $\bar{\omega}'_\beta=\bar{t}'^{-\frac{1}{2}}_\beta p'_\beta$ и p_α.

В операторах $Q^{(\pm)}_{\alpha\beta,2}$ дифференцируются ядра t_β:

$$Q^{(\pm)}_{\alpha\beta,2}(P,P',E)=t_\alpha(k_\alpha,k'_{\alpha\beta};\,E-\bar h_\alpha+i0)(H_0(p_\alpha,p'_\beta)-E\mp i0)^{-1}$$
$$\left[\frac{1}{2H'_0}+\frac{\bar h_\alpha}{H_0}\frac{\partial}{\partial\bar h_{\alpha1}}+\frac{\bar h'_\beta}{H'_0}\frac{\partial}{\partial\bar h'_{\beta1}}+\frac{h'_\beta}{H'_0}\frac{\partial}{\partial h^{(2)}_\beta}+\left(1-\frac{\bar h'_\beta}{H'_0}\right)\frac{\partial}{\partial E}\right]t_\beta(k_{\beta\alpha},k'_\beta;E-\bar h'_\beta-i0). \tag{2.27}$$

Дифференцирования $\frac{\partial}{\partial\bar h_{\alpha1}}$ и $\frac{\partial}{\partial\bar h'_{\beta1}}$ понимаются аналогично (2.26).

Наконец,

$$Q^{(\pm)}_{\alpha\beta}(P,P';E)=$$
$$=t_\alpha t_\beta\left[\frac{1}{H'_0(H_0(p_\alpha,p'_\beta)-E\mp i0)}-\frac{\frac{\bar h_\alpha}{H_0}\frac{\partial H_0(p_\alpha,p'_\beta)}{\partial\bar h_\alpha}+\frac{\bar h'_\beta}{H'_0}\frac{\partial H_0(p_\alpha,p'_\beta)}{\partial\bar h'_\beta}-1}{(H_0(p_\alpha,p'_\beta)-E\mp i0)^2}\right] \tag{2.28}$$

Здесь в обозначениях T-матриц опущены аргументы, которые определяются формулой (2.26).

Преобразуем след $\tilde\Delta^{(2)}_1$ из формулы (2.5). С помощью (2.25) разобьем ядра $T_\alpha R_\pm T_\beta$, стоящие под знаком следа, на три слагаемых. Рассмотрим сперва следы $\tilde\Delta^{(2)}_{1k}$ $(k=1,2)$, отвечающие ядрам $Q^{(\pm)}_{\alpha\beta,k}$ $(k=1,2)$. В силу (k) и (p) производные двухчастичных T-матриц можно представить в виде

$$t_\beta\left[\frac{1}{2H_0}+\frac{h_\alpha}{H_0}\left(\frac{\partial}{\partial h^{(1)}_\alpha}+\frac{\partial}{\partial h^{(2)}_\alpha}\right)+\left(1-\frac{\bar h_\alpha}{H_0}\right)\frac{\partial}{\partial E}\right]t_\alpha. \tag{2.29}$$

Вычитая и добавляя в (2.29) выражение $t_\beta\nabla_E t_\alpha$, запишем (2.29) в форме

$$t_\beta\left[\nabla_E-\frac{H_0-E}{H_0}\left(\nabla_E-\frac{\partial}{\partial E}\right)\right]t_\alpha. \tag{2.30}$$

Сингулярные знаменатели ядер $Q^{(\pm)}_{\alpha\beta,k}R_\pm$ равны $(H_0-E\mp i0)^{-2}$. Согласно (δ) разность этих ядер представляется в виде произведения ядра (2.30) на функцию $\frac{\partial}{\partial E}\delta(H_0-E)$. Учитывая соотношение

$$x\delta'(x)=-\delta(x),\quad x\in R^1, \tag{δ'}$$

получаем, что

$$\tilde\Delta^{(2)}_{11}+\tilde\Delta^{(2)}_{12}=2\sum_{\alpha\neq\beta}2\pi i\left[S_p T_\alpha\frac{dG}{dE}\nabla_E T_\beta-\frac{1}{E}S_p T_\alpha G\nabla_E T_\beta+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{E}S_p T_\alpha G\frac{dT_\beta}{dE}\right]\equiv 2(\delta\tilde\Delta^{(2)}-\tilde\Delta^+_E+\tilde\Delta^+_1). \tag{2.31}$$

Рассмотрим слагаемое $\tilde\Delta^{(2)}_{13}$, которое возникает от ядер $Q^{(\pm)}_{\alpha\beta,3}$. С помощью соотношения

$$\bar h_\alpha\frac{\partial}{\partial\bar h_\alpha}H_0(p_\alpha,p_\beta)+\bar h_\beta\frac{\partial}{\partial\bar h_\beta}H_0(p_\alpha,p_\beta)=H_0, \tag{2.32}$$

которое является следствием (p), находим, что третий множитель в (2.28), в данном случае равен $H_0^{-1}(H_0 - E \mp i0)^{-1}$. Поэтому

$$\tilde{\Delta}_{13}^{(2)} = 2\pi i \sum_{\alpha \neq \beta} \int dP \frac{\partial}{\partial E} \delta(H_0 - E)(T_\alpha T_\beta)(P, P; E + i0). \qquad (2.33)$$

Выражение в правой части (2.33) можно представить в двух различных формах. В силу (2.32) справедливо равенство

$$\sum_{\alpha \neq \beta} H_0^{-1} T_\alpha T_\beta = 2 \sum_{\alpha \neq \beta} H_0^{-2} \bar{h}_\beta \frac{\partial H_0(p_\alpha, p_\beta)}{\partial \bar{h}_\beta} T_\alpha T_\beta. \qquad (2.34)$$

Согласно (2.34) имеем: $\tilde{\Delta}_{13}^{(2)} = 2\tilde{\Delta}_3^+$, где через $\tilde{\Delta}_3^+$ обозначено выражение (2.33), порожденное суммой в правой части (2.34). Переходя в (2.33) к дифференцированию δ-функции по H_0 и интегрируя относительно H_0 по частям, придем ко второй форме записи

$$\tilde{\Delta}_{13}^{(2)} = 2 \sum_{\alpha \neq \beta} 2\pi i \left(E^{-1} Sp\, T_\alpha G \nabla_E T_\beta - E^{-1} Sp\, T_\alpha G \frac{dT_\beta}{dE} \right) \equiv 2\left(\tilde{\Delta}_E^+ - \tilde{\Delta}_1^+\right). \qquad (2.35)$$

Пользуясь (2.34) и (2.35), положим

$$\tilde{\Delta}_{13}^{(2)} = \tilde{\Delta}_E^+ - \tilde{\Delta}_1^+ + \tilde{\Delta}_3^+ .$$

Итак, мы получили следующее соотношение

$$\tilde{\Delta}_1^{(2)} = 2\delta\tilde{\Delta}^{(2)} - \tilde{\Delta}_E^+ + \tilde{\Delta}_1^+ + \tilde{\Delta}_3^+ . \qquad (2.36)$$

Перестроим далее след $\hat{\Delta}_2^{(2)}$. С помощью (δ) и (k) находим:

$$\tilde{\Delta}_2^{(2)} = \tilde{\Delta}_{21}^{(2)} + \tilde{\Delta}_3^- , \qquad (2.37)$$

где

$$\tilde{\Delta}_{21}^{(2)} = -2\pi i \sum_{\alpha \neq \beta} \int dP\, \overline{t_\alpha(k_\alpha, k_\alpha; E - \bar{h}_\alpha + i0)} \frac{\partial}{\partial E} \delta(H_0 - E) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2H_0} + \frac{h_\beta}{H_0} \left(\frac{\partial}{\partial h_\beta^{(1)}} + \frac{\partial}{\partial h_\beta^{(2)}} \right) + \left(1 - \frac{\bar{h}_\beta}{H_0}\right) \frac{\partial}{\partial E} \right] t_\beta(k_\beta, k_\beta; E - \bar{h}_\beta + i0),$$

$$\tilde{\Delta}_3^- = -2\pi i \sum_{\alpha \neq \beta} \int dP \left(\frac{3}{2H_0} + \frac{\bar{h}_\beta}{H_0} \frac{\partial}{\partial \bar{h}_\beta} \right) \left[(T_\alpha^* T_\beta)(P(p_\alpha, p_\beta), P(p_\alpha, p_\beta); E) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial}{\partial E} \delta\left(H_0(p_\alpha, p_\beta) - E \right) \right]. \qquad (2.37')$$

Дифференцирование по $\bar{h}_\beta$ ведется при фиксированных $\bar{\omega}_\beta$ и p_α. Отметим, что слагаемое $\tilde{\Delta}_3^-$ порождается производными относительно $\bar{h}_\beta$ и $\bar{h}'_\beta$ δ-функций $\delta(p_\beta - p'_\beta)$ ядер T_β.

Дифференцируя в (2.37) по $\bar{h}_\beta$, выберем переменными интегрирования p_α, p_β и проинтегрируем относительно $\bar{h}_\beta$ по частям. Получим, что

$$\tilde{\Delta}_3^- = -2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} \int dP \frac{\bar{h}_\beta}{H_0^2} \frac{\partial H_0(p_\alpha, p_\beta)}{\partial \bar{h}_\beta} \delta(H_0 - E)(T_\alpha^* T_\beta)(P, P, E+i0) \quad (2.38)$$

В слагаемом $\tilde{\Delta}_{21}^{(2)}$ добавим и вычтем величину $\delta\Delta^{(2)}$, определяемую формулой (2.24). Вспоминая (δ), находим:

$$\tilde{\Delta}_{21}^{(2)} = -\delta\Delta^{(2)} + \frac{2\pi i}{E} \sum_{\alpha\neq\beta} \left(Sp\, T_\alpha^* G \nabla_E T_\beta - Sp\, T_\alpha^* G \frac{dT_\beta}{dE} \right) = \quad (2.39)$$
$$= -\delta\Delta^{(2)} + \tilde{\Delta}_E^- - \tilde{\Delta}_1^-.$$

Преобразование следов T-полиномов второй степени закончено.

Рассмотрим следы $\tilde{\Delta}_1^{(3)}$ и $\tilde{\Delta}_2^{(3)}$ однородных T-полиномов третьей степени. Формула (2.25) приводит к разбиению каждой из величин $\tilde{\Delta}_1^{(3)}$ и $\tilde{\Delta}_2^{(3)}$ на три слагаемых

$$\tilde{\Delta}_{1k}^{(3)} \equiv \sum_{\alpha\neq\beta} \Delta_{\alpha\beta,k}^{(1)}, \qquad \tilde{\Delta}_{2k}^{(3)} \equiv \sum_{\alpha\neq\beta} \Delta_{\alpha\beta,k}^{(2)}, \qquad (k = 1,2,3).$$

Отметим, что из-за присутствия δ-функции $\delta(H_0 - E)$ между ядрами T_α и T_α^*, первый аргумент ядер $Q_{\alpha\beta,k}^{(\pm)}(P, P', E)$ $(k = 1,2,3)$ из $\tilde{\Delta}_1^{(3)}$ находится на энергетической поверхности $H_0(P) = E$. По той же причине в слагаемом $\tilde{\Delta}_2^{(3)}$ на энергетической поверхности $H_0(P') = E$ расположен второй аргумент этих ядер.

Рассмотрим слагаемое $\Delta_{\alpha\beta,1}^{(1)}$. Так как в ядре T_α^* имеется δ-функция $\delta(p_\alpha - p'_\alpha)$, то аргументы ядер $Q_{\alpha\beta,1}^{(\pm)}$ можно записать в виде $Q_{\alpha\beta}^{(\pm)}(P, P(p_\alpha, p'_\beta), E)$. При этом ядра $Q_{\alpha\beta,1}^{(\pm)}$, $R_\pm$ отличаются друг от друга лишь знаменателями, равными $(H_0(p_\alpha, p'_\beta) - E \mp i0)^{-2}$. Их разность можно преобразовать с помощью δ'. Дифференцирования ядра t_α имеют вид

$$\left[\frac{1}{2H_0(p_\alpha, p'_\beta)} + \frac{\bar{h}_\alpha}{E} \frac{\partial}{\partial \bar{h}_\alpha^{(1)}} + \frac{\bar{h}_\alpha}{E} \frac{\partial}{\partial \bar{h}_{\alpha 2}} + \frac{\bar{h}'_\beta}{H_0(p_\alpha, p'_\beta)} \frac{\partial}{\partial \bar{h}'_{\beta 2}} + \right. \quad (2.40)$$
$$\left. + \left(1 - \frac{\bar{h}_\alpha}{E}\right) \frac{\partial}{\partial E} \right] t_\alpha(k_\alpha, k'_\beta; E - \bar{h}_\alpha + i0).$$

Вычтем и добавим в (2.40) выражение $\left((2E)^{-1} + \frac{\bar{h}'_\beta}{E} \frac{\partial}{\partial \bar{h}'_{\beta 2}}\right) t_\alpha$. Так

как $H_0(p_\alpha, p'_\beta) = h'_{\alpha\beta} + \bar{h}_\alpha$, то из (k) и (p) следуют равенства

$$\left[\bar{h}'_\beta \frac{\partial}{\partial \bar{h}'_\beta} + \bar{h}_\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{h}_\alpha}\right] f(k'_{\alpha\beta}) = H_0(p_\alpha, p'_\beta) \frac{\partial f(k'_{\alpha\beta})}{\partial H_0(p_\alpha, p'_\beta)} =$$

$$= h'_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial h'_{\alpha\beta}} f(h'^{1/2}_{\alpha\beta}\, \omega'_{\alpha\beta}); \qquad h'_{\alpha\beta} = \frac{k'^2_{\alpha\beta}}{2m_\alpha}, \quad \omega'_{\alpha\beta} = k'_{\alpha\beta}\, h'^{-\frac{1}{2}}_{\alpha\beta}. \tag{2.41}$$

Пользуясь (2.41), запишем (2.40) в виде

$$\left[\nabla_E - \frac{H_0(p_\alpha, p'_\beta) - E}{E\, H_0(p_\alpha, p'_\beta)} \left(\frac{1}{2} + \frac{\partial}{\partial \bar{h}_{\beta 2}}\right)\right] t_\alpha(k_\alpha, k'_\beta;\ E - \bar{h}_\alpha + i0), \tag{2.42}$$

и вспоминая (δ'), найдем отсюда, что

$$\tilde{\Delta}^{(3)}_{11} = \delta \Delta^{(3)}_1 - \tilde{\Delta}^{(3)}_{01} - \tilde{\Delta}^{(3)}_0, \tag{2.43}$$

где $\delta \Delta^{(3)}_1$ равно первому слагаемому (2.24), а

$$\tilde{\Delta}^{(3)}_{01} = \frac{2\pi i}{E^2} \sum_{\alpha \neq \beta} Sp\, T_\beta\, G \frac{d}{d\bar{h}_{\beta 2}} (T^{(-)}_\alpha - T^{(+)}_\alpha),$$

$$\tilde{\Delta}^{(3)}_0 = \frac{\pi i}{E^2} \sum_{\alpha \neq \beta} Sp\, T_\beta\, G\, (T^*_\alpha - T_\alpha). \tag{2.43}$$

Здесь и далее через $\frac{d}{d\bar{h}_{\beta k}} T^{(\pm)}_\alpha$ ($k = 1, 2$) обозначается интегральный оператор, задаваемый ядром

$$\delta(p_\alpha - p'_\alpha)\, \bar{h}_\beta \frac{\partial}{\partial \bar{h}_{\beta k}} t_\beta(k_\alpha(p_\alpha, p_\beta), k_\alpha(p'_\alpha, p'_\beta), E - \bar{h}_\alpha \pm i0), \tag{2.43'}$$

где дифференцирование относительно $\bar{h}_\beta$ ($\bar{h}'_\beta$) ведется по первому, $k = 1$,(второму, $k = 2$) аргументу при фиксированных p_α (p'_α) и $\bar{\omega}_\beta$ ($\bar{\omega}'_\beta$) . Отметим, что в слагаемом $\tilde{\Delta}^{(3)}_{11}$, отвечающем второму члену (2.42),использовано тождество Гильберта для оператора T_α.

Аналогично (2.43), для слагаемого $\tilde{\Delta}^{(3)}_{22}$ имеем представление

$$\tilde{\Delta}^{(3)}_{22} = \delta \Delta^{(3)}_2 + \tilde{\Delta}^{(3)}_{02}, \tag{2.44}$$

где $\delta \Delta^{(3)}_2$ равно второму члену (2.24) и

$$\tilde{\Delta}^{(3)}_{02} = \frac{2\pi i}{E^2} \sum_{\alpha \neq \beta} T_\alpha\, G \frac{d}{d\bar{h}_{\alpha 1}} (T^{(-)}_\beta - T^{(+)}_\beta).$$

Объединяя (2.43) и (2.44), получаем:

$$\tilde{\Delta}^{(3)}_{11} + \tilde{\Delta}^{(3)}_{22} = \delta \Delta^{(3)} - \hat{\Delta}^{(3)}_1 - \tilde{\Delta}^{(3)}_0, \tag{2.45}$$

где $\delta\Delta^{(3)}$ определено формулой (2.24) и

$$\hat{\Delta}_1^{(3)} = \frac{2\pi i}{E^2}\sum_{\alpha\neq\beta} Sp\, T_\beta\, G\left(\frac{d}{d\bar{h}_{\beta 1}} + \frac{d}{d\bar{h}_{\beta 2}}\right)\left(T_\alpha^{(-)} - T_\alpha^{(+)}\right). \qquad (2.45')$$

Рассмотрим слагаемое $\Delta^{(1)}_{\alpha\beta,2}$. Так как в этом случае переменные интегрирования связаны условием $p_\alpha = p'_\alpha$, то производные ядра t_β можно записать в следующем виде:

$$\left[\frac{1}{2H_0'} + \frac{\bar{h}'_\alpha}{E}\frac{\partial}{\partial\bar{h}'_\alpha} + \frac{\bar{h}'_\beta}{H_0}\frac{\partial}{\partial\bar{h}_{\beta 1}} + \frac{h'_\beta}{H_0}\frac{\partial}{\partial h_\beta^{(2)}} + \left(1 - \frac{\bar{h}'_\beta}{H_0'}\right)\frac{\partial}{\partial E}\right]\times$$
$$\times\, t_\beta(k_\beta(p'_\alpha, p'_\beta), k'_\beta;\, E - \bar{h}'_\beta \pm i0). \qquad (2.46)$$

Сингулярные знаменатели равны здесь $(H_0' - E \mp i0)^{-2}$. Вычтем и добавим в (2.46) производные так, чтобы образовалось выражение $\nabla_E t_\beta$. Получим для (2.46) представление

$$\left[\nabla_E - \frac{H_0' - E}{H_0' E}\left(\frac{1}{2} + \bar{h}'_\beta\frac{\partial}{\partial\bar{h}'_{\beta 1}} + h_\beta\frac{\partial}{\partial h_\beta^{(2)}} - \bar{h}'_\beta\frac{\partial}{\partial E}\right)\right] t_\beta(\ldots). \qquad (2.47)$$

Подставим (2.47) в выражение для $\Delta^{(1)}_{\alpha\beta,2}$ и понизим степень T-полинома под знаком следа с помощью тождества Гильберта. Учитывая затем (δ) и (δ'), придем к следующей формуле

$$\tilde{\Delta}_{12}^{(3)} \equiv \sum_{\alpha\neq\beta}\Delta^2_{\alpha\beta,1} = \delta\Delta^{(2)} - \delta\tilde{\Delta}^{(2)} + \hat{\Delta}_{13}^{(3)}. \qquad (2.48)$$

Здесь величины $\delta\Delta^{(2)}$ и $\delta\tilde{\Delta}^{(2)}$ даются равенствами (2.24) и (2.31), а

$$\tilde{\Delta}_{03}^{(3)} = -\frac{2\pi i}{E^2}\sum_{\alpha\neq\beta} Sp\,(T_\alpha^* - T_\alpha)\, G\left(\frac{1}{2} + \frac{d}{d\bar{h}_{\beta 1}} + \frac{d}{d\bar{h}_{\beta 3}} + \frac{d}{d h_\beta^{(2)}}\right) T_\beta,$$

причем операторы $\frac{d}{d\bar{h}_{\beta k}} T_\beta$ и $\frac{d}{d h_\beta^{(k)}} T_\beta$ определяются по аналогии с (2.43′). Ядро оператора $\frac{d}{d\bar{h}_{\beta k}} T_\beta$ равно

$$\delta(p_\beta - p'_\beta)\,\bar{h}_\beta\frac{\partial}{\partial\bar{h}_{\beta k}}\, t_\beta(k_\beta(p_\alpha, p_\beta), k_\beta(p'_\alpha, p_\beta);\, E - \bar{h}_\beta + i0), \quad k = 1,2,3.$$

где дифференцирование относительно $\bar{h}_\beta$ ведется по k-му аргументу при фиксированных p_α, p'_α и $\bar{\omega}_\beta$; оператор задается ядром

$$\delta(p_\beta - p'_\beta)\, h_\beta\frac{\partial}{\partial h_\beta^{(k)}}\, t_\beta(k_\beta, k'_\beta;\, E - \bar{h}_\beta + i0), \quad k = 1,2.$$

Аналогичные рассуждения приводят к следующему представле-

нию для $\tilde{\Delta}^{(3)}_{21}$:

$$\tilde{\Delta}^{(3)}_{21} = \delta\Delta^{(2)} - \delta\tilde{\Delta}^{(2)} + \hat{\Delta}^{(3)}_{23}, \tag{2.49}$$

где

$$\hat{\Delta}^{(3)}_{23} = \frac{2\pi i}{E^2}\sum_{\alpha\neq\beta} Sp\,(T_\alpha - T^*_\alpha)\,G\left(\frac{d}{d\bar{h}^{(1)}_\beta} + \frac{d}{d\bar{h}_{\beta 2}} + \frac{d}{d\bar{h}_{\beta 3}}\right)T_\beta .$$

Рассмотрим сумму

$$\tilde{\Delta}^{(3)}_{12} + \tilde{\Delta}^{(3)}_{21} = 2\left(\delta\Delta^{(2)} - \delta\tilde{\Delta}^{(2)}\right) + \hat{\Delta}^{(3)}_3 , \quad \hat{\Delta}^{(3)}_3 \equiv \hat{\Delta}^{(3)}_{13} + \hat{\Delta}^{(3)}_{23} . \tag{2.50}$$

Нетрудно привести $\hat{\Delta}^{(3)}_3$ к виду

$$\hat{\Delta}^{(3)}_3 = \Delta^*_E + \Delta^*_1 + \delta\tilde{\Delta}_3 , \tag{2.51}$$

где

$$\Delta^*_E = \frac{2\pi i}{E}\sum_{\alpha\neq\beta} Sp\,(T_\alpha - T^*_\alpha)\,G\,\nabla_E T_\beta \; ; \; \Delta^*_1 = \frac{2\pi i}{E^2}\sum_{\alpha\neq\beta} Sp\,(T^*_\alpha - T_\alpha)\,G\frac{d}{dE}T_\beta ;$$

$$\delta\hat{\Delta}_3 = \frac{2\pi i}{E^2}\sum_{\alpha\neq\beta} Sp\,(T_\alpha - T^*_\alpha)\,G\sum_{k=1}^{3}\frac{d}{d\bar{h}_{\beta k}}T_\beta .$$

Сравнивая величины Δ^*_E и Δ^*_1 со слагаемыми $\tilde{\Delta}^{(\pm)}_E$ и $\tilde{\Delta}^{(\pm)}_1$ из (2.31) и (2.39), заключаем, что

$$\Delta^*_E = \tilde{\Delta}^+_E - \tilde{\Delta}^-_E , \qquad \Delta^*_1 = \tilde{\Delta}^-_1 - \tilde{\Delta}^+_1 . \tag{2.52}$$

Рассмотрим сумму величины $\delta\tilde{\Delta}_3$ и величины $\hat{\Delta}^{(3)}_1$, которая дается равенством (2.45′). Имеем:

$$\delta\tilde{\Delta}_3 + \hat{\Delta}^{(3)}_1 = -\frac{2\pi i}{E^2}\sum_{\alpha\neq\beta}\int dP\,\delta(H_0(P) - E)\times$$

$$\times\,\bar{h}_\beta\frac{\partial}{\partial\bar{h}_\beta}\left[\left(T^{(-)}_\alpha - T^{(+)}_\alpha\right)T^{(+)}_\beta\right](P(p_\alpha, p_\beta), P(p_\alpha, p_\beta), E),$$

где под знаком интеграла стоит полная производная ядра $\left(T^{(-)}_\alpha - T^{(+)}_\alpha\right)T^{(+)}_\beta$ относительно переменной $\bar{h}_\beta$ ($\bar{\omega}_\beta$ и p_α фиксированы). Выберем в качестве независимых переменных интегрирования пару p_α, p_β и проинтегрируем относительно $\bar{h}_\beta$ по частям, перебрасывая производную $\frac{\partial}{\partial\bar{h}_\beta}$ на функцию $\bar{h}\rho_{\bar{h}_\beta}(\bar{h}_\beta)\delta(H_0 - E)$. Получаем, что

$$\delta\tilde{\Delta}_3 + \hat{\Delta}^{(3)}_1 = 3\tilde{\Delta}^{(3)}_0 + \Delta^*_3 , \tag{2.53}$$

где величина $\tilde{\Delta}^{(3)}_0$ определяются формулой (2.43), а

$$\Delta_3^* = \frac{2\pi i}{E^2}\sum_{\alpha\neq\beta}\int dP\,\bar{h}_\beta\,\frac{\partial H_0(p_\alpha,p_\beta)}{\partial \bar{h}_\beta}\,\frac{\partial}{\partial E}\,\delta(H_0-E)\times$$

$$\times\left[(T_\alpha-T_\alpha^*)T_\beta\right](P,P;E+i0).$$

Собирая вместе представления (2.45) и (2.50)-(2.53), придем к соотношению

$$\sum_{i,k=1}^{3}\tilde{\Delta}_{ik}^{(3)} = \delta\Delta^{(3)} + 2\tilde{\Delta}_0^{(3)} + 2(\delta\Delta^{(2)} - \delta\tilde{\Delta}^{(2)}) + \tilde{\Delta}_E^+ - \tilde{\Delta}_E^- - \tilde{\Delta}_1^+ + \tilde{\Delta}_1^- + \Delta_3^* \quad (2.54)$$

Рассмотрим, наконец, слагаемое $\Delta_{\alpha\beta,3}^{(1)}$. Сперва применим в этом слагаемом тождество Гильберта для операторов T_α. Преобразуем затем сингулярные знаменатели. Третий множитель из (2.28) в данном случае имеет вид

$$\frac{1}{H_0(H_0-E\mp i0)} - \frac{\frac{\bar{h}_\alpha}{E}\frac{\partial H_0(p_\alpha,p_\beta)}{\partial \bar{h}_\alpha} + \frac{\bar{h}_\beta}{H_0}\frac{\partial H_0(p_\alpha,p_\beta)}{\partial \bar{h}_\beta} - 1}{(H_0-E\mp i0)^2}. \quad (2.55)$$

Учитывая (2.32), запишем числитель второго отношения (2.55) в виде суммы

$$\frac{H_0-E}{E} - \frac{(H_0-E)}{H_0E}\,\bar{h}_\beta\,\frac{\partial H_0(p_\alpha,p_\beta)}{\partial \bar{h}_\beta},$$

а для (2.55), соответственно, получим представление

$$-\frac{H_0-E}{H_0E} + \frac{\bar{h}_\beta\,\frac{\partial H_0(p_\alpha,p_\beta)}{\partial \bar{h}_\beta}}{H_0E(H_0-E\mp i0)}.$$

Вспоминая (δ) и (δ'), находим отсюда, что

$$\tilde{\Delta}_{13}^{(3)} = -2\tilde{\Delta}_0^{(3)} + \hat{\Delta}_3^*,$$

где $\tilde{\Delta}_0^{(3)}$ определяется соотношением (2.43), а

$$\Delta_3^* = -\frac{2\pi i}{E}\sum_{\alpha\neq\beta}\int dP\,\frac{\bar{h}_\beta}{H_0}\,\frac{\partial H_0(p_\alpha,p_\beta)}{\partial \bar{h}_\beta}\,\frac{\partial}{\partial E}\,\delta(H_0-E)\times$$

$$\times\left[(T_\alpha-T_\alpha^*)T_\beta\right](P,P,E+i0).$$

Аналогично находим, что

$$\tilde{\Delta}_{23}^{(3)} = \hat{\Delta}_3^*.$$

Подставим формулы (2.36), (2.38), (2.39), (2.54),(2.56) (2.57) в представление (2.5) для $\Delta^{(1)}(E)$. Очевидно, все слагаемые, обозначенные буквой Δ с "волной" взаимно уничтожаются. результате получим соотношение

$$\Delta^{(1)} = \delta\Delta^{(3)} + \delta\Delta^{(2)} + (\Delta_3^{+} + \Delta_3^{-} + \Delta_3^{*} + 2\hat{\Delta}_3^{*}) \qquad (2.58)$$

Но последнее слагаемое (2.58) равно нулю в силу равенства

$$\left(\frac{1}{H_0^2} - \frac{2}{H_0 E} + \frac{1}{E^2}\right)\frac{\partial}{\partial E}\,\delta(H_0 - E) = \frac{(H_0 - E)^2}{H_0 E}\,\frac{\partial}{\partial E}(H_0 - E) = 0\,;\ E > 0\,.$$

Лемма 2.3 доказана.

3. Операторы A и $\tilde{A}$.

1. Построим явно выраженный через двухчастичные S-матрицы оператор $A(E)$, регуляризующий след оператора $\left(S^{*}\frac{dS}{dE}\right)_c$.

Пусть $T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(T_{\alpha\beta}^{(+)} + T_{\alpha\beta}^{(-)}\right)$, где $T_{\alpha\beta}^{(\pm)}$ – интегральные операторы, задаваемые ядрами

$$T_{\alpha\beta}^{(+)}(\omega,\omega';E) = -\frac{\rho_0(E)}{\rho_\alpha(E_\alpha)\rho_\beta(E_\beta)}\,\frac{\hat{t}_\alpha(\omega_\alpha,\omega'_{\alpha\beta};E_\alpha)\,\hat{t}_\beta(\omega_{\beta\alpha},\omega'_\beta;E_{\beta\alpha})}{E'_{\alpha\beta} - E_\alpha - i0} \qquad (3.1)$$

$$T_{\alpha\beta}^{(-)}(\omega,\omega';E) = -\frac{\rho_0(E)}{\rho_\alpha(E'_{\alpha\beta})\rho_\beta(E'_\beta)}\,\frac{\hat{t}_\alpha(\omega_\alpha,\omega'_{\alpha\beta};E'_{\alpha\beta})\,\hat{t}_\beta(\omega_{\beta\alpha},\omega'_\beta;E'_\beta)}{E_{\beta\alpha} - E'_\beta - i0} \qquad (3.1')$$

В этих ядрах $\hat{t}_\alpha$ – двухчастичная T-матрица на энергетической поверхности, так что $S_\alpha = I_\alpha - 2\pi i\hat{t}_\alpha$; $\hat{t}_\alpha(\omega_\alpha,\omega'_\alpha;E)$ – ядро оператора $\hat{t}$, $\hat{t}_\alpha : L_2(S^2_{k_\alpha}) \to L_2(S^2_{k_\alpha})$; $T_{\alpha\beta}^{(\pm)} : L_2(S^5_{H_0}) \longrightarrow L_2(S^5_{H_0})$.

Пусть $A(E)$ – оператор, который возникает при подстановке в (2.1) оператора $T_{\alpha\beta}$ вместо оператора $\hat{Q}_{\alpha\beta}^{(1)}$:

$$A(E) = 2\pi i\,B(E) + C(E), \qquad (3.2)$$

где

$$B(E) = \sum_{\alpha\neq\beta}\left[T_{\alpha\beta}^{*}\frac{d}{dE}S_\alpha S_\beta - (S_\alpha^{*} + S_\beta^{*} - I)\frac{d}{dE}T_{\alpha\beta}\right],$$

$$C(E) = \sum_{\alpha\neq\beta}(S_\alpha^{*} - I)\frac{dS_\beta}{dE}\,.$$

Лемма 3.1. При $E > 0$ ядро оператора $A(E) - A^{(1)}(E)$ имеет след. Доказательство этой леммы легко получить с помощью аргумен-

тации, изложенной в [3].

Итак, установлена формула (1), где оператор $A(E)$ выражается в терминах парных матриц рассеяния (формула (3.2)), а

$$\mathrm{sp}\,\tilde{A}(E) = \Delta^{(1)}(E) + \mathrm{sp}\left(A(E) - A^{(1)}(E)\right).$$

Как уже отмечалось, оператор $\tilde{A}(E)$ также можно выразить через парные S -матрицы. Описание этого оператора потребует новых обозначений. В частности, он содержит специальный символ дифференцирования ∂_α . Это дифференцирование, определяемое своим действием на ядра, применяется к суммам произведений ядер $\hat{t}_\alpha$,комплексно сопряженных ядер и к интегралам от соответствующих произведений. На произведение операция ∂_α действует как дифференцирование, причем каждый сомножитель вида $\hat{t}_\alpha(\omega_\alpha, \omega'_\alpha; E_\alpha)$ дифференцируется по E_α . На остальные явные множители, хотя бы и зависящие от E_α , это дифференцирование действует как на постоянные. В применении к интегралам операция ∂_α считается действующей по тому же правилу на подинтегральное выражение. Композицию $\partial_\alpha \frac{d}{dE}$ следует понимать как $\frac{d}{dE}\partial_\alpha + \frac{1}{E}\partial_\alpha$. Через ∂ обозначается сумма $\sum_\alpha \partial_\alpha$.

В промежуточных формулах используется также символ ,который действует на ядра T -матриц вне энергетической поверхности как дифференцирование относительно j -ой "энергетической" переменной

$$\partial_{\alpha j} t_\alpha \sim \frac{\partial}{\partial k_\alpha^{(j)}} t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha; E_\alpha + i0), \quad j = 1, 2$$

$$\partial_{\alpha 3} t_\alpha \sim \frac{\partial}{\partial E_\alpha} t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha; E_\alpha + i0).$$

По определению полагается

$$\partial_{\alpha j} \hat{t}_\alpha(\omega_\alpha, \omega'_\alpha; E_\alpha) \equiv \rho_\alpha(E)\, \partial_{\alpha j} t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha; E_\alpha + i0); \quad \frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} = \frac{k_\alpha'^2}{2m_\alpha} = E_\alpha,$$

и $\partial_{\alpha j} \frac{d}{dE} \equiv \frac{d}{dE}\partial_{\alpha j} + \frac{1}{E}\partial_{\alpha j}$. Будем обозначать $\partial_j \equiv \sum_\alpha \partial_{\alpha j}$, Связь между символами ∂_α и $\partial_{\alpha j}$ такова, что

$$\partial_\alpha \hat{t}_\alpha = \rho_\alpha(E_\alpha) \sum_{j=1}^{3} \partial_{\alpha j} t_\alpha + \frac{\rho_\alpha(E_\alpha)}{2E_\alpha} t_\alpha, \quad \frac{k_\alpha^2}{2m_\alpha} = \frac{k_\alpha'^2}{2m_\alpha} = E_\alpha.$$

Подчеркнем, что не все функции, кроме ядра t_α , (или t_α^*) дифференцирование $\partial_{\alpha j}$ действует как на постоянные.

Пусть некоторый оператор Q задается ядром $Q_0\varphi$, где Q_0 – гладкое ядро, а φ – функция одного из двух видов

$$\varphi = (E'_{\alpha\beta} - E_\alpha - i0)^{-1}, \quad \varphi_2 = \delta(E_\alpha - E'_{\alpha\beta}).$$

В таком случае под $[Q]_r$ понимается регуляризованный оператор, задаваемый ядром Q_0. Отметим следующие очевидные свойства операции регуляризации $[\ \ ]_r$.

1. Операция $[\ \ ]_r$ перестановочна с операторами умножения на $\hat{T}_\alpha$ слева и $\hat{T}_\beta$ справа:

$$[\hat{T}_\alpha Q_r]_r = \hat{T}_\alpha [Q]_r, \quad [Q\hat{T}_\beta]_r = [Q]_r \hat{T}_\beta. \tag{3.5}$$

2. Пусть оператор Q_1 задается ядром $Q_0\varphi_1$, а оператор Q_2 – ядром $Q_0\varphi_2$. Тогда справедливо равенство

$$sp[Q_1]_r = sp[Q_2]_r. \tag{3.6}$$

Из (3.6) вытекают, в частности, соотношения

$$sp[T^{(+)}_{\alpha\beta}]_r = sp[T^{(-)}_{\alpha\beta}]_r = -sp[\hat{T}_\alpha \hat{T}_\beta]_r.$$

Перейдем к описанию оператора $\tilde{A}(E)$.

Теорема 3.1. При $E>0$ имеет место формула

$$\tilde{A}(E) = \frac{1}{4\pi i}\partial[\mathcal{C}]_r + \pi i\left(\frac{1}{E}\frac{d}{dE}E - \frac{1}{2}\partial\right)B_R + \pi i\tilde{B}_R, \tag{3.7}$$

где

$$B_R = \sum_{\alpha\neq\beta}\left\{[T_{\alpha\beta}]^*_r \frac{d}{dE}S_\alpha S_\beta - (S^*_\alpha + S_\beta - I)\left[\frac{d}{dE}T_{\alpha\beta}\right]_r\right\},$$

$$\tilde{B}_R = \sum_{\alpha\neq\beta}\left\{-[T_{\alpha\beta}]^*_r \partial\frac{d}{dE}S_\alpha S_\beta - (S^*_\alpha + S^*_\beta - I)\left[\partial\frac{d}{dE}T_{\alpha\beta}\right]_r\right\}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Раскрывая неопределенность в ядре $(A-A^{(1)})(\omega,\omega',E)$, запишем след

$$sp(A-A^{(1)}) = \int d\omega (A-A^{(1)})(\omega,\omega,E)$$

в виде суммы

$$\pi i\,(sp\,A^{(+)} + sp\,A^{(-)}).$$

Здесь операторы $A^{(\pm)}$ порождаются ядрами $T^{(\pm)}_{\alpha\beta} - \hat{Q}^{(1)}_{\alpha\beta}$, так что

$$A^{(+)} = \sum_{\alpha\neq\beta}\left\{[\partial^+_{\alpha\beta}T^{(+)}_{\alpha\beta}]^*_r \frac{d}{dE}S_\alpha S_\beta - (S^*_\alpha + S^*_\beta - I)\left[\partial^+_{\alpha\beta}\frac{d}{dE}T^{(+)}_{\alpha\beta}\right]_r\right\}, \tag{3.9}$$

где $\partial^+_{\alpha\beta} = -\partial_{\alpha 2} + \partial_{\beta 2} + \partial_{\beta 3}$ и

$$A^{(-)} = \sum_{\alpha\neq\beta}\left\{[\partial^-_{\alpha\beta}T^{(-)}_{\alpha\beta}]^*_r \frac{d}{dE}S_\alpha S_\beta - (S^*_\alpha + S^*_\beta - I)\left[\partial^-_{\alpha\beta}\frac{d}{dE}T^{(-)}_{\alpha\beta}\right]_r\right\}, \tag{3.10}$$

где $\partial^-_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha 1} + \partial_{\alpha 3} - \partial_{\beta 1}$.

Наметим план вычисления $sp(A - A^{(1)})$. Величины $sp A^{(+)}$ и $sp A^{(-)}$ исследуются по отдельности. В каждом из выражений $sp A^{(\pm)}$ последовательно рассматриваются следы однородных T-полиномов, в порядке убывания их степени. Из этих следов отделяются члены, которые содержат полные производные ∂ или $\partial \frac{d}{dE}$. Ясно, что данные члены выражаются в терминах S-матриц. В остатке образуются не "S-матричные" слагаемые двух типов. В ряде слагаемых можно понизить степень T-полиномов. Они сокращаются с аналогичными слагаемыми, которые имеются среди членов низших степеней. Слагаемые второго типа, степень которых нельзя понизить, сокращаются между собой и со слагаемыми величин $\Delta^{(1)}(E)$ из (2.23). В результате возникают длинные выражения для $2\pi i sp A^{(+)} + \Delta^{(1)}$ и $2\pi i sp A^{(-)} + \Delta^{(1)}$, которые описываются в терминах матриц рассеяния. В сумме $\pi i (sp A^{(+)} + sp A^{(-)}) + \Delta^{(1)}$ исчезает ряд членов, содержащих производные весовых функций ρ_α. Эту сумму можно привести к компактному виду (3.7). Мы действуем в обратном порядке: раскрываем правую часть (3.7) и устанавливаем ее тождественность полученному выражению, сравнивая следы членов одинаковой степени.

Приведем несколько полезных соотношений, которые будут использоваться для понижения степени T-полиномов.

С помощью тождества Гильберта можно получить формулы для операторов $\partial_{\alpha j} \hat{T}^{(\pm)}_\alpha$, которые дополняют условие унитарности S-матриц

$$2\pi i \hat{T}_\alpha \hat{T}^*_\alpha = 2\pi i \hat{T}^*_\alpha \hat{T}_\alpha = \hat{T}^*_\alpha - \hat{T}_\alpha. \tag{3.11}$$

Нетрудно проверить следующие соотношения

$$2\pi i \partial_{\alpha 1} \hat{T}_\alpha \hat{T}^*_\alpha = \partial_{\alpha 2} \hat{T}^*_\alpha - \partial_{\alpha 1} \hat{T}_\alpha; \quad 2\pi i \hat{T}^*_\alpha \partial_{\alpha 2} \hat{T}_\alpha = \partial_{\alpha 1} \hat{T}^*_\alpha - \partial_{\alpha 2} \hat{T}_\alpha, \tag{3.12}$$

$$2\pi i \hat{T}_\alpha \partial_{\alpha 1} \hat{T}^*_\alpha = \partial_{\alpha 1} \hat{T}^*_\alpha - \partial_{\alpha 2} \hat{T}_\alpha; \quad 2\pi i \partial_{\alpha 2} \hat{T}^*_\alpha \hat{T}_\alpha = \partial_{\alpha 2} \hat{T}^*_\alpha - \partial_{\alpha 1} \hat{T}_\alpha, \tag{3.13}$$

где $\partial_{\alpha k} \hat{T}^*_\alpha \equiv (\partial_{\alpha k} \hat{T}_\alpha)^*$. Из (3.12) и (3.13) вытекают также формулы:

$$2\pi i \partial_{\alpha 1} \hat{T}_\alpha S^*_\alpha = \partial_{\alpha 2} \hat{T}^*_\alpha; \qquad 2\pi i S^*_\alpha \partial_{\alpha 2} \hat{T}_\alpha = \partial_{\alpha 1} \hat{T}^*_\alpha; \tag{3.12'}$$

$$2\pi i S_\alpha \partial_{\alpha 1} \hat{T}^*_\alpha = \partial_\alpha \hat{T}_\alpha; \qquad 2\pi i \partial_{\alpha 2} \hat{T}^*_\alpha S_\alpha = \partial_{\alpha 1} \hat{T}_\alpha. \tag{3.13'}$$

которые будут использоваться наряду с (3.12) и (3.13).

Дальнейшие выкладки проводятся на примере следа $sp A^{(+)}$. След $sp A^{(-)}$ исследуется аналогично.

Рассмотрим след первого члена (3.9). Преобразуем сначала

след слагаемого, которое порождается символом $\partial_{\alpha 2}$,

$$F_2 = -\sum_{\alpha\neq\beta} sp\left[\partial_{\alpha 2} T_{\alpha\beta}\right]_r^* \frac{d}{dE} S_\alpha S_\beta .$$

Дифференцируя произведение $S_\alpha S_\beta$ и вспоминая (3.6), находим:

$$F_2 = \sum_{\alpha\neq\beta} sp\left[\hat{T}_\beta^* \partial_{\alpha 2} \hat{T}_\alpha^*\right]_r \left(S_\alpha \frac{d}{dE} S_\beta + \frac{dS_\alpha}{dE} S_\beta\right). \qquad (3.14)$$

В слагаемом (3.14), отвечающем оператору $S_\alpha \frac{d}{dE} S_\beta$, применим формулу (3.13), учитывая при этом равенство

$$\left[\hat{T}_\beta^* \partial_{\alpha 2} \hat{T}_\alpha^*\right]_r S_\alpha = \left[\hat{T}_\beta^* \partial_{\alpha 2} \hat{T}_\alpha^* S_\alpha\right]_r .$$

Во втором слагаемом (3.14) можно использовать тождество $S_\beta \hat{T}_\beta^* = \hat{T}_\beta$, поскольку

$$S_\beta \left[\hat{T}_\beta^* \partial_{\alpha 2} \hat{T}_\alpha^*\right]_r = \left[S_\beta \hat{T}_\beta^* \partial_{\alpha 2} \hat{T}_\alpha^*\right]_r .$$

В результате получаем, что

$$F_2 = -2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} sp\left[\partial_2 \hat{T}_\alpha^* \frac{d\hat{T}_\alpha}{dE} \hat{T}_\beta + \partial_1 \hat{T}_\alpha \frac{d\hat{T}_\beta}{dE} \hat{T}_\beta^*\right]_r \equiv \delta A_2 + \hat{B}_1^{(4)}. \qquad (3.15)$$

Рассмотрим оставшиеся слагаемые первого члена (3.9)

$$F_3 = -\sum_{\alpha\neq\beta} sp\left[(\partial_{\beta 2} + \partial_{\beta 3}) \hat{T}_\beta^* \hat{T}_\alpha^*\right]_r \left(\frac{dS_\alpha}{dE} S_\beta + S_\alpha \frac{dS_\beta}{dE}\right) \equiv \tilde{F}_3 + \delta A_3 .$$

В силу унитарности S-матрицы слагаемое δA_3 можно переписать в виде

$$\delta A_3 = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} sp\left[\hat{T}_\alpha \frac{d\hat{T}_\beta}{dE} (\partial_2 + \partial_3) \hat{T}_\beta^*\right]_r . \qquad (3.16)$$

Из $\tilde{F}_3$ отделим следы T-полиномов четвертой степени, которые выражаются в терминах матрицы рассеяния. Для этого воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 3.2. Справедливо соотношение

$$S_\beta (\partial_2 + \partial_3) \hat{T}_\beta^* = 2\pi i \partial \hat{T}_\beta \hat{T}_\beta^* + (\partial_1 + \partial_3) \hat{T}_\beta . \qquad (3.17)$$

Доказательство. Докажем формулу

$$T_\beta G \left(\partial_2 + \frac{d}{dE}\right) T_\beta^* = 2\pi i \left[\left(\sum_{k=1}^{3} \partial_k + \dot{\rho}_\beta\right) T_\beta\right] G T_\beta - \left(\partial_1 + \frac{d}{dE}\right) T_\beta - \left(\partial_2 + \frac{d}{dE}\right) T_\beta^* , \qquad (3.18)$$

где $\partial_2 T_\beta^* \equiv (\partial_2 T_\beta)^*$ и $\dot{\rho}_\beta$ – оператор умножения на функцию

$$\rho_\beta^{-1}(h_\beta)\frac{d}{dh_\beta}\rho_\beta(h_\beta)=\frac{1}{2h_\beta}.$$

Учитывая соотношение (3.4) и равенство типа (2.22), нетрудно проверить, что из (3.18) следует (3.17).

Имеем:

$$T_\beta G\frac{d}{dE}T_\beta^*=\frac{d}{dE}(T_\beta G T_\beta^*)-\frac{dT_\beta}{dE}G T_\beta^*-T_\beta\frac{dG}{dE}T_\beta^*. \qquad (3.19)$$

Первый член (3.19) преобразуем с помощью тождества Гильберта. Рассмотрим далее ядро $T_\beta\frac{dG}{dE}T_\beta^*$, равное

$$\delta(p_\beta-p_\beta')\int dk_\beta''\, t_\beta(k_\beta,k_\beta'';E-\frac{p_\beta^2}{2m_\beta}+i0)\times$$
$$\times t_\beta(k_\beta',k_\beta'';E-\frac{p_\beta^2}{2m_\beta}+i0)\frac{\partial}{\partial E}\delta(h_\beta''+\frac{p_\beta^2}{2m_\beta}-E), \qquad (3.20)$$

где $h_\beta''=\frac{k_\beta''^2}{2m_\beta}$. Перейдем под интегралом (3.20) к дифференцированию δ-функции по h_β'' и проинтегрируем по h_β'' по частям, учитывая $dh_\beta''=\rho_\beta(h_\beta'')dh_\beta''\wedge d\omega_\beta$. Находим, что

$$T_\beta\frac{dG}{dE}T_\beta^*=\partial_2 T_\beta G T_\beta^*+T_\beta G\partial_2 T_\beta^*+T_\beta\dot{\rho}_\beta G T_\beta^*. \qquad (3.21)$$

Подставим (3.21) в (3.19) и прибавим и вычтем в правой части (3.19) оператор $\partial_1 T_\beta G T_\beta^*=(2\pi i)^{-1}(\partial_2 T_\beta^*-\partial_1 T_\beta)$. Производя очевидные сокращения, придем к 3.18.

Лемма доказана.

С помощью (3.17) слагаемое $\tilde{F}_3$ можно записать в виде

$$\tilde{F}_3=-(2\pi i)^2\sum_{\alpha\neq\beta}sp\,[T_{\alpha\beta}]_n^*\frac{d\hat{T}_\alpha}{dE}\partial\hat{T}_\beta+ \qquad (3.22)$$
$$+2\pi i\sum_{\alpha\neq\beta}sp\,[\hat{T}_\alpha^*\frac{d\hat{T}_\alpha}{dE}(\partial_1+\partial_3)\hat{T}_\beta]_n\equiv sp\,\tilde{B}_4^{+}+B_{13},$$

где слагаемое $sp\,\tilde{B}_4^{+}$ выражается в терминах двухчастичных матриц рассеяния.

Учитывая (3.15), (3.16) и (3.22), получаем следующее представление для следа первого члена (3.9):

$$\sum_{\alpha\neq\beta}sp(\partial_{\alpha\beta}^{+}T_{\alpha\beta}^{(+)})^*\frac{d}{dE}S_\alpha S_\beta=sp\,\tilde{B}_4^{+}+\hat{B}_1^{(4)}+B_{13}+\delta A_2+\delta A_3. \qquad (3.23)$$

Рассмотрим след, отвечающий второму члену (3.9). Вспоминая (3.6), запишем этот след в виде

$$2\pi i\sum_{\alpha\neq\beta}sp(\hat{T}_\alpha^*+\hat{T}_\beta^*+I)\partial_+[\frac{d}{dE}\hat{T}_\alpha\hat{T}_\beta]_n. \qquad (3.24)$$

Согласно определению символа ∂_+, имеем:

$$\partial_+\frac{d}{dE}\hat{T}_\alpha\hat{T}_\beta=-\partial_{\alpha 2}\frac{d\hat{T}_\alpha}{dE}\hat{T}_\beta-\partial_{\alpha 2}\hat{T}_\alpha\frac{d\hat{T}_\beta}{dE}+\frac{d\hat{T}_\alpha}{dE}(\partial_{\beta 2}+\partial_{\beta 3})\hat{T}_\beta+ \tag{3.25}$$
$$+\hat{T}_\alpha(\partial_{\beta 2}+\partial_{\beta 3})\frac{d\hat{T}_\beta}{dE}.$$

Соответственно (3.25) оператор под знаком следа (3.24) предоставляется суммой двенадцати типов слагаемых. Эти слагаемые мы разделим на три группы. К первой группе отнесем слагаемые, отвечающие операторам $\hat{T}^*_\alpha$ и $\hat{T}^*_\beta$ из (3.24), которые допускают понижение степени под знаком следа. Ко второй группе (B) - слагаемые, в которых нельзя понизить степень T -полиномов. К третьей группе (C) - T -полиномы второй степени, которые порождаются единичным оператором из (3.24).

Рассмотрим группу A, состоящую из трех видов слагаемых. Понизим степень этих слагаемых с помощью тождеств (3.11)-(3.13):

$$A_1\equiv-2\pi i\sum_{\alpha\neq\beta}sp\left[\hat{T}^*_\alpha\partial_2\hat{T}_\alpha\frac{d\hat{T}_\beta}{dE}\right]_r=-\sum_{\alpha\neq\beta}sp\left[(\partial_1\hat{T}^*_\alpha-\partial_2\hat{T}_\alpha)\frac{d\hat{T}_\beta}{dE}\right]_r,$$

$$A_2\equiv 2\pi i\sum_{\alpha\neq\beta}sp\left[\hat{T}^*_\alpha\hat{T}_\alpha(\partial_2+\partial_3)\frac{dT_\beta}{dE}\right]_r=\sum_{\alpha\neq\beta}sp\left[(\hat{T}^*_\alpha-\hat{T}_\alpha)(\partial_2+\partial_3)\frac{d\hat{T}_\beta}{dE}\right]_r,$$

$$A_3\equiv-2\pi i\sum_{\alpha\neq\beta}sp\hat{T}^*_\beta\left[\partial_{\alpha 2}\frac{d\hat{T}_\alpha}{dE}\hat{T}_\beta\right]_r=-\sum_{\alpha\neq\beta}sp\left[\partial_{\alpha 2}\frac{d\hat{T}_\alpha}{dE}(\hat{T}^*_\beta-\hat{T}_\beta)\right]_r.$$

Нетрудно видеть, что

$$A_2+A_3=\sum_{\alpha\neq\beta}sp\left[(\hat{T}^*_\alpha-\hat{T}_\alpha)\partial_3\frac{d\hat{T}_\beta}{dE}\right]_r. \tag{3.26}$$

Учитывая равенство типа (2.22), сумму (3.26) можно записать в следующей форме

$$A_2+A_3=\sum_{\alpha\neq\beta}Sp\,(T^*_\alpha-T_\alpha)G\frac{1}{E}\frac{d}{dE}E\nabla_E T_\beta. \tag{3.27}$$

Вынося производную $\frac{d}{dE}$ за знак следа, и снова пользуясь равенством (2.22), находим, что

$$A_2+A_3=\sum_{\alpha\neq\beta}\left\{\frac{1}{E}\frac{d}{dE}sp\left[(\hat{T}^*_\alpha-\hat{T}_\alpha)\frac{d\hat{T}_\beta}{dE}\right]_r-\right.$$
$$\left.-sp\left[(\partial_3\hat{T}^*_\alpha-\partial_3\hat{T}_\alpha)\frac{d\hat{T}_\beta}{dE}\right]_r-Sp(T^*_\alpha-T_\alpha)\frac{dG}{dE}\nabla_E T_\beta\right\}\equiv \tag{3.28}$$

$$\equiv \frac{1}{E}\frac{d}{dE} E A_E - A_{23} - (\delta\Delta^{(2)} - \delta\tilde{\Delta}^{(2)}).$$

Последнее слагаемое (3.28) обозначено через $-\delta\Delta^{(2)} + \delta\tilde{\Delta}^{(2)}$ в соответствии с (2.24) и (2.31).

Слагаемое A_1 группы A оставим без изменения.

Рассмотрим слагаемые группы B. Два типа этих слагаемых содержат производные ядер T-матриц второго порядка:

$$B_1 = -2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} sp\left[\hat{T}^*_\alpha \partial_{\alpha 2} \frac{d\hat{T}_\alpha}{dE} \hat{T}_\beta\right]_r, \tag{3.29}$$

$$B_2 = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} sp\, \hat{T}^*_\beta \left[\hat{T}_\alpha (\partial_2 + \partial_3) \frac{d\hat{T}_\beta}{dE}\right]_r, \tag{3.30}$$

и три типа - производные первого порядка:

$$B_3 = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} sp\left[\hat{T}^*_\alpha \frac{d\hat{T}_\alpha}{dE} (\partial_2 + \partial_3) \hat{T}_\beta\right]_r, \tag{3.31}$$

$$B_4 = -2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} sp\left[\partial_{\alpha 2} \hat{T}_\alpha \frac{d\hat{T}_\beta}{dE} \hat{T}^*_\beta\right]_r,$$

$$B_5 = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} sp\, \hat{T}^*_\beta \left[\frac{d\hat{T}_\alpha}{dE} (\partial_2 + \partial_3) \hat{T}_\beta\right]_r. \tag{3.32}$$

Имеет место следующая формула для B_5:

$$B_5 = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} \left\{ sp\, \hat{T}^*_\beta \left[\frac{d\hat{T}_\alpha}{dE} \partial \hat{T}_\beta\right]_r - sp\, \hat{T}^*_\beta \left[\frac{d\hat{T}_\alpha}{dE} (\partial_1 + \dot{\rho}_\beta) \hat{T}_\beta\right]_r \right\} \equiv \tilde{B}_5 - \delta B_5. \tag{3.33}$$

Учитывая (3.12), имеем также:

$$\delta B_5 = \sum_{\alpha\neq\beta} sp\left[\frac{d\hat{T}_\alpha}{dE} (\partial_1 + \dot{\rho}_\beta)(\hat{T}^*_\beta - \hat{T}_\beta)\right]_r.$$

Рассмотрим сумму слагаемых группы A и слагаемого B_5. Вспоминая (3.28) и (3.33), найдем, что

$$\sum_{i=1}^{3} A_i + B_5 = \frac{1}{E}\frac{d}{dE} E A_E - B_5^{(2)} - \delta\Delta^{(2)} + \delta\tilde{\Delta}^{(2)}, \tag{3.34}$$

где

$$B_5^{(2)} = \sum_{\alpha\neq\beta} sp\left[\partial_\alpha (\hat{T}^*_\alpha - \hat{T}_\alpha) \frac{d\hat{T}_\beta}{dE}\right]_r. \tag{3.35}$$

Видно, что слагаемые $B_5^{(2)}$ и $E^{-1}\frac{d}{dE} E A_E$ выражаются в терминах двухчастичных T-матриц на энергетической поверхности.

Слагаемые B_3 и B_4 оставим в виде (3.31). Члены, которые содержат вторые производные T-матриц, будут преобразованы.

Перестроим сначала след B_1. Представим оператор $\partial_2 \frac{d\hat{T}_\alpha}{dE}$ в виде

$$\partial_2 \frac{d\hat{T}_\alpha}{dE} = \partial \frac{d\hat{T}_\alpha}{dE} - (\partial_1 + \partial_3)\hat{T}_\alpha - \dot{\rho}_\alpha \frac{d\hat{T}_\alpha}{dE} . \tag{3.36}$$

Соответственно (3.36) разобьем B_1 на три слагаемых

$$B_1 = -\hat{B}_1 + \delta\rho_1 + \delta B_1 . \tag{3.37}$$

Здесь $\hat{B}_1$ и $\delta\dot{\rho}_1$ выражаются в терминах двухчастичных T-матриц на энергетической поверхности

$$\hat{B}_1 = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} sp\left[\hat{T}^*_\alpha \partial \frac{d\hat{T}_\alpha}{dE} \hat{T}_\beta\right]_\nu , \tag{3.38}$$

$$\delta\rho_1 = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} sp\left[\hat{T}^*_\alpha \dot{\rho}_\alpha \frac{d\hat{T}_\alpha}{dE} \hat{T}_\beta\right]_\nu , \tag{3.39}$$

а слагаемое δB_1, отвечающее второму члену (3.36), описывается через T-матрицы вне энергетической поверхности. Это слагаемое можно записать в следующей форме:

$$\delta B_1 = \frac{1}{E}\frac{d}{dE} E B_{1E} - \hat{B}_{11} - \frac{1}{2\pi i}\delta\Delta_1^{(3)} + B_1^{(3)} - \delta A_2 . \tag{3.40}$$

Здесь B_{1E} и $\hat{B}_{11}$ выражаются через двухчастичные S-матрицы формулами

$$\hat{B}_{1E} = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} sp\left[\hat{T}^*_\alpha \frac{d\hat{T}_\alpha}{dE} \hat{T}_\beta\right]_\nu , \tag{3.41}$$

$$\hat{B}_{11} = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} sp\left[\partial\hat{T}^*_\alpha \frac{d\hat{T}_\alpha}{dE} \hat{T}_\beta\right]_\nu . \tag{3.42}$$

Величина $\delta\Delta_1^{(3)}$ равна первому слагаемому в правой части (2.24), δA_2 определено в (3.15), а

$$B_1^{(3)} = -2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} sp\left[\hat{T}^*_\alpha \frac{d\hat{T}_\alpha}{dE} \partial_3 \hat{T}_\beta\right]_\nu . \tag{3.43}$$

Проверим справедливость представления (3.40). Пользуясь результатами предыдущего раздела, легко получить формулу

$$\delta B_1 = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} Sp\, G T^*_\alpha G\left(\frac{\partial}{\partial h^{(1)}_\alpha} + \frac{d}{dE}\right) E \nabla_E T_\alpha T_\beta . \tag{3.44}$$

С помощью интегрирования по частям, так же, как в лемме 3.2, устанавливается соотношение

$$\begin{aligned} &\frac{1}{E} T^*_\alpha G\left(\frac{\partial}{\partial h^{(1)}_\alpha} + \frac{d}{dE}\right) E \nabla_E T_\alpha = \frac{1}{E}\frac{d}{dE}\left(E T^*_\alpha G T_\alpha\right) - \\ &- \left(\sum_{j=1}^{3} \partial_{\alpha j} T^*_\alpha\right) G \nabla_E T_\alpha - T^*_\alpha \dot{\rho}_\alpha G \nabla_E T_\alpha + \partial_2 T^*_\alpha G \nabla_E T_\alpha . \end{aligned} \tag{3.45}$$

Подставляя (3.45) в (3.44), получаем формулу

$$\delta B_1 = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} Sp \frac{1}{E}\frac{d}{dE}(E T_\alpha^* G \nabla_E T_\alpha) T_\beta G - \tilde{B}_1 - \delta A_2. \qquad (3.46)$$

В первом слагаемом (3.46) перенесем дифференцирование $\frac{d}{dE}$ на операторы T_β и G. Находим:

$$Sp \frac{1}{E}\left(\frac{d}{dE} E T_\alpha^* G \nabla_E T_\alpha\right) T_\beta G = \frac{1}{E}\frac{d}{dE} E\, sp\left[\hat{T}_\alpha^* \frac{d\hat{T}_\alpha}{dE}\hat{T}_\beta\right]_\tau -$$

$$- sp\left[\hat{T}_\alpha^* \frac{d\hat{T}_\alpha}{dE}\partial_3 \hat{T}_\beta\right]_\tau - Sp T_\alpha^* G \nabla_E T_\alpha T_\beta \frac{dG}{dE}. \qquad (3.47)$$

Учитывая это соотношение, немедленно получаем из (3.46) формулу (3.40).

Перейдем к рассмотрению второго слагаемого B_2 группы B. Запишем B_2 в виде

$$B_2 = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} Sp T_\alpha G\left(\frac{\partial}{\partial h_\beta^{(2)}} + \frac{1}{E}\frac{d}{dE}E\right)\nabla_E T_\beta G T_\beta^*.$$

Интегрированием по частям доказывается равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial h_\beta^{(2)}} + \frac{1}{E}\frac{d}{dE}E\right)\nabla_E T_\beta G T_\beta^* = \frac{1}{E}\frac{d}{dE}\left(E \nabla_E T_\beta G T_\beta^*\right) -$$

$$- \nabla_E T_\beta G\left(\partial_2 + \frac{d}{dE} + \dot{\rho}_\beta\right) T_\beta^*, \qquad (3.48)$$

согласно которому B_2 представляется суммой

$$B_2 = -\delta\rho_2 - \delta A_3 + \delta B_2.$$

Здесь

$$\delta\rho_2 = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} sp\, \dot{\rho}_\beta \hat{T}_\beta^* \left[\hat{T}_\alpha \frac{d\hat{T}_\beta}{dE}\right]_\tau,$$

величина δA_3 порождается производными $\partial_2 + \frac{d}{dE}$ из (3.48), она дается формулой (3.16); слагаемое δB_2 отвечает первому члену (3.48):

$$\delta B_2 = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} Sp G T_\alpha \frac{1}{E}\frac{d}{dE}(E \nabla_E T_\beta G T_\beta^*).$$

В этом слагаемом перенесем дифференцирование на оператор $G T_\alpha$:

$$\delta B_2 = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta}\left\{\frac{1}{E}\frac{d}{dE} E\, sp\, \hat{T}_\beta^*\left[\hat{T}_\alpha \frac{d\hat{T}_\beta}{dE}\right]_\tau - sp\, \hat{T}_\beta^*\left[\partial_3 \hat{T}_\alpha \frac{d\hat{T}_\beta}{dE}\right]_\tau -\right.$$

$$\left. - Sp G T_\beta^* \frac{dG}{dE} T_\alpha \nabla_E T_\beta\right\} \equiv \frac{1}{E}\frac{d}{dE} E B_{2E} - B_3^{(1)} - \frac{1}{2\pi i}\delta\Delta_2^{(3)}.$$

Заметим также, что величина $\delta\Delta_2^{(3)}$ равна второму слагаемому из (2.24). В результате B_2 записывается в следующей форме:

$$B_2 = \frac{1}{E}\frac{d}{dE} E B_{2E} - \delta\rho_2 - \delta A_3 + B_3^{(1)} - \frac{1}{2\pi i}\Delta_2^{(3)}. \qquad (3.49)$$

Здесь слагаемые $\frac{1}{E}\frac{d}{dE}EB_{2E}$ и $\delta\rho_2$ выражаются в терминах парных S-матриц, а для описания остальных слагаемых необходимо задавать T-матрицы вне энергетической поверхности.

Закончим на этом перестройку следов однородных T-полиномов третьей степени и рассмотрим сумму T-полиномов третьей и четвертой степеней

$$\sum_{\alpha\neq\beta} sp\left\{\left[\partial^+_{\alpha\beta} T^{(+)}_{\alpha\beta}\right]^*_r \frac{d}{dE} S_\alpha S_\beta - 2\pi i\left(\hat{T}^*_\alpha + \hat{T}^*_\beta\right)\left[\partial^+_{\alpha\beta}\frac{d}{dE} T^{(+)}_{\alpha\beta}\right]_r\right. \equiv I_4,$$

помня при этом найденные выше представления. Слагаемое δA_2 из (3.23) сокращается с $-\delta A_2$ (3.40). Сумма членов $B_1^{(4)}$ из(3.23), B_4 из (3.31) и $B_3^{(1)}$ из (3.49) выражается через парные S-матрицы:

$$B_1^{(4)} + B_4 + B_3^{(1)} = -2\pi i\sum_{\alpha\neq\beta}\left(sp\hat{T}^*_\beta\left[\partial\hat{T}_\alpha\frac{d\hat{T}_\beta}{dE}\right]_r - \right.$$
$$\left. - sp\hat{T}^*_\beta\,\dot{\rho}_\alpha\left[\hat{T}_\alpha\frac{d\hat{T}_\beta}{dE}\right]_r\right) \equiv -\hat{B}_2 + \delta\rho_3. \qquad (3.50)$$

Далее, слагаемое δA_3 из (3.23) аннулируется таким же слагаемым $-\delta A_3$ из (3.49). Сумма

$$B_{13} + B_3 + B_1^{(3)}$$

слагаемых (3.23), (3.31) и (3.40) равна

$$2\pi i\sum_{\alpha\neq\beta}\left\{sp\left[\hat{T}^*_\alpha\frac{d\hat{T}_\alpha}{dE}\partial\hat{T}_\beta\right]_r - sp\left[\hat{T}^*_\alpha\frac{d\hat{T}_\alpha}{dE}\dot{\rho}_\beta\hat{T}_\beta\right]_r\right\} \equiv \tilde{B}_3 - \delta\rho_4. \qquad (3.51)$$

Эта сумма описывается в терминах двухчастичных матриц рассеяния.

Итак, мы исчерпали все слагаемые (3.23), которые не выражаются через S-матрицы. Сумма этих слагаемых с членами B_1 из (3.40), B_2 из (3.49), B_3 и B_4 описывается в терминах S-матриц.

Учитывая (3.34), получаем следующее представление

$$I_4 = sp\left(\tilde{B}_4^+ + \tilde{B}_3^+\right) + \frac{1}{E}\frac{d}{dE}E\,sp B_3^+ - sp\hat{B}_3^+ + \delta\rho^{(3)} + \tilde{C}_1 - \frac{1}{2\pi i}\delta\Delta^{(3)}. \qquad (3.52)$$

Здесь $\tilde{B}_4^+$, $\tilde{B}_3^+$, B_3^+ и $\hat{B}_3^+$ – однородные T-полиномы четвертого и третьего порядков; они выражаются через S-матрицы следующими формулами:

$$B_4^+ = -\sum_{\alpha\neq\beta}\left[T_{\alpha\beta}\right]^*_r\frac{dS_\alpha}{dE}\,\partial S_\beta,$$

$$\tilde{B}_3^+ = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} (\hat{T}_\alpha^* + \hat{T}_\beta^*)\left[\frac{d\hat{T}_\alpha}{dE}\partial\hat{T}_\beta\right]_r,$$

$$B_3^+ = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta}\left\{\hat{T}_\beta^*\left[\hat{T}_\alpha\frac{d\hat{T}_\beta}{dE}\right]_r + \hat{T}_\alpha^*\left[\frac{d\hat{T}_\alpha}{dE}\hat{T}_\beta\right]_r\right\},$$

$$\hat{B}_3^+ = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta}\partial_\alpha\left\{\hat{T}_\beta^*\left[\hat{T}_\alpha\frac{d\hat{T}_\beta}{dE}\right]_r + \left[\hat{T}_\alpha^*\frac{d\hat{T}_\alpha}{dE}\hat{T}_\beta\right]_r\right\}.$$

Далее,

$$\delta\rho^{(3)} = \sum_{k=1}^{4}(-1)^{k-1}\delta\rho_k \qquad (3.52')$$

и через $\tilde{C}_1$ обозначены следы T-полиномов второй степени, которые даются формулами (3.34). Наконец, $\delta\Delta^{(3)}$ определено в формуле (3.23).

Рассмотрим слагаемые группы C,

$$C_1 = \sum_{\alpha\neq\beta} sp\left[\partial_{\alpha\beta}^+\frac{d}{dE}\hat{T}_\alpha\hat{T}_\beta\right]_r.$$

Разбивая C_1, согласно (3.25), на четыре группы слагаемых, получим после суммирования по α и β, что

$$C_1 = \sum_{\alpha\neq\beta} sp\,\partial_{\beta 3}\left[\frac{d}{dE}\hat{T}_\alpha\hat{T}_\beta\right]_r. \qquad (3.53)$$

Перестроим выражение (3.53), используя представление

$$C_1 = \sum_{\alpha\neq\beta} Sp\left(T_\alpha G\frac{1}{E}\frac{d}{dE}\nabla_E T_\beta + \nabla_E T_\alpha G\frac{dT_\beta}{dE}\right), \qquad (3.54)$$

которое устанавливается так же, как (2.22). Перебрасывая производную $\frac{d}{dE}$ в первом слагаемом (3.54) на оператор $T_\alpha G$, находим:

$$C_1 = \sum_{\alpha\neq\beta}\left\{\frac{1}{E}\frac{d}{dE}E\,sp\left[T_\alpha\frac{d\hat{T}_\beta}{dE}\right]_r - Sp\nabla_E T_\alpha\frac{dG}{dE}T_\beta\right\} \equiv \frac{1}{E}\frac{d}{dE}E\,C_{1E} - \delta\tilde{\Delta}^{(2)}. \qquad (3.55)$$

Рассмотрим сумму величин $\tilde{C}_1$ из (3.52) и C_1, учитывая при этом (3.34) и (3.55). Получаем:

$$C_1 + \tilde{C}_1 = sp\,\tilde{B}_2^+ + \frac{1}{E}\frac{d}{dE}E\,sp\,B_2^+ - sp\,\hat{B}_2^+ - \delta\Delta^{(2)}, \qquad (3.56)$$

где слагаемое $\delta\Delta^{(2)}$ дается формулой (2.24), а однородные T-полиномы второй степени $\tilde{B}_2^+$, B_2^+ и $\hat{B}_2^+$ описываются в терминах двухчастичных S-матриц формулами

$$\tilde{B}_2^+ = \sum_{\alpha\neq\beta}\left[\partial_\alpha\hat{T}_\alpha\frac{d\hat{T}_\beta}{dE}\right]_r, \qquad B_2^+ = \sum_{\alpha\neq\beta}\left[\hat{T}_\alpha^*\frac{d\hat{T}_\beta}{dE}\right]_r,$$

$$\hat{B}_2^+ = \sum_{\alpha\neq\beta} \left[\partial_\alpha \hat{T}_\alpha^* \frac{d\hat{T}_\beta}{dE} \right]_r .$$

В итоге след $sp\, A^{(+)}$ можно записать в виде суммы

$$sp\, A^{(+)} = sp\, \tilde{A}_+ + \delta\rho^{(3)} - \frac{1}{2\pi i} \Delta^{(1)}, \qquad (3.57)$$

где величина $\Delta^{(1)}$ определена в лемме 2.2, а следы $sp\, \tilde{A}_+$ и $\delta\rho^{(3)}$ выражаются через парные S -матрицы формулой (3.52′) и

$$sp\, \tilde{A}_+ \equiv sp\, \tilde{B}_+ + \frac{1}{E} \frac{d}{dE} E\, sp\, B_+ - sp\, \hat{B}_+ , \qquad (3.58)$$

где

$$\tilde{B}_+ = \sum_{i=2}^{4} \tilde{B}_i , \quad B_+ = B_3^+ + B_2^+ , \quad \hat{B}_+ = \hat{B}_3^+ + B_2^+ .$$

Полученное выражение, однако, трудно представить в достаточно компактном виде из-за присутствия величины $\delta\rho^{(3)}$, которая содержит производные весовых множителей $\rho_\alpha(E_\alpha)$.

Рассмотрим след $sp\, A^{(-)}$. Вычисляя его по такому же плану, как в случае $sp\, A^{(+)}$, найдем, что

$$sp\, A^{(-)} = sp\, \tilde{A}_- - \delta\rho^{(3)} - \frac{1}{2\pi i} \Delta^{(1)},$$

где след $sp\, \tilde{A}_-$ описывается в терминах S -матриц формулами, аналогичными (3.58):

$$sp\, \tilde{A}_- = sp\, \tilde{B}_- + \frac{1}{E} \frac{d}{dE} E\, sp\, \tilde{B}_- ; \qquad (3.59)$$

здесь

$$\tilde{B}_- = \sum_{i=2}^{4} \tilde{B}_i^- , \qquad B_- = B_+ , \quad \hat{B}_- = \hat{B}_3^- + \hat{B}_2^- ,$$

где $\tilde{B}_2^- = \tilde{B}_2^+$, $\hat{B}_2^- = \hat{B}_2^+$ и

$$\tilde{B}_4^- = -\sum_{\alpha\neq\beta} [T_{\alpha\beta}]_r^* \partial S_\alpha \frac{dS_\beta}{dE} ,$$

$$\tilde{B}_3^- = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} (\hat{T}_\alpha^* + \hat{T}_\beta^*) \left[\partial \hat{T}_\alpha \frac{d\hat{T}_\beta}{dE} \right]_r ,$$

$$\hat{B}_3^- = 2\pi i \sum_{\alpha\neq\beta} \left\{ \left[\hat{T}_\alpha^* \frac{d\hat{T}_\alpha}{dE} \partial \hat{T}_\beta \right]_r + \partial_\beta \left(\hat{T}_\beta^* \left[\hat{T}_\alpha \frac{d\hat{T}_\beta}{dE} \right]_r \right) \right\}.$$

Таким образом, в сумме $sp\, \tilde{A} = \pi i\, sp(A^+ + A^{(-)}) + \Delta^{(1)}$ слагаемые $\delta\rho^{(3)}$ взаимно сокращаются. Слагаемое $\Delta^{(1)}$, которое содержит T-матрицы вне энергетической поверхности, сокращается с таким же слагаемым следа $\pi i\, sp(A^{(+)} + A^{(-)})$, т.е. след $sp\, \tilde{A}$ описывается только в терминах S -матриц.

Покажем теперь, что соотношения (3.58) и (3.59) для $sp\, \tilde{A}$

можно переписать в форме (3.7). Рассмотрим правую часть (3.7). Почленно продифференцируем произведения операторов и используем условие унитарности S -матриц. Найдем, что

$$\pi i s p \tilde{B}_R = \pi i s p(\tilde{B}_+ + \tilde{B}_-) + 2\pi i s p B_R^{(2)}, \tag{3.60}$$

где

$$B_R^{(2)} = \sum_{\alpha \neq \beta} \left[\hat{T}_\alpha^* \partial \frac{d\hat{T}_\beta}{dE} \right]_r,$$

а остальные слагаемые описываются формулами (3.58)-(3.59). Имеем далее следующие равенства:

$$\pi i s p\left(\frac{1}{E}\frac{d}{dE}E + \frac{1}{2}\partial\right)B_R = \pi i \frac{1}{E}\frac{d}{dE}E\, Sp(B_+ + B_-) -$$
$$-\pi i s p(\hat{B}_+ + \hat{B}_-) + \pi i s p\, \hat{B}_2^+ - \pi i s p\, B_R^{(2)}. \tag{3.61}$$

Наконец,

$$\frac{1}{4\pi i} sp\, \partial [C]_2 = -\pi i s p\, \hat{B}_2^+ - \pi i s p\, B_R^{(2)}. \tag{3.62}$$

Подставляя (3.60), (3.61) и (3.62) в (3.7), получим выражение, которое совпадает с представлениями (3.58) и (3.59) для $\pi i s p(A^{(+)} + A^{(-)}) + \Delta^{(1)}$.

Теорема 3.1. доказана.

В заключение автор приносит глубокую благодарность В.С.Буслаеву и Л.Д.Фаддееву за плодотворные обсуждения.

Литература

1. Фаддеев Л.Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц. Труды матем.ин-та АН СССР, 1963, т.69, 120 с.
2. Буслаев В.С., Меркурьев С.П. Формула следа для системы трех частиц. Доклады АН СССР, 1969, т.189, с.269-272.
3. Буслаев В.С., Меркурьев С.П. О связи между третьим вириальным коэффициентом и матрицей рассеяния. Теор. и матем.физика, 1970, т.5, с.372-387; О третьем групповом интеграле в квантовомеханической статистике. Труды матем.ин-та АН СССР; 1970, т.110, с.29-44.

4. S m i t h F.T. Quantum virial Expansion. Phys.Rev., 1963, v.131, p.2803-2823.
5. Б е р е з и н Ф.А. Формула следов для многочастичного уравнения Шредингера. Доклад АН СССР, 1964, т.157, с.1069-1072.
6. D a s h e n R., S.-K e n g M a , B e r n s t e i n H., S -matrixes Formulation of Statistical Mechanicex. Phys. Rev. 1969, v. 187, p.345-401.
7. O s b o r n T.A. and T s a n g T.Y. A Quantum Theory of higher virial coefficients. Preprint, City University of New York, 1976, 54 p.
8. M у с х е л и ш в и л и Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. (1968), Москва, "Наука".