С. А. Бостанджиян, С. М. Черняева, О гидродинамическом тепловом “взрыве” неньютоновской жидкости,
Докл. АН СССР, 1966, том 170, номер 2, 301–304

Доклады Академии наук СССР
1966. Том 170, № 2

УДК 532.135

ГИДРОМЕХАНИКА

С. А. БОСТАНДЖИЯН, С. М. ЧЕРНЯЕВА

О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ТЕПЛОВОМ «ВЗРЫВЕ» НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком Н. Н. Семеновым 4 I 1966)

В работе [1] на примере течения в цилиндрической трубе ньютоновской жидкости с сильной (нелинейной) зависимостью вязкости от температуры было показано, что явление, аналогичное тепловому взрыву, возможно при течении химически инертной жидкости.

Представляет интерес исследование возможности гидродинамического теплового «взрыва» при течении химически инертной неньютоновской жидкости, подчиняющейся степенному закону [2],

$$\tau = k(dv\,/\,dy)^n, \tag{1}$$

где τ — касательное напряжение; $dv\,/\,dy$ — градиент скорости, k и n — величины, в общем случае зависящие от температуры. Как известно, этому закону подчиняются многие полимерные растворы и расплавы. При этом k сильно зависит от температуры, а показатель степени n — слабо [3]. Для наиболее часто встречающихся псевдопластичных жидкостей $n < 1$.

Реологическое уравнение обычно записывают в виде (1). Но, чтобы всегда левая часть соответствовала правой, его следует записывать в форме

$$\tau = k|dv\,/\,dy|^n \operatorname{sign} dv\,/\,dy. \tag{2}$$

Рассмотрим задачу о стационарном осесимметричном течении неньютоновской жидкости, реологическое состояние которой описывается соотношением (2), в бесконечной трубе радиуса r_0. Течение происходит под действием постоянного градиента давления, плотность жидкости считаем постоянной. В силу слабой зависимости показателя степени n от температуры будем считать его постоянным. Зависимость k от температуры примем в виде

$$k = k_0 e^{U/RT}, \tag{3}$$

где k_0 и U — константы; R — газовая постоянная; T — абсолютная температура.

Система уравнений движения в напряжениях и теплопроводности с учетом диссипации энергии записывается в виде

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{\tau}{r} - \frac{dP}{dz} = 0, \qquad \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{k}{\lambda J}\left|\frac{dv}{dr}\right|^{n+1} = 0. \tag{4}$$

Граничные условия:

$$\text{при } r = 0 \quad dv\,/\,dr = 0, \quad dT\,/\,dr = 0; \qquad \text{при } r = r_0 \quad v = 0, \quad T = T_0. \tag{5}$$

Здесь v — скорость; $dP\,/\,dx = b$ — градиент давления; T — температура; T_0 — температура стенки трубы; λ — коэффициент теплопроводности жидкости; J — механический эквивалент тепла.

Интегрирование первого уравнения системы (4) дает

$$\tau = \frac{br}{2} + \frac{C}{r}, \tag{6}$$

где C — постоянная интегрирования. Из (2) и (5) вытекает, что $\tau = 0$ при $r = 0$. Следовательно, $C = 0$.

Систему уравнений (4) и (6) с учетом (2) и (3) приведем к безразмерному виду

$$\left|\frac{dw}{d\xi}\right|^n = \xi e^{n\theta}, \qquad \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{\xi} + \varkappa e^{-n\theta}\left|\frac{dw}{d\xi}\right|^{n+1} = 0, \tag{7}$$

где введены следующие обозначения безразмерных переменных и параметра:

$$\xi = \frac{r}{r_0}, \quad \theta = \frac{U}{nRT_0^2}(T - T_0), \quad w = \left(\frac{2k_0}{br_0^{n+1}}\right)^{1/n} \exp\left(\frac{U}{nRT_0}\right) v,$$

$$\varkappa = \frac{bUr_0^3}{2\lambda JnRT_0^2}\left(\frac{br_0}{2k_0}\right)^{1/n} \exp\left(-\frac{U}{RT_0 n}\right). \tag{8}$$

Экспонента в выражении (3) была преобразована по Франк-Каменецкому ([4]), что допустимо в силу того, что $nRT_0 / U \ll 1$ для жидкостей с сильной зависимостью вязкости от температуры.

Граничные условия (5) примут вид

$$\text{при } \xi = 0 \quad d\theta / d\xi = 0; \qquad \text{при } \xi = 1 \quad w = 0, \ \theta = 0. \tag{9}$$

Исключая производную скорости из системы (7), получим

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} + \varkappa\xi^{(n+1)/n} e^{\theta} = 0.$$

Это уравнение заменой $\theta = u - \dfrac{n+1}{n} \ln \xi$ приводится к виду

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{du}{d\xi} + \varkappa e^{u} = 0. \tag{10}$$

Полученное уравнение совпадает с уравнением из теории теплового взрыва ([4]). Известно, что оно имеет решение не при всех значениях параметра $\varkappa$, а только при $\varkappa < \varkappa_{\text{кр}}$, где $\varkappa_{\text{кр}}$ — некоторое критическое значение. При $\varkappa > \varkappa_{\text{кр}}$ уравнение (10) не имеет решения, следовательно, невозможно стационарное распределение температур и скоростей. Тепло, выделяющееся за счет трения, не успевает отводиться через стенки трубы и приводит к прогрессивному нарастанию температуры, к гидродинамическому тепловому «взрыву».

Решение уравнения (10) можно записать в виде ([5])

$$u = \ln\frac{8-c}{\varkappa} - 2\ln\left(a\xi^{k_1} + \frac{1}{a}\xi^{k_2}\right),$$

где a и c — постоянные интегрирования; k_1 и k_2 — корни уравнения

$$k^2 - 2k + c / 8 = 0. \tag{11}$$

Переходя к функции θ, имеем

$$\theta = \ln\frac{8-c}{\varkappa} - 2\ln\left(a\xi^{k_1+(n+1)/2n} + \frac{1}{a}\xi^{k_2+(n+1)/2n}\right). \tag{12}$$

Удовлетворяя граничным условиям (9), получим

$$k_2 = -(n+1) / 2n, \qquad (8-c) / \varkappa = (a + 1/a)^2.$$

Зная k_2, из (11) находим

$$k_1 = (5n+1) / 2n, \qquad c = -2(5n+1)(n+1) / n^2.$$

Для определения постоянной a получили квадратное уравнение с корнями

$$a_1 = \frac{3n+1}{2n}\sqrt{\frac{2}{\varkappa}} + \sqrt{\frac{2}{\varkappa}\left(\frac{3n+1}{2n}\right)^2 - 1},$$
$$a_2 = \frac{3n+1}{2n}\sqrt{\frac{2}{\varkappa}} - \sqrt{\frac{2}{\varkappa}\left(\frac{3n+1}{2n}\right)^2 - 1}.$$

Этим двум корням соответствуют два профиля температур. Из стационарной теории теплового взрыва известно, что одно из решений неустойчиво (в данном случае устойчивое решение соответствует корню a_2, который в дальнейшем будем обозначать через a).

Введем для краткости записи обозначение $\alpha = 3 + 1/n$. Тогда формулу (12) для профиля температур и выражение a с учетом найденных констант можно записать в виде

$$\theta = \ln\frac{2\alpha^2}{\varkappa} - 2\ln\left(a\xi^\alpha + \frac{1}{a}\right), \qquad a = \alpha\sqrt{\frac{1}{2\varkappa}} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{2\varkappa} - 1}. \qquad (13)$$

Из зависимости $\varkappa$ от постоянной интегрирования a $\varkappa = 2\alpha^2/(a + 1/a)^2$ видно, что $\varkappa$ — четная функция от a; при изменении a от 0 до $+\infty$ $\varkappa$ возрастает от 0 до некоторой максимальной величины и затем убывает до 0. Критическое значение параметра, при котором нарушается стационарный режим течения, определяется из условия $d\varkappa / da = 0$. Из этого условия вытекает, что $a_{кр} = 1$, $\varkappa_{кр} = \alpha^2/2$. При возрастании $\varkappa$ от 0 до $\varkappa_{кр}$ корень a_2, соответствующий устойчивому решению, возрастает от 0 до 1, а корень a_1, соответствующий неустойчивому решению, убывает от ∞ до 1. Таким образом, при всех $\varkappa < \varkappa_{кр}$ имеем $a < 1$.

Определим поле скоростей. С учетом (13) и знака производной скорости первое уравнение системы (7) можно записать в виде

$$\frac{dw}{d\xi} = -\frac{2\alpha^2}{\varkappa}\frac{\xi^{\alpha-3}}{(a\xi^\alpha + 1/a)^2}.$$

После несложных преобразований получаем

$$dw = -\frac{2\alpha}{\varkappa}\left[d\left(\frac{\xi^{\alpha-2}}{\xi^\alpha + 1/a^2}\right) + 2a^2\frac{\xi^{\alpha-3}}{1 + a^2\xi^\alpha}\right]d\xi. \qquad (14)$$

Второе слагаемое в (14) при произвольном α не интегрируется. Однако, учитывая, что $a < 1$, $\xi < 1$, дробь можно разложить в равномерно сходящийся ряд и произвести почленное интегрирование. Интегрируя (14) и удовлетворяя условию (9), получим следующее выражение для размерной скорости

$$v = \frac{2r_0\alpha a^2}{\varkappa}\left(\frac{br_0}{2k(T_0)}\right)^{1/n}\left[\frac{1}{1+a^2} - \frac{\xi^{\alpha-2}}{1+a^2\xi^\alpha} + 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m a^{2m}}{\alpha-2+m}\left(1 - \xi^{\alpha-2+m}\right)\right]. \qquad (15)$$

Секундный расход жидкости выражается формулой

$$Q = \frac{4\pi r_0^3\alpha a^2}{\varkappa}\left(\frac{br_0}{2k(T_0)}\right)^{1/n}\left[\frac{1}{2(1+a^2)} - \frac{1}{a^2\alpha}\ln(1+a^2) + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m a^{2m}}{\alpha+m}\right]. \qquad (16)$$

Из найденного решения можно получить решение задачи об изотермическом течении неньютоновской жидкости в цилиндрической трубе предельным переходом при $\lambda \to \infty$. Действительно, в этом случае все тепло, выделяющееся за счет внутреннего трения, будет мгновенно отводиться через стенки трубы и не будет приводить к повышению температуры. Из (8) и (13) видно, что при $\lambda \to \infty$ имеем $\varkappa \to 0$, $a \to \sqrt{\varkappa}/\alpha\sqrt{2}$. Осущестбляя в формулах (15) и (16) предельный переход при $\varkappa \to 0$, получим

$$v_{\text{из}} = \frac{r_0}{\alpha - 2}\left(\frac{br_0}{2k(T_0)}\right)^{1/n}(1 - \xi^{\alpha-2}), \qquad Q_{\text{из}} = \frac{\pi r_0^3}{\alpha}\left(\frac{br_0}{2k(T_0)}\right)^{1/n}. \tag{17}$$

При $n = 1$ реологическое уравнение (1) выражает обычную связь между касательным напряжением и градиентом скорости для ньютоновской жидкости, причем $k = \mu$ представляет коэффициент динамической вязкости. Учитывая, что $\alpha = 4$ при $n = 1$, из (17) получаем формулы для профиля скоростей и расхода в случае изотермического течения ньютоновской жидкости

$$v_{\text{из}} = \frac{br_0^2}{4\mu(T_0)}(1 - \xi^2), \qquad Q_{\text{из}} = \frac{\pi br_0^4}{8\mu(T_0)},$$

совпадающие с известными формулами Пуазейля ([6]).

Поступило
4 I 1966

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Бостанджиян, А. Г. Мержанов, С. И. Худяев, ДАН, **163**, № 1, 133 (1965). [2] Э. Бернхардт, Переработка термопластичных материалов, М., 1962. [3] Д. И. Гальперин, В. В. Мошев, В. Г. Степанова, Колл. журн., **23**, в. 1, 8 (1961). [4] Д. А. Франк-Каменецкий, ЖФХ, **13**, в. 6, 738 (1939). [5] H. Lemke, J. Math., **142**, 118 (1913). [6] С. М. Тарг, Основные задачи теории ламинарных течений, М.— Л., 1951.