

УДК 517.946

**АСИМПТОТИКА ПРИ $t \rightarrow \infty$ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ
ДЛЯ ОДНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ,
ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ**

В. Н. МАСЛЕННИКОВА

Рассматривается следующая линейная система, описывающая движение вращающейся сжимаемой жидкости (система акустики):

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v}, \vec{\omega}] + \text{grad } P = \vec{F}(x, t), \\ \alpha^2 \frac{\partial P}{\partial t} + \text{div } \vec{v} = \Psi(x, t) \end{cases} \quad (1)$$

в области $\{x \in E_3, t \geq 0\}$, где $\vec{v}(x, t) = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, $\omega = \text{const}$, $[\vec{v}, \vec{\omega}]$ — векторное произведение, $\alpha = \text{const}$ — коэффициент сжимаемости. Система (1) является симметрической гиперболической по Фридрихсу [1] с кратными характеристиками.

При $\alpha = 0$ система (1) переходит в систему, рассмотренную С. Л. Соболевым в [2], которая уже не принадлежит к определенному типу.

В нашей работе [3] было построено явное решение задачи Коши

$$\vec{v}(x, t)|_{t=0} = \vec{v}^0(x), \quad P(x, t)|_{t=0} = P^0(x) \quad (2)$$

для системы (1) и получены некоэрцитивные оценки в L_p для этого решения. Одновременно было показано, что «коэрцитивных» оценок в L_p , т. е. оценок типа

$$\|\vec{v}\|_{L_p} + \|P\|_{L_p} \leq C (\|\vec{v}^0\|_{L_p} + \|P^0\|_{L_p})$$

при $p \neq 2$, быть не может.

В настоящей статье мы приводим полное доказательство теоремы о скорости убывания решения задачи (2) для однородной системы

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v}, \vec{\omega}] + \text{grad } P = 0, \\ \alpha^2 \frac{\partial P}{\partial t} + \text{div } \vec{v} = 0 \end{cases} \quad (1')$$

при $t \rightarrow \infty$. Краткое содержание полученных результатов содержится в нашей заметке [4].

Итак, рассмотрим однородную систему (1'). Предположим, что начальные данные достаточно гладки, например принадлежат C^2 , т. е. имеют

вторые непрерывные производные. Согласно нашей работе [3], единственное решение задачи Коши (2) для однородной системы (1') имеет вид

$$\vec{v}(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{r=\frac{t}{\alpha}} \left\{ \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha^2 \rho^2}{2r^2} \right) \vec{v}^0 - \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{v}^0}{\partial n} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{r} ([\vec{v}^0, \vec{\omega}] - \text{grad } P^0) \right\} dS_y + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{r < \frac{t}{\alpha}} \left\{ \frac{\partial G(y-x, t)}{\partial y_3} \vec{\Phi}_0(y) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^k G}{\partial t^k} \vec{\Phi}_k(y) \right\} dy, \quad (3)$$

$$P(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{r=\frac{t}{\alpha}} \left\{ \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha^2 \rho^2}{2r^2} \right) P^0(y) - \frac{1}{r} \frac{\partial P^0(y)}{\partial n} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\alpha r} \text{div } \vec{v}^0(y) \right\} dS_y + \frac{1}{4\pi} \int_{r < \frac{t}{\alpha}} \left\{ \frac{\partial G(y-x, t)}{\partial y_3} v_3^0(y) + \right. \\ \left. + \frac{\partial G}{\partial t} \left(\frac{\partial v_1^0}{\partial y_2} - \frac{\partial v_2^0}{\partial y_1} + \alpha^2 P^0 \right) - \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \text{div } \vec{v}^0 + \frac{\partial^3 G}{\partial t^3} \alpha^2 P^0 \right\} dy, \quad (4)$$

где $\vec{\Phi}_0(y) = -\text{rot } \vec{v}^0 + \alpha^2 \vec{\omega} P^0$,

$$\vec{\Phi}_1(y) = -\Delta \vec{v}^0 + \text{grad div } \vec{v}^0 - \alpha^2 [\text{grad } P^0, \vec{\omega}] + \alpha^2 \vec{\omega} v_3^0,$$

$$\vec{\Phi}_2(y) = \alpha^2 ([\vec{v}^0, \vec{\omega}] - \text{grad } P^0), \quad (5)$$

$$\vec{\Phi}_3(y) = \alpha^2 \vec{v}^0,$$

$$G(y-x, t) = \frac{1}{\omega \rho} \int_0^r \frac{\xi}{V \xi^2 + \alpha^2 \omega^2 \rho^2} J_0(\xi) d\xi,$$

$$\rho^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2; \quad r^2 = \rho^2 + (y_3 - x_3)^2,$$

J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Докажем следующую основную теорему об убывании по t решения задачи Коши для любых x , принадлежащих произвольному компактному.

Теорема. Если начальные данные $\vec{v}^0(x), P^0(x) \in \dot{C}^\infty(E_3)$, то решение задачи Коши для однородной системы (1') убывает по t при $t \rightarrow \infty$, как $O\left(\frac{1}{t}\right)$, равномерно для всех x , принадлежащих компактному Ω из E_3 .

Доказательство. Докажем теорему для вектора $\vec{v}(x, t)$; для функции $P(x, t)$ оно аналогично, ввиду того что представления решения (3) и (4) выражаются с помощью одних и тех же фундаментальных решений $\frac{\partial^k G}{\partial t^k}$.

Итак, рассмотрим формулу (3). Значения производных от потенциала G в ней имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(y-x, t)}{\partial y_3} &= -\frac{(y_3-x_3)t}{r^3} J_0\left(\frac{\rho\sqrt{t^2-\alpha^2r^2}}{r}\right), \\ \frac{\partial G(y-x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{r} J_0\left(\frac{\rho\sqrt{t^2-\alpha^2r^2}}{r}\right), \\ \frac{\partial^2 G(y-x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\rho t}{r^2\sqrt{t^2-\alpha^2r^2}} J_0'\left(\frac{\rho\sqrt{t^2-\alpha^2r^2}}{r}\right), \\ \frac{\partial^3 G(y-x, t)}{\partial t^3} &= -\frac{\rho^2 t^2}{r^3(t^2-\alpha^2r^2)} J_0\left(\frac{\rho\sqrt{t^2-\alpha^2r^2}}{r}\right) - \\ &\quad - \frac{\rho(t^2+\alpha^2r^2)}{r^2(t^2-\alpha^2r^2)^{3/2}} J_0'\left(\frac{\rho\sqrt{t^2-\alpha^2r^2}}{r}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

В формулах (6) для сокращения записи мы положили $\omega = 1$. Воспользуемся уравнением Бесселя $J_0(\eta) = -J_0''(\eta) - \frac{J_0'(\eta)}{\eta}$ и заменим функцию Бесселя в (3) через ее производные. Кроме того, в формуле (3) сделаем замену $y-x=\xi$, $dy = d\xi$. Тогда вектор $\vec{v}(x, t)$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \vec{v}(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{r=\frac{t}{\alpha}} \left\{ \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha^2\rho^2}{2r^2} \right) \vec{v}^0(x+\xi) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{v}^0}{\partial n} + \frac{\alpha}{r} ([\vec{v}^0, \vec{\omega}] - \text{grad } P^0) \right\} dS_\xi + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{r < \frac{t}{\alpha}} \left\{ \left(\frac{t\xi_3}{r^3} J_0'' + \frac{t\xi_3}{\rho r^2\sqrt{t^2-\alpha^2r^2}} J_0' \right) \times \right. \\ &\quad \times \vec{\Phi}_0(x+\xi) + \left(-\frac{1}{r} J_0'' - \frac{1}{\rho\sqrt{t^2-\alpha^2r^2}} J_0' \right) \vec{\Phi}_1(x+\xi) + \\ &\quad + \frac{\rho t}{r^2\sqrt{t^2-\alpha^2r^2}} J_0' \vec{\Phi}_2(x+\xi) + \\ &\quad \left. + \left(\frac{\rho^2 t^2}{r^3(t^2-\alpha^2r^2)} J_0'' - \frac{\alpha^2\rho}{(t^2-\alpha^2r^2)^{3/2}} J_0' \right) \vec{\Phi}_3(x+\xi) \right\} d\xi, \end{aligned} \tag{7}$$

где опущенные аргументы бesselевых функций равны $\frac{\rho\sqrt{t^2-\alpha^2r^2}}{r}$, и теперь $r^2 = \rho^2 + \xi_3^2$, $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$. Аналогичный вид с теми же потенциалами (так будем в дальнейшем называть коэффициенты при $\vec{\Phi}_i(x+\xi)$ в формуле (7) и обозначать их через $G_i(\xi, t)$, $i=0, \dots, 3$), но с другими Φ_i будет иметь и формула для $P(x, t)$.

Если t достаточно велико, а начальные данные финитны, то первый интеграл в (7) будет равен нулю. Обозначим свертки по шару $r \leq \frac{t}{\alpha}$:

$G_i(\xi, t) * \vec{\Phi}_i$ через $Q_i(x, t)$. Представим каждое $Q_i(x, t)$ при больших t в виде

$$Q_i(x, t) = \frac{1}{t} K_i(x, t),$$

где $K_i(x, t)$ равномерно ограничено по x и t для $x \in \Omega$ и всех $t \geq t_0 > 0$.
Рассмотрим

$$Q_1(x, t) = \int_{r < \frac{t}{\alpha}} \left(\frac{t\xi_3}{r^3} J_0'' + \frac{t\xi_3}{\rho r^2 \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}} J_0' \right) \vec{\Phi}_0(x + \xi) d\xi. \quad (8)$$

Первый член этой формулы проинтегрируем по частям по ξ_3 , пользуясь формулой Остроградского и тем, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{\rho \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}}{r} \right) = - \frac{\rho \xi_3 t^2}{r^3 \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}}. \quad (9)$$

Получаем

$$\begin{aligned} & \int_{r < \frac{t}{\alpha}} \frac{t\xi_3}{r^3} J_0'' \vec{\Phi}_0(x + \xi) d\xi = - \int_{r < \frac{t}{\alpha}} \frac{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}}{t\rho} \vec{\Phi}_0 dJ_0' = \\ & = \int_{r < \frac{t}{\alpha}} J_0' \left[\frac{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}}{\rho t} \frac{\partial \vec{\Phi}_0}{\partial \xi_3} - \frac{\alpha^2 \xi_3}{\rho t \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}} \vec{\Phi}_0 \right] d\xi. \end{aligned} \quad (10)$$

Сложив коэффициенты при $\vec{\Phi}_0$ во вторых членах формул (8) и (10), мы получаем формулу для $Q_1(x, t)$ в виде

$$Q_1(x, t) = \int_{r < \frac{t}{\alpha}} \left\{ \frac{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}}{\rho t} J_0' \frac{\partial \vec{\Phi}_0}{\partial \xi_3} + \frac{\xi_3 \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}}{r^2 t \rho} J_0' \vec{\Phi}_0 \right\} d\xi. \quad (11)$$

Рассмотрим первое слагаемое в (11), которое обозначим через $Q_{11}(x, t)$.

Обозначим гладкую финитную функцию $\frac{\partial \vec{\Phi}_0}{\partial \xi_3}$ через Φ_{03} и разложим ее в ряд Тейлора в окрестности $\xi_3 = 0$ с остаточным членом в интегральной форме (первые два аргумента $x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2$ у функции Φ_{03} для краткости опускаем):

$$\begin{aligned} \Phi_{03}(x + \xi_3) - \Phi_{03}(x_3) &= \left(\frac{\partial \Phi_{03}}{\partial \xi_3} \right)_{\xi_3=0} \xi_3 + \\ &+ \int_{x_3}^{x_3 + \xi_3} (x_3 + \xi_3 - \eta) \frac{\partial^2 \Phi_{03}(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда

$$Q_{11} = \frac{1}{t} \int_{r < \frac{t}{\alpha}} \frac{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}}{\rho} J_0' \left(\frac{\rho \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}}{r} \right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\Phi_{03}(x_3) + \left(\frac{\partial \Phi_{03}}{\partial \xi_3} \right)_{\xi_3=0} \xi_3 + \int_{x_3}^{x_3+\xi_3} (x_3 + \xi_3 - \eta) \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial^2 \Phi_{03}(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta \right] d\xi = \sum_{i=1}^3 Q_{11i}. \end{aligned} \quad (13)$$

Преобразуем Q_{111} . В сферических координатах после замены $\sin \theta = \gamma$, $d\theta = \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}$ получаем

$$\begin{aligned} Q_{111} &= \frac{1}{t} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t/\alpha} r dr \int_0^\pi \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2} J'_0(\sin \theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) \times \\ & \times \Phi_{03}(x_1 + r \cos \varphi \sin \theta, x_2 + r \sin \varphi \sin \theta, x_3) d\theta = \\ &= \frac{2}{t} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t/\alpha} r dr \int_0^1 \frac{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2} J'_0(\gamma \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2})}{\sqrt{1-\gamma^2}} \times \\ & \times \Phi_{03}(x_1 + r\gamma \cos \varphi, x_2 + r\gamma \sin \varphi, x_3) d\gamma. \end{aligned}$$

Так как Φ_{03} зависит от γ дифференцируемым образом, то разложим Φ_{03} в ряд Тейлора в окрестности $\gamma=1$:

$$\Phi_{03}(\gamma) - \Phi_{03}(1) = \left(\frac{\partial \Phi_{03}}{\partial \gamma} \right)_{\gamma=1} (\gamma-1) + \int_0^{1-\gamma} (1-\gamma-\eta) \frac{\partial^2 \Phi_{03}(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta \quad (14)$$

с остаточным членом порядка $o((\gamma-1)^2)$. Это даст возможность проинтегрировать по частям несобственный интеграл по γ и этим избавиться от множителя $\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}$ в числителе, а член с $\Phi_{03}(1)$ вычислим в явном виде; имеем

$$\begin{aligned} Q_{111} &= \frac{2}{t} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t/\alpha} r dr \int_0^1 \frac{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2} J'_0(\gamma \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2})}{\sqrt{1-\gamma^2}} \times \\ & \times \left[\left(\frac{\partial \Phi_{03}}{\partial \gamma} \right)_{\gamma=1} (\gamma-1) + \int_0^{1-\gamma} (1-\gamma-\eta) \frac{\partial^2 \Phi_{03}(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta + \right. \\ & \left. + \Phi_{03}(x_1 + r \cos \varphi, x_2 + r \sin \varphi, x_3) \right] d\gamma. \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим в первом слагаемом интеграл по γ ; проинтегрируем его по частям по γ :

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 \frac{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2} J'_0(\gamma \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) (1-\gamma)^{1/2} d\gamma}{(1+\gamma)^{1/2}} = \\ &= - \int_0^1 \frac{(1-\gamma)^{1/2}}{(1+\gamma)^{1/2}} dJ_0 = 1 - \int_0^1 J_0(\gamma \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) \frac{2d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}(1+\gamma)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Теперь рассмотрим во втором слагаемом в (15) интеграл по γ и тоже проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \left(\int_0^{1-\gamma} (1-\gamma-\eta) \frac{\partial^2 \Phi_{03}(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta \right) dJ_0 = \\ & = \int_0^1 (1-\eta) \frac{\partial^2 \Phi_{03}(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta - \int_0^1 J_0(\gamma \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) \times \\ & \times \left[\frac{\gamma}{(1-\gamma^2)^{3/2}} \int_0^{1-\gamma} (1-\gamma-\eta) \frac{\partial^2 \Phi_{03}(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta - \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_0^{1-\gamma} \frac{\partial^2 \Phi_{03}(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta \right] d\gamma. \quad (17) \end{aligned}$$

Так как в третьем слагаемом в (15) Φ_{03} не зависит от γ , то интеграл по γ вычислим в явном виде с помощью формул (11) работы [5].

Имеем

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2} J_0(\gamma \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2})}{\sqrt{1-\gamma^2}} d\gamma = \cos(\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) - 1. \quad (18)$$

Подставляя (16)–(18) в (15), получим

$$\begin{aligned} Q_{111} &= \frac{2}{t} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t/\alpha} \left[r (\cos(\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) - 1) \times \right. \\ & \quad \times \Phi_{03}(x_1 + r \cos \varphi, x_2 + r \sin \varphi, x_3) + \\ & \quad \left. + r \left(\frac{\partial \Phi_{03}(x_1 + r \gamma \cos \varphi, x_2 + r \gamma \sin \varphi, x_3)}{\partial \gamma} \right)_{\gamma=1} \right] dr - \\ & - \frac{2}{t} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t/\alpha} r dr \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_{03}}{\partial \gamma} \right)_{\gamma=1} \frac{2J_0(\gamma \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2})}{\sqrt{1-\gamma^2}(1+\gamma)} + \right. \\ & \quad \left. + (1-\gamma) \frac{\partial^2 \Phi_{03}}{\partial \gamma^2} - J_0(\gamma \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) \left[\frac{\gamma}{(1-\gamma)^{3/2}} \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \int_0^{1-\gamma} (1-\gamma-\eta) \frac{\partial^2 \Phi_{03}(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta - \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_0^{1-\gamma} \frac{\partial^2 \Phi_{03}(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta \right] \right\} d\gamma. \quad (19) \end{aligned}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. Если функция $f(x_1, x_2, x_3)$ убывает при $|x| \rightarrow \infty$, как $\frac{C}{|x|^n+1}$, где n достаточно велико, то интеграл

$$I_1(x) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty r^k f(x_1 + r \cos \varphi, x_2 + r \sin \varphi, x_3) dr \quad (20)$$

ограничен равномерно по $x \in \Omega$, если $n - k \geq 1 + \varepsilon$, k, ε — положительные числа. При $k=1$ интеграл (20) равномерно ограничен по всем $x \in E_3$.

Доказательство. Переходя к декартовым координатам $r \cos \varphi = \xi_1$, $r \sin \varphi = \xi_2$ ($\xi' = (\xi_1, \xi_2)$ и т. д.), получаем

$$\begin{aligned} |I_1(x)| &= \left| \int_{E_2} |\xi'|^{k-1} f(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3) d\xi_1 d\xi_2 \right| = \\ &= \left| \int_{E_2} |y' - x'|^{k-1} f(y_1, y_2, x_3) dy_1 dy_2 \right| \leq \\ &\leq C \int_{E_2} \frac{|y' - x'|^{k-1}}{(y_1^2 + y_2^2 + x_3^2)^{n/2} + 1} dy_1 dy_2 < \infty, \end{aligned}$$

если x принадлежит компакту.

При $k=1$ подынтегральная функция не зависит от x' и, следовательно, I_1 ограничен равномерно по x на всем E_3 .

Пользуясь леммой 1 и оценивая по модулю каждый член в (19), получаем, что $Q_{111} = O\left(\frac{1}{t}\right)$ на любом компакте по x .

Заметим, что первый интеграл в (19) равномерно ограничен для всех $x \in E_3$, а второй будет содержать полином второй степени по x и, следовательно, будет ограничен по x на любом компакте $\Omega \ni x$.

Рассмотрим Q_{112} в формуле (13). Обозначим $\left(\frac{\partial \Phi_{03}}{\partial \xi_3}\right)_{\xi_3=0}$ через Φ_{033} :

$$\begin{aligned} Q_{112} &= \frac{1}{t} \int_{r < \frac{t}{\alpha}} \xi_3 \frac{\sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}}{\rho} J_0' \left(\frac{\rho \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}}{r} \right) \times \\ &\quad \times \Phi_{033}(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3) d\xi. \end{aligned}$$

Перейдем к сферическим координатам и проинтегрируем по частям по θ . Получим

$$\begin{aligned} Q_{112} &= \frac{1}{t} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^{t/\alpha} r^2 \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2} J_0'(\sin \theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) \cos \theta \times \\ &\quad \times \Phi_{033}(x_1 + r \cos \varphi \sin \theta, x_2 + r \sin \varphi \sin \theta, x_3) dr = \\ &= \frac{1}{t} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t/\alpha} r^2 dr \int_0^\pi \Phi_{033} dJ_0(\sin \theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) = \\ &= -\frac{1}{t} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t/\alpha} r^2 dr \int_0^\pi J_0(\sin \theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) \frac{\partial \Phi_{033}}{\partial \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Переходя к декартовым координатам и пользуясь леммой 1, получаем, что $Q_{112} = O(1/t)$.

Рассмотрим Q_{113} . Так как он содержит величину порядка $o(\xi_3^2)$, т. е. будет в окрестности нуля $\cos \theta$ иметь порядок $(\cos \theta)^2$, то его преобразование ничем не отличается от преобразования Q_{112} . Поэтому мы получаем, что $Q_{113} = O(1/t)$, и, следовательно, $Q_{11} = O(1/t)$ равномерно на любом компакте по x .

Рассмотрим второй член в формуле (11), который обозначим через Q_{12} :

$$Q_{12}(x, t) = \frac{1}{t} \int_{r < \frac{t}{\alpha}} \frac{\xi_3 \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}}{\rho r^2} J_0' \left(\frac{\rho \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}}{r} \right) \vec{\Phi}_0(x + \xi) d\xi.$$

Перейдем к сферическим координатам и проинтегрируем по частям по θ . Получим

$$\begin{aligned} Q_{12}(x, t) &= \frac{1}{t} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t/\alpha} dr \int_0^\pi \cos \theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2} \vec{\Phi}_0 \times \\ &\times J_0'(\sin \theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) d\theta = \frac{1}{t} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t/\alpha} dr \int_0^\pi \vec{\Phi}_0(x_1 + r \cos \varphi \sin \theta, x_2 + \\ &+ r \sin \varphi \sin \theta, x_3 + r \cos \theta) dJ_0(\sin \theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) = \\ &= \frac{1}{t} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t/\alpha} [\vec{\Phi}_0(x_1, x_2, x_3 - r) - \vec{\Phi}_0(x_1, x_2, x_3 + r)] dr - \\ &- \frac{1}{t} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t/\alpha} dr \int_0^\pi J_0(\sin \theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) \frac{\partial \vec{\Phi}_0}{\partial \theta} d\theta = \\ &= \frac{2\pi}{t} \int_0^{t/\alpha} [\vec{\Phi}_0(x_1, x_2, x_3 - r) - \vec{\Phi}_0(x_1, x_2, x_3 + r)] dr - \\ &- \frac{1}{t} \int_{r < \frac{t}{\alpha}} J_0 \left(\frac{\rho \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}}{r} \right) \left[\frac{\partial \vec{\Phi}_0(x + \xi)}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\xi_1 \xi_3}{\rho r^2} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial \vec{\Phi}_0(x + \xi)}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\xi_2 \xi_3}{\rho r^2} + \frac{\partial \vec{\Phi}_0}{\partial \xi_3} \frac{1}{r} \right] d\xi. \end{aligned}$$

Очевидно, $Q_{12} = O\left(\frac{1}{t}\right)$ равномерно по $x \in E_3$, так как второй член ограничен равномерно по всем $x \in E_3$, а первый также оценивается равномерно по всем x :

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\infty [\vec{\Phi}_0(x_1, x_2, x_3 - r) - \vec{\Phi}_0(x_1, x_2, x_3 + r)] dr \right| \leq \\ &\leq \int_{-x_3}^\infty \frac{C_1}{(x_1^2 + x_2^2 + \eta^2)^{n/2} + 1} d\eta + \int_{x_3}^\infty \frac{C_2}{(x_1^2 + x_2^2 + \eta^2)^{n/2} + 1} d\eta < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, свертка $Q_1(x, t)$ имеет при $t \rightarrow \infty$ асимптотику $O\left(\frac{1}{t}\right)$, равномерную по x на любом компакте. Остальные свертки в формуле (7)

оцениваются таким же путем, поэтому при их оценках мы будем более краткими.

Рассмотрим

$$Q_2(x, t) = - \int_{r < \frac{t}{\alpha}} \left(\frac{1}{r} J_0'' + \frac{1}{\rho \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}} J_0' \right) \vec{\Phi}_1(x + \xi) d\xi. \quad (21)$$

Второй член в (21) оценивается следующим образом:

$$|Q_{22}(x, t)| \leq \frac{1}{t} \int_{r < \frac{t}{\alpha}} \frac{|\vec{\Phi}_1|}{\rho} \left| \frac{J_0' \left(\frac{\rho t}{r} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 r^2}{t^2}} \right)}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2 r^2}{t^2}}} \right| d\xi. \quad (22)$$

По условию теоремы $\vec{\Phi}_1$ финитна, поэтому при конечных x и большом t

$$\left| \frac{J_0' \left(\frac{\rho t}{r} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 r^2}{t^2}} \right)}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2 r^2}{t^2}}} \right| < \text{const}$$

и так как интеграл в (22) абсолютно сходится, то мы получаем, что $Q_{22} = O\left(\frac{1}{t}\right)$ равномерно по x на любом компакте.

Рассмотрим первый член в (21), который обозначим через $Q_{21}(x, t)$. Разложим $\vec{\Phi}_1(x + \xi)$ в ряд Тейлора по ξ_3 по формуле (12). Имеем

$$Q_{21}(x, t) = - \int_{r < \frac{t}{\alpha}} \frac{1}{r} J_0'' \left(\frac{\rho \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}}{r} \right) \left[\vec{\Phi}_1(x_3) + \left(\frac{\partial \vec{\Phi}_1}{\partial \xi_3} \right)_{\xi_3=0} \xi_3 + \right. \\ \left. + \int_{x_3}^{x_3 + \xi_3} (x_3 + \xi_3 - \eta) \frac{\partial^2 \vec{\Phi}_1}{\partial \eta^2} d\eta \right] d\xi = \sum_{k=1}^3 Q_{21k}. \quad (23)$$

Рассмотрим Q_{211} . Перейдем к сферическим координатам, после чего сделаем замену $\sin \theta = \gamma$, $d\theta = \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}}$; получаем

$$Q_{211} = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t/\alpha} r dr \int_0^\pi \sin \theta J_0''(\sin \theta \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) \vec{\Phi}_1 d\theta = \\ = -2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t/\alpha} r dr \int_0^1 \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}} J_0''(\gamma \sqrt{t^2 - \alpha^2 r^2}) \times \\ \times \vec{\Phi}_1(x_1 + r\gamma \cos \varphi, x_2 + r\gamma \sin \varphi, x_3) d\gamma.$$

Разложим $\vec{\Phi}_1$ в ряд Тейлора в окрестности $\gamma=1$ по формуле (14). Получим

$$Q_{211} = -2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t/\alpha} r dr \int_0^1 \frac{\gamma}{V1-\gamma^2} J_0''(\gamma V t^2 - \alpha^2 r^2) \times \\ \times \left[\vec{\Phi}_1(x_1 + r \cos \varphi, x_2 + r \sin \varphi, x_3) + \left(\frac{\partial \vec{\Phi}_1}{\partial \gamma} \right)_{\gamma=1} (\gamma-1) + o((\gamma-1)^2) \right] d\gamma. \quad (24)$$

В первом слагаемом в (24) интеграл по γ вычислим в явном виде

$$-\vec{\Phi}_1(x_1 + r \cos \varphi, x_2 + r \sin \varphi, x_3) \int_0^1 \frac{\gamma J_0''(\gamma V t^2 - \alpha^2 r^2)}{V1-\gamma^2} d\gamma = \\ = \vec{\Phi}_1 \int_0^1 \left(\frac{\gamma J_0(\gamma V t^2 - \alpha^2 r^2)}{V1-\gamma^2} + \frac{J_0'(\gamma V t^2 - \alpha^2 r^2)}{V t^2 - \alpha^2 r^2 V1-\gamma^2} \right) d\gamma = \\ = \vec{\Phi}_1 \left\{ \frac{\sin V t^2 - \alpha^2 r^2}{V t^2 - \alpha^2 r^2} + \frac{\cos(V t^2 - \alpha^2 r^2) - 1}{V t^2 - \alpha^2 r^2} \right\}. \quad (25)$$

Во втором и третьем слагаемом проинтегрируем по частям по γ ; имеем

$$\int_0^1 \frac{\gamma(\gamma-1)}{V1-\gamma^2} J_0''(\gamma V t^2 - \alpha^2 r^2) d\gamma = \\ = - \int_0^1 \frac{\gamma V1-\gamma}{V1+\gamma} J_0''(\gamma V t^2 - \alpha^2 r^2) d\gamma = - \int_0^1 \frac{\gamma V1-\gamma}{V1+\gamma V t^2 - \alpha^2 r^2} dJ_0' = \\ = \int_0^1 \frac{J_0'(\gamma V t^2 - \alpha^2 r^2) (1-2\gamma-\gamma^2)}{V t^2 - \alpha^2 r^2 V1-\gamma^2 (1+\gamma)^{3/2}} d\gamma.$$

Аналогично преобразуется последнее слагаемое в (24) с o малым от $(\gamma-1)$. Оценивая (24) точно так же, как и (22), получаем $Q_{211} = O\left(\frac{1}{t}\right)$ равномерно по x на компакте.

Как показывает формула (25), более быстрого стремления к нулю при $t \rightarrow \infty$ у нашего решения быть не может.

Рассмотрим Q_{212} . Обозначим $\left(\frac{\partial \vec{\Phi}_1}{\partial \xi_3} \right)_{\xi_3=0}$ через $(\vec{\Phi}_{13})_{\xi_3=0}$. Перейдем опять к сферическим координатам и проинтегрируем по частям по θ :

$$Q_{212} = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t/\alpha} r^2 dr \int_0^\pi (\vec{\Phi}_{13})_{\xi_3=0} \sin \theta \cos \theta J_0''(\sin \theta V t^2 - \alpha^2 r^2) d\theta = \\ = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t/\alpha} r^2 dr \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{V t^2 - \alpha^2 r^2} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \vec{\Phi}_{13}(x_1+r \cos \varphi \sin \theta, x_2+r \sin \varphi \sin \theta, x_3) dJ'_0 = \\ & = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{t/\alpha} r^2 dr \int_0^\pi \frac{J'_0(\sin \theta \sqrt{t^2-\alpha^2 r^2})}{\sqrt{t^2-\alpha^2 r^2}} \times \\ & \quad \times \left[\cos \theta \vec{\Phi}_{13} + \sin \theta \frac{\partial \vec{\Phi}_{13}}{\partial \theta} \right] d\theta. \end{aligned}$$

Точно таким же образом преобразуется Q_{213} , так как остаточный член есть величина $o(\xi_3^2)$.

Поэтому мы получаем $Q_{22}(x, t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$ и, согласно формуле (21), имеем $Q_2(x, t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$ равномерно по x на любом компакте.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} Q_3(x, t) &= \int_{r < \frac{t}{\alpha}} \frac{\rho t}{r^2 \sqrt{t^2-\alpha^2 r^2}} J'_0 \vec{\Phi}_2(x+\xi) d\xi = \\ &= \int_{r < \frac{t}{\alpha}} \left(\frac{\rho \sqrt{t^2-\alpha^2 r^2}}{t r^2} J'_0 + \frac{\alpha^2 \rho}{t \sqrt{t^2-\alpha^2 r^2}} J'_0 \right) \vec{\Phi}_2(x+\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (26)$$

Рассмотрим первое слагаемое, обозначив его через Q_{31} , так как ясно, что второе убывает быстрее, чем $\frac{1}{t}$.

Но Q_{31} по виду напоминает Q_{11} в формуле (11); ясно, что ρ в числителе и r^2 в знаменателе в Q_{31} не будет влиять на преобразование, поэтому сразу можно сказать, что $Q_3(x, t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$ равномерно по x на любом компакте.

Наконец, рассмотрим $Q_4(x, t)$:

$$\begin{aligned} Q_4(x, t) &= \int_{r < \frac{t}{\alpha}} \left(\frac{\rho^2 t^2}{r^3 (t^2-\alpha^2 r^2)} J_0'' - \frac{\alpha^2 \rho}{(t^2-\alpha^2 r^2)^{3/2}} J_0' \right) \times \\ & \quad \times \vec{\Phi}_3(x+\xi) d\xi = \int_{r < \frac{t}{\alpha}} \left(\frac{\rho^2}{r^3} J_0'' + \frac{\alpha^2 \rho^2}{r (t^2-\alpha^2 r^2)} J_0'' - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\alpha^2 \rho}{(t^2-\alpha^2 r^2)^{3/2}} J_0' \right) \vec{\Phi}_3(x+\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (27)$$

Ясно, что два последних слагаемых убывают быстрее, чем $\frac{1}{t}$, а первое слагаемое преобразуется так же, как Q_{21} (см. формулу (23)); отличие будет состоять только в том, что в сферических координатах в числителе у Q_{41} будет (в отличие от Q_{21}) лишний множитель $\sin^2 \theta$, который не будет, очевидно, мешать при тех преобразованиях, которые мы производим.

Таким образом, $Q_4 = O(1/t)$ равномерно на любом компакте по x , и теорема доказана.

Замечание 1. Для краткости доказательства мы предположили в условии теоремы, что начальные функции принадлежат $C^\infty(E_3)$, т. е. бесконечно дифференцируемы и финитны. Несколько удлиняя доказательство, можно потребовать от начальных данных лишь некоторую конечную гладкость ($\vec{v}^0(x), P^0(x) \in C^5(E_3)$) и некоторое конечное убывание (типа полинома) начальных данных при $|x| \rightarrow \infty$. При этих предположениях теорема останется верной.

Замечание 2. При доказательстве теоремы мы на самом деле получаем асимптотическое разложение решения по отрицательным степеням t и выписываем старшие члены разложения. Если провести дальнейшие выкладки, как это сделано нами в [6] для системы С. Л. Соболева ($\alpha = 0$), то можно получить точный старший член асимптотического разложения вида $O\left(\frac{1}{t}\right)$, который при $\alpha = 0$ будет совпадать с соответствующим старшим членом асимптотического разложения для системы Соболева [6].

Замечание 3. Для задачи (1), (2) можно изучить поведение решения задачи Коши при $t \rightarrow \infty$ и $|x| \rightarrow \infty$ одновременно. Здесь получаются те же результаты, что и в системе Соболева (см. [6]).

Замечание 4. Мы имеем для системы (1), т. е. гиперболической системы, у которой скорость распространения возмущений конечна, ту же асимптотику при $t \rightarrow \infty$, что и в системе Соболева. Отличие состоит лишь в наличии запаздывающего аргумента.

Таким образом, главные члены в асимптотике определяются не одним из старших членов $\alpha^2 \frac{\partial P}{\partial t}$ в системе (1), благодаря которому система имеет гиперболический тип в отличие от системы С. Л. Соболева, а младшими членами $[\vec{v}, \vec{\omega}]$. Это явление, по-видимому, связано с наличием в системе кратных характеристик.

Литература

1. Friedrichs K. Common pure and appl. Math., 7, № 2, 345—392. 1954.
2. Соболев С. Л. Изв. АН СССР, серия матем., 18, № 1, 3—50, 1954.
3. Масленникова В. Н. Сибир. матем. ж., т. XIII, № 3, 1972.
4. Масленникова В. Н. ДАН СССР, 187, № 5, 1969.
5. Масленникова В. Н. Труды МИАН СССР, 103, 1968.
6. Масленникова В. Н. Автореф. докт. дисс. Новосибирск, 1971.

Поступила в редакцию
2 июля 1971 г.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР