А. Г. Баскаков, Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ,
Сиб. матем. журн., 1997, том 38, номер 1, 14–28

https://www.mathnet.ru/smj418

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 1997. Том 38, № 1

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦ ОБРАТНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ*)

А. Г. Баскаков

Пусть G — счетная дискретная абелева группа (с аддитивной формой записи групповой операции), S — подмножество из G, X — комплексное банахово пространство и $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X. Всюду считается, что имеется разложение единицы $P : S \to \operatorname{End} X$, т. е. P — проекторнозначная функция, обладающая свойствами: $P(i)P(j) = 0$ $\forall i \neq j$ и для любого вектора $x \in X$ ряд $\sum\limits_{i\in S} P(i)x$ безусловно сходится к x. Тем самым конечна величина

$$C(P) = \sup_{\alpha_k\in\mathbb{C},\, |\alpha_k|=1} \left\| \sum_{k\in S} \alpha_k P(k) \right\| \geqslant 1, \tag{1}$$

где $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

Далее считается выполненным (см. замечание 1, § 3)

Предположение 1. *Существует такая постоянная $M(P) > 0$, что для любых $k \in G$, $n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел) и $A \in \operatorname{End} X$ имеет место оценка*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} P(i+k)AP(i) \right\| \leqslant M(P) \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|P(i+k)AP(i)\|,$$

где $P(i+k) = 0$, если $i+k \notin S$.

Условия предположения 1 имеют место, например, в случае, если X — гильбертово пространство (или $X = l_p(S, Y)$; см. § 2).

Любому оператору $A \in \operatorname{End} X$ поставим в соответствие матрицу (A_{ij}) $(i, j \in S)$, составленную из операторных блоков $A_{ij} = P(i)AP(j) \in \operatorname{End} X$. Семейство операторов $\{A_{ij};\ i - j = k\}$, где $k \in G$, назовем *k-й диагональю матрицы оператора A.*

Для каждого оператора $A \in \operatorname{End} X$ определим функцию $d_A : G \to \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R}; t \geqslant 0\}$ ($\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел), положив

$$d_A(g) = \sup_{i,j\in S,\, i-j=g} \|A_{ij}\|, \quad g \in G,$$

где $d_A(g) = 0$, если элемент g группы G не представим в виде $g = i - j$ для $i, j \in S$. Функция d_A является важной характеристикой убывания элементов (лежащих вне главной диагонали) матрицы оператора A.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (гранты NZA 000 и NZA 300) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00032a).

Пусть A — непрерывно обратимый оператор из алгебры $\operatorname{End} X$ и $B = A^{-1}$ — обратный оператор. В данной статье сформулировано несколько условий на убывание функции d_A (носящих асимптотический характер) и получены теоремы (теоремы 2–4) о сохранении этих условий для функции d_B. Их доказательство существенно использует результаты Аллана [1] и теорему Бохнера — Филлипса [2], являющиеся обобщением на векторные функции известной теоремы Н. Винера [3] об абсолютно сходящихся рядах Фурье. Отметим, что оценки элементов матриц обратных операторов были получены в статьях С. Демко, В. Мосса, П. Смита [4] (для конечнодиагональных матриц операторов, действующих в l_2), М. А. Шубина [5] (для операторов в пространстве $l_p(\Omega)$, где Ω — счетное дискретное метрическое пространство), В. Г. Курбатова [6] (для разностных и интегральных операторов), И. А. Блатова [7] и автора [8]. В § 3 получены приложения к теории функций (теорема 5) и к асимптотическим оценкам спектральных разложений и коэффициентов Фурье собственных векторов линейных операторов (теорема 6).

§ 1. Ряды Фурье линейных операторов

Приводимые здесь понятия и результаты носят вспомогательный характер.

Введем в рассмотрение два класса функций, определенных на группе G, с помощью которых вводятся исследуемые здесь классы линейных операторов.

Пусть $\alpha : G \to \mathbb{R}_+$ — субэкспоненциальный вес, т. е. α — функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\alpha(g) \geqslant 1$;
2) $\alpha(g_1 + g_2) \leqslant \alpha(g_1)\alpha(g_2)$ $\forall g_1, g_2 \in G$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} \ln \alpha(gn) = 0$ $\forall g \in G$.

Пусть $\mathcal{F}$ — банахова алгебра с единицей e. Символом $L_\alpha(G, \mathcal{F})$ обозначим банахову алгебру функций, определенных на группе G, принимающих значения в алгебре $\mathcal{F}$ со сверткой в качестве умножения и суммируемых (относительно меры Хаара на G) с весом α. При этом положим

$$\|f\|_\alpha = \sum_{g\in G} \|f(g)\|\alpha(g), \qquad f \in L_\alpha(G, \mathcal{F}).$$

Далее используем обозначение $L_\alpha(G)$ для банаховой алгебры $L_\alpha(G, \mathbb{C})$, причем $L_1(G) = L_\alpha(G)$, если $\alpha \equiv 1$.

Рассмотрим положительную функцию $\beta : G \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющую условиям:

1) $\sum\limits_{g\in G} \beta(g) < \infty$;
2) $\sum\limits_{s\in G} \beta(g-s)\beta(s) \leqslant L\beta(g)$ $\forall g \in G$ для некоторого $L > 0$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} \ln 1/\beta(ng) = 0$ $\forall g \in G$.

Такими свойствами обладает функция $\beta : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}_+$, определенная формулой

$$\beta(k) = (1 + \|k\|)^{-\varkappa},$$

где $\|k\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |k_i|$ для $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n = G$ и $\varkappa > n$.

Символом $M_\beta(G, \mathcal{F})$ обозначим банахову алгебру функций, определенных на группе G, принимающих значения в алгебре $\mathcal{F}$ со сверткой функций в качестве умножения и удовлетворяющих условию

$\lim\limits_{g\to\infty}\varphi(g)/\beta(g) = 0$ (т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое конечное множество $K_\varepsilon \subset G$, что $\|\varphi(g)\|_{\mathscr{F}}/\beta(g) < \varepsilon\ \forall g \in G\setminus K_\varepsilon$). Положим $\|\varphi\|_\beta = \sup\limits_{g\in G}\|\varphi(g)\|_{\mathscr{F}}/\beta(g)$ и $M_\beta(G) = M_\beta(G,\mathbb{C})$.

Сформулированные выше условия на функции α и β обеспечивают полупростоту коммутативных банаховых алгебр $L_\alpha(G)$ и $M_\beta(G)$ (см. [9–11]). Спектры этих алгебр (т. е. компактные пространства ненулевых комплексных гомоморфизмов или пространства максимальных идеалов) естественным образом отождествляются с компактной группой $\widehat{G}$ унитарных характеров группы G (см. [9–11]). Для каждой функции f, принадлежащей одной из банаховых алгебр $L_\alpha(G,\mathscr{F})$ и $M_\alpha(G,\mathscr{F})$, через $\hat{f}$ обозначим преобразование Фурье функции f, т. е. $\hat{f} : \widehat{G} \to \mathscr{F}$ — функция, определенная формулой

$$\hat{f}(\gamma) = \sum_{g\in G} f(g)\gamma(-g), \qquad \gamma \in \widehat{G}.$$

Введем в рассмотрение три класса линейных операторов из алгебры $\operatorname{End} X$ с помощью представления $T : \widehat{G} \to \operatorname{End} X$, определенного формулой

$$T(\gamma)x = \sum_{g\in S} P(g)x\gamma(g), \qquad x \in X,\ \gamma \in \widehat{G}.$$

Поскольку из формулы (1) следует, что $\|T(\gamma)\| \leqslant C(P)\ \forall \gamma \in \widehat{G}$, то T — ограниченное сильно непрерывное представление компактной группы $\widehat{G}$.

Каждому оператору $A \in \operatorname{End} X$ поставим в соответствие функцию $\widehat{A} : \widehat{G} \to \operatorname{End} X$, имеющую вид

$$\widehat{A}(\gamma) = T(\gamma)AT(-\gamma), \qquad \gamma \in \widehat{G}.$$

Пусть

$$\widehat{A}(\gamma)x \sim \sum_{k\in G} A_k x\gamma(k), \qquad x \in X, \tag{2}$$

— ряд Фурье функции $\widehat{A}$, где коэффициенты Фурье $A_k \in \operatorname{End} X$ имеют вид

$$A_k = \int_{\widehat{G}} \widehat{A}(\gamma)\gamma(-k)\mu(d\gamma) \tag{3}$$

и μ — мера Хаара на компактной группе $\widehat{G}$, причем $\mu(\widehat{G}) = 1$.

Ряд $\sum\limits_{k\in G} A_k$ назовем *рядом Фурье оператора* A, а операторы A_k $(k \in G)$ — *коэффициентами Фурье оператора* A.

Лемма 1. *Каждый коэффициент Фурье A_k $(k \in G)$ оператора A допускает представление в виде сильно и безусловно сходящегося ряда вида*

$$A_k = \sum_{i+j=k,\, i,j\in S} P(i)AP(j), \tag{4}$$

причем существуют такие положительные постоянные $M_1(P)$, $M_2(P)$, что

$$M_1(P)d_A(k) \leqslant \|A_k\| \leqslant M_2(P)d_A(k) \quad \forall k \in G. \tag{5}$$

Доказательство. Непосредственно из формулы (3) для любых $i,j \in S$, $k \in G$ получаем следующие равенства:

$$P(i)A_kP(j)x = \int\limits_{\widehat{G}} P(i)\widehat{A}(\gamma)P(j)\gamma(-k)x\mu(d\gamma)$$

$$= \int\limits_{\widehat{G}} P(i)T(\gamma)AT(-\gamma)P(j)x\gamma(-k)\mu(d\gamma) = \int\limits_{\widehat{G}} A_{ij}x\gamma(i-j)\gamma(-k)\mu(d\gamma)$$

$$= \Big(\int\limits_{\widehat{G}} \gamma(i-j-k)\mu(d\gamma)\Big)A_{ij}x = \delta_{i-j,k}A_{ij}x, \quad x \in X,$$

где $\delta_{i-j,k}$ — символ Кронекера.

Пусть $S = \{g_1, g_2, \ldots\}$ и $Q_n = P(g_1) + \cdots + P(g_n)$, $n \geqslant 1$, — последовательность проекторов, сильно сходящаяся к тождественному оператору I. Тогда из полученных равенств следует, что

$$A_kx = \lim_{n\to\infty} Q_nA_kx = \lim_{n\to\infty} \sum_{1\leqslant i\leqslant n,\, g_i-s_i=k,\, s_i\in S} P(g_i)AP(s_i)x, \quad x \in X,$$

т. е. верна формула (4), в которой ряд является сильно сходящимся.

Оценки (5) непосредственно следуют из равенства (4) и предположения 1. Лемма доказана.

Следствие. *Все диагонали матрицы оператора A_k ($k \in G$) нулевые, кроме k-й, которая совпадает с k-й диагональю матрицы оператора A.*

В дальнейшем рассматриваются операторы из алгебры $\operatorname{End} X$, для которых считается выполненным

Предположение 2. *Для матрицы оператора $A \in \operatorname{End} X$ выполнено одно из следующих условий:*

1) $\sum\limits_{k\in G} d_A(k)\alpha(k) < \infty$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} d_A(k)/\beta(k) = 0$;

3) $G = \mathbb{Z}^n$ *и существуют постоянные* $M = M(A) > 0$, $\gamma = \gamma(A) \in (0,1)$ *такие, что*

$$d_A(k) \leqslant M\gamma^{\|k\|} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n, \quad \|k\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |k_i|, \ k = (k_1, \ldots, k_n).$$

Совокупности линейных операторов из алгебры $\operatorname{End} X$, удовлетворяющих предположению 2, обозначим через $\operatorname{End}_\alpha X$ (если выполнено условие 1), $\operatorname{End}_\beta X$ (если выполнено условие 2) и $\operatorname{End}_* X$ (если выполнено условие 3, при этом постоянные M и γ свои для каждого оператора $A \in \operatorname{End} X$). Все они являются линейными подпространствами из $\operatorname{End} X$, причем подпространства $\operatorname{End}_\alpha X$ и $\operatorname{End}_\beta X$ являются банаховыми пространствами относительно следующих норм:

$$\|A\|_\alpha = \sum_{k\in G} d_A(k)\alpha(k), \quad A \in \operatorname{End}_\alpha X,$$

$$\|A\|_\beta = \sup_{k\in G} d_A(k)/\beta(k), \quad A \in \operatorname{End}_\beta X.$$

Непосредственно из свойств функций α, β и леммы 1 следует, что ряды Фурье для операторов из выделенных классов абсолютно сходятся, т. е. принадлежат подпространству $\operatorname{End}_1 X = \operatorname{End}_\alpha X$, где $\alpha \equiv 1$.

Лемма 2. *Классы операторов* $\operatorname{End}_\alpha X$, $\operatorname{End}_\beta X$ *и* $\operatorname{End}_* X$ *являются подалгебрами банаховой алгебры* $\operatorname{End} X$, *причем для любой пары операторов* A, B, *принадлежащих одному классу, оператор* $C = AB$ *имеет ряд Фурье вида*

$$C = \sum_{k\in G} C_k, \quad C_k = \sum_{i+j=k} A_i B_j, \quad k \in G, \tag{6}$$

где ряд, определяющий коэффициент Фурье C_k *оператора* C, *абсолютно сходится.*

Доказательство. Ряд Фурье оператора C определяется с помощью функции $\widehat{C}(\gamma) = T(\gamma)CT(-\gamma)$, $\gamma \in \widehat{G}$, которая является произведением функций $\widehat{A}$, $\widehat{B} : \widehat{G} \to \operatorname{End} X$, имеющих абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Следовательно, равенства (6) непосредственно следуют из теоремы об умножении рядов Фурье почти периодических функций.

Имеют место оценки

$$\|C\|_\alpha = \sum_{k\in G} \|C_k\|\alpha(k) \leqslant \sum_{k\in G}\Big(\sum_{i+j=k} \|A_i\|\,\|A_j\|\Big)\alpha(k)$$
$$= \sum_{k\in G}\bigg(\sum_{i+j=k} \frac{\|A_i\|\alpha(i)\|B_j\|\alpha(j)}{\alpha(i)\alpha(j)}\bigg)\alpha(k) \leqslant \|A\|_\alpha\|B\|_\alpha, \qquad A,\ B \in \operatorname{End}_\alpha X,$$

$$\|C\|_\beta = \sup_{k\in G}\frac{\|C_k\|}{\beta(k)} \leqslant \sup_{k\in G}\sum_{i+j=k}\frac{\|A_i\|\beta(i)\|B_j\|\beta(j)}{\beta(i)\beta(j)} \leqslant L\|A\|_\beta\|B\|_\beta,$$
$$A,\ B \in \operatorname{End}_\beta X,$$

где $L > 0$ — постоянная из свойства 2 функции β.

Если A, $B \in \operatorname{End}_* X$ и $\|A_k\| \leqslant M_1\gamma_1^{\|k\|}$, $\|B_k\| \leqslant M_2\gamma_2^{\|k\|}$, $k \in \mathbb{Z}^n$, где M_1, $M_2 > 0$, $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1)$, то непосредственно из (6) следует, что

$$\|C_k\| \leqslant M_1M_2 \sum_{i+j=k} \gamma_1^{\|i\|}\gamma_2^{\|j\|}$$

и для любого числа $\gamma \in (\max\{\gamma_1,\gamma_2\}, 1)$ существует такое число $M > 0$, что $\|C_k\| \leqslant M\gamma^{\|k\|}$ $\forall k \in \mathbb{Z}^n$, т. е. $C = AB \in \operatorname{End}_* X$. Лемма доказана.

Следствие. *Имеют место следующие свойства:*

1) $\|AB\|_\alpha \leqslant \|A\|_\alpha\|B\|_\alpha$ $\forall A,\ B \in \operatorname{End}_\alpha X$;

2) $\|AB\|_\beta \leqslant \|A\|_\beta\|B\|_\beta$ $\forall A,\ B \in \operatorname{End}_\beta X$.

Таким образом, $\operatorname{End}_\alpha X$ и $\operatorname{End}_\beta X$ являются банаховыми алгебрами (относительно введенных в них норм).

§ 2. Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов

Нам удобно сформулировать некоторые понятия и результаты из статей [1, 2], используемые в дальнейшем.

Пусть банахова алгебра $\mathscr{B}$ с единицей обладает следующими свойствами:

1) существуют (замкнутые) коммутативная подалгебра $\mathscr{A}$ (с единицей) и подалгебра $\mathscr{F}$ из центра $Z(\mathscr{B})$ алгебры $\mathscr{B}$ такие, что векторы вида

$$(a,f) = \sum_{i=1}^n a_i f_i, \quad a = (a_1,\dots,a_n) \in \mathscr{A}^n, \ f = (f_1,\dots,f_n) \in \mathscr{F}^n,$$

плотны в $\mathscr{B}$;

2) $\|a_0 f_0\| = \|a_0\|\,\|f_0\|$ для любых $a_0 \in \mathscr{A}$, $f \in \mathscr{F}$;

3) $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \chi(a_i) f_i\right\| \leqslant \|(a,f)\|$ для любых $a = (a_1,\dots,a_n) \in \mathscr{A}^n$, $f = (f_1,\dots,f_n) \in \mathscr{F}^n$ и для любого комплексного гомоморфизма $\chi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ из спектра $\mathrm{Sp}\,\mathscr{A}$ банаховой алгебры $\mathscr{A}$.

Гомоморфизм алгебр $\overline{\chi} : \mathscr{B} \to \mathscr{F}$ называется *обобщенным гомоморфизмом* алгебры $\mathscr{B}$, если существует гомоморфизм $\chi \in \mathrm{Sp}\,\mathscr{A}$ такой, что $\overline{\chi}(af) = \chi(a)f$ $\forall a \in \mathscr{A}\, \forall f \in \mathscr{F}$. Совокупность всех обобщенных характеров алгебры $\mathscr{B}$ обозначим символом $\mathrm{Sp}(\mathscr{B}, \mathscr{F})$.

Перечисленным условиям 1–3 удовлетворяет банахова алгебра $\mathscr{B}$, совпадающая с одной из банаховых алгебр $L_\alpha(G, \mathscr{F})$, $M_\beta(G, \mathscr{F})$, где $\mathscr{F}$ — некоторая банахова алгебра с единицей e. Роль алгебры $\mathscr{A}$ будут играть соответственно алгебры $L_\alpha(G)$ и $M_\beta(G)$, отождествленные с функциями вида fe, $f \in \mathscr{B}_0$, где $\mathscr{B}_0$ — одна из алгебр $L_\alpha(G)$, $M_\beta(G)$. Банахову алгебру $\mathscr{F}$ можно рассматривать как подалгебру в $\mathscr{B}$, если каждому элементу $f \in \mathscr{F}$ поставить в соответствие функцию $f\delta_0$, где δ_0 — единица алгебры $\mathscr{B}_0$. Каждый обобщенный характер алгебры $\mathscr{B}$ определяется преобразованием Фурье (функций из $\mathscr{B}$) в некоторой точке из $\widehat{G}$.

В следующей теореме, доказательство которой можно найти [1, 2], рассматривается банахова алгебра $\mathscr{B}$, удовлетворяющая условиям 1–3.

Теорема 1. *Для того чтобы элемент b из алгебры $\mathscr{B}$ имел левый (правый) обратный, необходимо и достаточно, чтобы для каждого обобщенного характера $\overline{\chi} \in \mathrm{Sp}(\mathscr{B}, \mathscr{F})$ элемент $\overline{\chi}(b) \in \mathscr{F}$ имел левый (правый) обратный в $\mathscr{F}$.*

Для нас важно

Следствие. *Пусть $\mathscr{B}$ — одна из банаховых алгебр $L_\alpha(G, \mathscr{F})$, $M_\beta(G, \mathscr{F})$. Для обратимости элемента $f \in \mathscr{B}$ необходимо и достаточно, чтобы все элементы из $\mathscr{F}$ вида*

$$\hat{f}(\gamma) = \sum_{g \in G} f(g)\gamma(-g), \qquad \gamma \in \widehat{G},$$

были обратимы в алгебре $\mathscr{F}$.

Поскольку основные результаты статьи получены с использованием теоремы 1, для замкнутости изложения приведем ее доказательство. При этом используются следующие два вспомогательных результата (см. леммы 10 и 11 из [2]). При их формулировке применяется гомоморфизм $T_\mathscr{I} : \mathscr{B} \to \mathscr{B}/\mathscr{I}$ банаховых алгебр, построенный по произвольному левому идеалу $\mathscr{I}$ из алгебры $\mathscr{B}$, причем операторы представления $T_\mathscr{I}(a)$, $a \in \mathscr{B}$, имеют вид

$$T_\mathscr{I}(a)\tilde{x} = \widetilde{ax} = ax + \mathscr{I}, \quad \tilde{x} = x + \mathscr{I} \in \mathscr{B}/\mathscr{I}, \quad x \in \mathscr{B}.$$

Лемма 1′. *Пусть $\mathscr{I}$ — левый максимальный идеал из алгебры $\mathscr{B}$. Тогда алгебра $V = T_\mathscr{I}(\mathscr{B}) = \{T_\mathscr{I}(a),\, a \in \mathscr{B}\}$ операторов из $\mathrm{End}(\mathscr{B}/\mathscr{I})$ неприводима.*

Доказательство. Пусть $\tilde{a} \neq 0$ ($a \in \mathscr{B}$) — произвольный фиксированный элемент из фактор-пространства $\mathscr{X} = \mathscr{B}/\mathscr{I}$. Рассмотрим линейное пространство $\mathscr{X}_0$ векторов из $\mathscr{X}$ вида

$$\mathscr{X}_0 = V\tilde{a} = \{T_\mathscr{I}(b)\tilde{a},\, a \in \mathscr{B}\}.$$

Поскольку алгебра $\mathscr{B}$ содержит единицу, то $\mathscr{X}_0$ содержит $\tilde{a} \neq 0$, т. е. $\mathscr{X} \neq \{0\}$. Множество элементов $\mathscr{I}_1 = \{b \in \mathscr{B} : \tilde{b} \in \mathscr{X}_0\}$ является левым идеалом, содержащим максимальный левый идеал $\mathscr{I}$. Поэтому $\mathscr{I}_1 = \mathscr{B}$. Таким образом, $\mathscr{X}_0 = \mathscr{X}$. Лемма доказана.

Лемма 2′. *Если для фиксированного элемента a из алгебры $\mathscr{B}$ и каждого левого максимального идеала $\mathscr{I}$ оператор $T_{\mathscr{I}}(a) \in \mathrm{End}(\mathscr{B}/\mathscr{I})$ имеет левый обратный в алгебре $\mathrm{End}(\mathscr{B}/\mathscr{I})$, то элемент a имеет левый обратный в алгебре $\mathscr{B}$.*

Доказательство. Если элемент a не обратим слева, то он содержится в некотором максимальном левом идеале [10, гл. II, п. 4], и поэтому $T_{\mathscr{I}}(a)$ — нулевой оператор. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть $\mathscr{I}$ — произвольный левый максимальный идеал алгебры $\mathscr{B}$. Тогда $T_{\mathscr{I}} : \mathscr{B} \to \mathrm{End}(\mathscr{B}/\mathscr{I})$ — гомоморфизм банаховых алгебр. Поскольку подалгебра $\mathscr{A}$ принадлежит центру $Z(\mathscr{B})$ алгебры $\mathscr{B}$, то операторы $T_{\mathscr{I}}(a) \in \mathrm{End}(\mathscr{B}/\mathscr{I})$, $a \in \mathscr{A}$, коммутируют со всеми операторами $T_{\mathscr{I}}(b)$, $b \in \mathscr{B}$. Из леммы 1′ следует, что все они скалярные, поэтому существует такой комплексный гомоморфизм $\chi \in \mathrm{Sp}\,\mathscr{A}$, что имеют место равенства

$$T_{\mathscr{I}}(a_0) = \chi(a_0)\tilde{e}, \quad a_0 \in \mathscr{A},$$

где $\tilde{e}$ — единица алгебры $\mathrm{End}(\mathscr{B}/\mathscr{I})$. Тогда для любого элемента $(a, f) \in \mathscr{B}$ вида $a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$, где $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathscr{A}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathscr{F}^n$, получаем

$$\begin{aligned} T_{\mathscr{I}}((a, f)) &= \sum_{i=1}^{n} T_{\mathscr{I}}(a_i) T_{\mathscr{I}}(f_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \chi(a_i) T_{\mathscr{I}}(f_i) = T_{\mathscr{I}}\left(\sum_{i=1}^{n} \chi(a_i) f_i\right) = T_{\mathscr{I}}(\overline{\chi}((a, f))). \end{aligned}$$

Таким образом, $T_{\mathscr{I}}((a, f)) = T_{\mathscr{I}}(\overline{\chi}((a, f)))$ для обобщенного гомоморфизма $\overline{\chi} : \mathscr{B} \to \mathscr{F}$, и это соотношение распространяется на все векторы из $\mathscr{B}$, т. е. $T_{\mathscr{I}}(c) = T_{\mathscr{I}}(\overline{\chi}(c))$ $\forall c \in \mathscr{B}$. Из этих равенств и леммы 2′ получаем, что элемент b обратим слева тогда и только тогда, когда обратимы слева все элементы $\overline{\chi}(b)$, $\overline{\chi} \in \mathrm{Sp}(\mathscr{A}, \mathscr{F})$. Теорема доказана.

Отметим, что в статье [2] получен аналог теоремы 1 для банаховых алгебр векторных функций, а в статье [1] приводятся более общие результаты.

Теорема 2. *Пусть $A \in \mathrm{End}\,X$ — обратимый оператор, удовлетворяющий одному из условий 1–3 предположения 2. Тогда матрица обратного оператора $B = A^{-1} \in \mathrm{End}\,X$ удовлетворяет соответствующим условиям:*

1′) $\sum d_B(k)\alpha(k) < \infty$;

2′) $\lim\limits_{k\to\infty} d_A(k)/\beta(k) = 0$;

3′) *$G = \mathbb{Z}^n$ и существуют постоянные $M_0 > 0$, $\gamma_0 \in (0, 1)$ такие, что $d_A(k) \leqslant M_0\gamma_0^{\|k\|}$ $\forall k \in \mathbb{Z}^n$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{F} = \mathrm{End}\,X$ и символ $\mathscr{B}$ обозначает одну из банаховых алгебр $L_\alpha(G, \mathscr{F})$, $M_\beta(G, \mathscr{F})$. Рассмотрим функцию $f : G \to \mathscr{F}$, определенную равенствами $f(k) = A_k$, $k \in G$, где A_k, $k \in G$, — коэффициенты Фурье оператора A. При выполнении условия 1 предположения 2 функция f принадлежит алгебре $L_\alpha(G, \mathscr{F})$, а если выполнено условие 2, то она является элементом алгебры $M_\beta(G, \mathscr{F})$. Таким образом, $f \in \mathscr{B}$. Непосредственно из формул (2) и (3) следует, что функция $\widehat{A}_1 : \widehat{G} \to \mathscr{F}$, определенная равенствами $\widehat{A}_1(\gamma) = \widehat{A}(-\gamma)$, $\gamma \in \widehat{G}$, является преобразованием Фурье функции $f : G \to \mathscr{F}$. Поскольку $\widehat{A}_1(\gamma) = T(-\gamma)AT(\gamma)$, $\gamma \in \widehat{G}$, —

обратимые операторы, непосредственно из следствия теоремы 1 получаем, что f — обратимый элемент алгебры $\mathscr{B}$. Так как

$$\widehat{f^{-1}}(\gamma) = \widehat{A}(-\gamma)^{-1} = T(-\gamma)BT(\gamma), \quad \gamma \in \widehat{G}, \quad B = A^{-1},$$

то имеет место представление

$$\widehat{B}(\gamma) = T(\gamma)BT(-\gamma) = \sum_{k \in G} B_k\gamma(k) = \sum_{k \in G} f^{-1}(k)\gamma(-k).$$

Следовательно, $A^{-1} \in \mathscr{B}$.

При выполнении условия 3 предположения 2 можно не привлекать теорему 1 и ее следствие. Для доказательства свойства 3′ (теперь $G = \mathbb{Z}^n$) используем быстрое убывание коэффициентов Фурье функции $\widehat{A} : \mathbb{T}^n \to \operatorname{End} X$ ($\mathbb{T}^n = \widehat{G} \subset \mathbb{C}^n$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$). Рассмотрим ее голоморфное расширение $\overline{A} : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathscr{F}$ в некоторую окрестность U тора $\mathbb{T}^n$. Ввиду устойчивости свойства обратимости линейных операторов относительно малых возмущений существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что все операторы $\overline{A}(z)$, $\operatorname{dist}(z, \mathbb{T}^n) < \varepsilon_0$, обратимы. Отсюда следует, что функция $\gamma \mapsto T(\gamma)BT(-\gamma) : \mathbb{T}^n \to \mathscr{F}$ допускает голоморфное расширение на некоторую открытую окрестность $U_0 = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{dist}(z, \mathbb{T}^n) < \varepsilon_0\}$, совпадающее с функцией $z \mapsto \overline{A}(z)^{-1} : U_0 \to \mathscr{F}$. Поэтому ее коэффициенты Фурье B_k ($k \in \mathbb{Z}^n$) удовлетворяют условию 3′ для некоторых $M_0 > 0$, $\gamma_0 \in (0, 1)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если $A \in \operatorname{End}_1 X$ обратим, то $A^{-1} \in \operatorname{End}_1 X$.*

Следствие 2. *Пусть $G = \mathbb{Z}^n$ и $S \subset \mathbb{Z}^n$. Если для обратимости оператора $A \in \operatorname{End} X$ выполнено условие $\lim\limits_{\|k\| \to \infty} d_A(k)(1 + \|k\|)^\varkappa = 0$ при некотором $\varkappa > n$, то для оператора $B = A^{-1}$ выполнено условие $\lim\limits_{\|k\| \to \infty} d_B(k)(1 + \|k\|)^\varkappa = 0$.*

Для доказательства достаточно заметить, что $A \in \operatorname{End}_\beta X$, где $\beta(k) = (1 + \|k\|)^{-\varkappa}$, $k \in \mathbb{Z}^n$.

Символом $l_p(S, Y)$ ($p \in [1, \infty]$) обозначим банахово пространство функций (последовательностей), определенных на S, принимающих значения в комплексном банаховом пространстве Y и суммируемых со степенью p (ограниченных при $p = \infty$). Рассмотрим проекторнозначную функцию $P : S \to \operatorname{End} l_p$, $l_p = l_p(S, Y)$, определенную соотношениями

$$P(i)\varphi = \varphi_i, \quad \varphi \in l_p, \quad i \in S,$$

где функция $\varphi_i \in l_p$ имеет вид $\varphi_i(i) = \varphi(i)$ и $\varphi_i(k) = 0$ при $k \neq i$. При $p \neq \infty$ функция P является разложением единицы, удовлетворяющим условиям предположения 1.

Если $Y = \mathbb{C}$, $A \in \operatorname{End} l_p$ ($p \in [1, \infty)$) и (a_{ij}) — матрица оператора A относительно стандартного базиса в l_p, то $A_{ij} = P(i)AP(j) = a_{ij}I_{ij}$ ($i, j \in S$), где оператор $I_{ij} \in \operatorname{End} l_p$ определяется соотношениями: $I_{ij}e_k = 0$ при $k \neq j$, $I_{ij}e_j = e_i$ ($(e_i; i \in S)$ — базис в l_p). В этом случае $d_A(k) = \sup\limits_{i-j=k} \|A_{ij}\| = \sup\limits_{i-j=k} |a_{ij}|$.

Каждый оператор $A \in \operatorname{End}_1 l_q(S, Y)$, где $q \in [1, \infty)$, определен и ограничен во всех пространствах l_p, $p \in [1, \infty]$, причем оценка $\|A\| \leqslant \|A\|_1 = \sum\limits_{k \in G} d_A(k)$ не зависит от $p \in [1, \infty]$. Далее символом $\operatorname{End}_1 l_\infty(S, Y)$ обозначается подпространство операторов из алгебры $\operatorname{End} l_\infty(S, Y)$, которые при некотором $p \in [1, \infty)$ оставляют инвариантным подпространство $l_p(S, Y)$ и его сужение на $l_p(S, Y)$ принадлежит алгебре $\operatorname{End}_1 l_p(S, Y)$.

Следствие 3. *Если оператор* $A \in \operatorname{End}_1 l_q(S,Y)$ $(q \in [1,\infty])$ *обратим, то он обратим во всех остальных пространствах* $l_p(S,Y)$, $p \in [1,\infty]$.

Следующий результат обязан общему подходу к рассматриваемым вопросам.

Теорема 3. *Существует функция* $\varphi : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}_+$, *обладающая свойством: для любого банахова пространства* X *с заданным разложением единицы* $P : S \to \operatorname{End} X$ *(*S *и* G *фиксируются) и для любого обратимого оператора* $A \in \mathscr{B}$ *(*$\mathscr{B}$ *— одна из банаховых алгебр* $\operatorname{End}_\alpha X$, $\operatorname{End}_\beta X$*) имеет место оценка* $\|A^{-1}\|_{\mathscr{B}} \leqslant \varphi(\|A\|_{\mathscr{B}}, \|A^{-1}\|, C(P))$.

Доказательство. Отсутствие функции φ с такими свойствами означает, что существуют постоянные $C_1, C_2, C_3 > 0$, для которых найдутся последовательность банаховых пространств (X_k), $k \geqslant 1$, с разложениями единиц $P_k : S \to \operatorname{End} X_k$ и последовательность (A_k) обратимых операторов A_k, $k \geqslant 1$, из алгебры $\mathscr{B}_k$ ($\mathscr{B}_k$ — одна из алгебр $\operatorname{End}_\alpha X_k$, $\operatorname{End}_\beta X_k$) такие, что $\|A_k\| \leqslant C_1$, $\|A_k^{-1}\| \leqslant C_2$, $C(P_k) \leqslant C_3$ $\forall k \geqslant 1$, но $\lim \|A_k^{-1}\|_{\mathscr{B}_k} = \infty$.

Рассмотрим банахово пространство $\widetilde{X}_0$ сходящихся к нулю последовательностей вида $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k\| = 0$, $x_k \in X_k$ $(\|x\| = \sup\limits_{k\geqslant 1} \|x_k\|)$ и разложение единицы $P_0 : S \to \operatorname{End} X_0$, $P_0 x = (P_1 x_1, P_2 x_2, \ldots)$. Ясно, что $C(P_0) \leqslant \sup\limits_{k\geqslant 1} C(P_k) \leqslant C_3$. Определим оператор $A_0 \in \operatorname{End} \widetilde{X}_0$ формулой $A_0 x = (A_1 x_1, A_2 x_2, \ldots)$. Тогда $\|A_0\| = \sup\limits_{k\geqslant 1} \|A_k\| \leqslant C_1$, оператор A_0 обратим $(A_k^{-1} x = (A_1^{-1} x_1, A_2^{-1} x_2, \ldots))$, $\|A_0^{-1}\| \leqslant \sup\limits_{k\geqslant 1} \|A_k^{-1}\| \leqslant C_2$.

Из теоремы 2 следует, что оператор A_0^{-1} принадлежит алгебре $\mathscr{B}_0$ ($\mathscr{B}_0$ — одна из соответствующих алгебр $\operatorname{End}_\alpha \widetilde{X}_0$, $\operatorname{End}_\beta \widetilde{X}_0$) и поэтому $\sup\limits_{k\geqslant 1} \|A_k^{-1}\| = \|A_0^{-1}\| < \infty$. Получено противоречие. Теорема доказана.

Отметим, что теорема 2 не дает способа построения функции $\varphi : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}_+$ (способа получения конкретных оценок).

Теорема 4. *Пусть* S *— подмножество из группы* $\mathbb{Z}^n$, $A \in \operatorname{End} X$ *— обратимый оператор и выполнено условие* $\sum\limits_{i\neq j,\, i,j\in S} \|A_{ij}\| < \infty$. *Тогда матрица* (B_{ij}) *обратного оператора* $B = A^{-1}$ *обладает свойством* $\sum\limits_{i\neq j,\, i,j\in S} \|B_{ij}\| < \infty$.

Доказательство. Рассмотрим свободную абелеву группу G, порожденную множеством $\mathbb{Z}^n$ (групповая структура в $\mathbb{Z}^n$ снимается). Группа G может быть реализована как множество всех отображений $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$, имеющих конечный носитель (сумма определяется обычным сложением отображений). Тогда множество S вкладывается в G отождествлением каждого элемента $k \in S$ с функцией $f_k \in G$, имеющей вид: $f_k(m) = 0$ при $m \neq k$ и $f_k(k) = 1$.

При таком выборе группы G каждая k-я диагональ матрицы (A_{ij}) оператора A (при $k \in G$, $k \neq 0$) либо будет нулевой, либо будет состоять из одного элемента A_{ij}, где $i, j \in S$ удовлетворяют условию $i - j = k$. Следовательно, $\sum\limits_{k\in G} d_A(k) < \infty$, и поэтому непосредственно из следствия 1 теоремы 2 получаем, что $\sum\limits_{i\neq j} \|B_{ij}\| \leqslant \sum\limits_{k\in G} d_B(k) < \infty$. Теорема доказана.

§ 3. Приложения к теории функций и спектральной теории линейных операторов

Рассмотрим банахово пространство $C(\mathbb{R})$ непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ комплекснозначных функций. Символом $s(\varphi)$ обозначим спектр Бёрлинга (см. [2, 12, 13]) функции $\varphi \in C(\mathbb{R})$, т. е. множество $\{\lambda_0 \in \mathbb{R} : f * \varphi \neq 0 \ \forall f \in L_1(\mathbb{R}) \text{ с } \hat{f}(\lambda_0) \neq 0\}$.

Если $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — непрерывная почти периодическая функция [12] с рядом Фурье

$$\varphi(t) \sim \sum_{n\geqslant 1} \varphi_n e^{i\lambda_n t},$$

то для функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ свертка функций

$$(f * \varphi)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t-s)\varphi(s)\, ds$$

является почти периодической и ее ряд Фурье имеет вид

$$(f * \varphi)(t) \sim \sum_{n\geqslant 1} \hat{f}(\lambda_n)\varphi_n e^{i\lambda_k t}.$$

Поэтому из теоремы единственности рядов Фурье почти периодических функций следует, что множество $s(\varphi)$ совпадает с замыканием $\overline{\sigma(\varphi)}$ показателей Фурье $\sigma(\varphi) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ функции φ.

Отметим известные свойства спектра Бёрлинга функций из $C(\mathbb{R})$ (см. [12, 13]).

Лемма 3. *Имеют место следующие утверждения*:

1) *если* $\varphi \in C(\mathbb{R})$, *то* $s(\varphi) = \varnothing \Leftrightarrow \varphi = 0$;

2) $s(\varphi_1 + \varphi_2) \subset s(\varphi_1) \cup s(\varphi_2) \ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in C(\mathbb{R})$;

3) $s(f * \varphi) \subset \operatorname{supp} \hat{f} \cap s(\varphi) \ \forall f \in L_1(\mathbb{R}) \ \forall \varphi \in C(\mathbb{R})$;

4) $f * \varphi = 0$, *если* $\operatorname{supp} \hat{f} \cap s(\varphi) = \varnothing$ $(f \in L_1(\mathbb{R}),\ \varphi \in C(\mathbb{R}))$;

5) $f * \varphi = \varphi$, *если* $s(\varphi)$ — *компакт и* $\hat{f} = 1$ *в окрестности множества* $s(\varphi)$ $(f \in L_1(\mathbb{R}),\ \varphi \in C(\mathbb{R}))$;

6) *если* $s(\varphi)$ — *компакт для* $\varphi \in C(\mathbb{R})$, *то* φ *допускает расширение на* $\mathbb{C}$, *которое является целой функцией экспоненциального типа (не превосходящего* $\sigma = \max\{|\lambda| : \lambda \in s(\varphi)\}$*)*;

7) *множество* $s(\varphi)$ *совпадает с носителем преобразования Фурье* $\widehat{\varphi}$ *функции* $\varphi \in C(\mathbb{R})$, *рассматриваемой как обобщенная функция умеренного роста.*

Выделим некоторую функцию f из алгебры $L_1(\mathbb{R})$, преобразование Фурье которой обладает свойствами: $\hat{f}(0) = 1$, $\operatorname{supp} \hat{f} \subset [-1/2, 1/2]$. Рассмотрим семейство функций $\{f_\lambda = f e_\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, где $e_\lambda(t) = \exp i\lambda t$.

Для каждой функции $\varphi \in C(\mathbb{R})$ определим функцию $d_\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, положив $d_\varphi(\lambda) = \|f_\lambda * \varphi\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Согласно лемме 3 функция $f_\lambda * \varphi$ имеет компактный спектр Бёрлинга из множества $[\lambda - 1/2, \lambda + 1/2]$ (ибо $\operatorname{supp} \hat{f}_\lambda \subset [\lambda - 1/2, \lambda + 1/2]$) и, следовательно, является целой функцией. Таким образом, функция d_φ характеризует убывание соответствующих частей функции φ со спектром из отрезков $[\lambda - 1/2, \lambda + 1/2]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (характеризует интенсивность энергетического спектра функции φ, см. [14, гл. 4]).

Если $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — почти периодическая функция с рядом Фурье $\sum\limits_{n\geqslant 1} \varphi_n \exp i\lambda_n t$, то $f_\lambda * \varphi$ имеет ряд Фурье вида

$$(f_\lambda * \varphi)(t) \sim \sum_{n\geqslant 1} \hat{f}_\lambda(\lambda_n)\varphi_n \exp i\lambda_n t = \sum_{|\lambda_n - \lambda|\leqslant 1/2} \varphi_n \hat{f}_\lambda(\lambda_n) \exp i\lambda_n t.$$

В частности, если φ — периодическая с периодом 2π функция, то $d_\varphi(\lambda) \leqslant \max\{|\varphi_n|, |\varphi_{n+1}|\}$ $\forall \lambda \in [n, n+1]$ (если $\varphi(t) \sim \sum\limits_{n\geqslant 1} \varphi_n \exp int$ — ее ряд Фурье). Отметим, что если $\varphi \in C(\mathbb{R})$ является преобразованием Фурье борелевской меры ограниченной вариации μ, то $s(\varphi) = \operatorname{supp} \mu$, и в этом случае $d_\varphi(\lambda) \leqslant \operatorname{var}(\mu, [\lambda - 1/2, \lambda + 1/2])$ ($\operatorname{var}(\mu, [a, b])$ — вариация меры μ на отрезке $[a, b]$).

Предположение 3. *Функция φ удовлетворяет одному из следующих условий*:

1) $\int\limits_{\mathbb{R}} d_\varphi(\lambda)|\lambda|^q\, d\lambda < \infty$ *для некоторого* $q > 1$;

2) $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} d_\varphi(\lambda)|\lambda|^q = 0$ *для некоторого* $q > 1$;

3) $d_\varphi(\lambda) \leqslant C \exp(-\varepsilon|\lambda|)$ *для некоторых* C, $\varepsilon > 0$.

Лемма 4. *Пусть g — функция из алгебры $L_1(\mathbb{R})$, для которой $\operatorname{supp} \hat{g}$ — компактное множество. Тогда существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ и постоянная $C > 0$ такие, что*

$$\|g_\lambda * \varphi\| \leqslant C \sum_{i=1}^{m} d_\varphi(\lambda + \lambda_i) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

В частности, если функция $d_\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет одному из условий предположения 3, то функция $d'_\varphi(\lambda) = \|g_\lambda * \varphi\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяет одному из соответствующих условий:

1′) $\int\limits_{\mathbb{R}} d'_\varphi(\lambda)(1 + |\lambda|)^q\, d\lambda < \infty$;

2′) $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} d'_\varphi(\lambda)|\lambda|^q = 0$;

3′) $d'_\varphi(\lambda) \leqslant M_1 \exp(-\varepsilon|\lambda|)$ *для некоторого числа* $M_1 > 0$.

Доказательство. Поскольку множество $\operatorname{supp} \hat{g}$ компактно и $\hat{f}(0) = 1$, то существуют элементы $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ такие, что $|\hat{f}(\lambda + \lambda_1)| + \dots + |\hat{f}(\lambda + \lambda_n)| > 0$ $\forall \lambda \in \operatorname{supp} \hat{g}$. Тогда функция g принадлежит идеалу, порожденному функциями $f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_m}$ (см. [9]), поэтому она представима в виде $g = \varphi_1 * f_{\lambda_1} + \dots + \varphi_m * f_{\lambda_m}$, где $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ — некоторые функции из алгебры $L_1(\mathbb{R})$. Следовательно,

$$g_\lambda = (\varphi_1 * f_{\lambda_1})e_\lambda + \dots + (\varphi_m * f_{\lambda_m})e_\lambda = (\varphi_1)_{\lambda_m} * f_{\lambda_1+\lambda} + \dots + (\varphi_m)_\lambda * f_{\lambda_m+\lambda},$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Отсюда

$$d'_\varphi(\lambda) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} \|\varphi_i\| \sum_{i=1}^{m} d_\varphi(\lambda + \lambda_i) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть для функции $\varphi \in C(\mathbb{R})$ выполнены условие $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)| > 0$ и одно из условий 1–3 предположения 3. Тогда для функции $\psi(t) = 1/\varphi(t)$ выполнены соответствующие условия*:

1′) $\int\limits_{\mathbb{R}} d_{\psi}(\lambda)|\lambda|^q \, d\lambda < \infty$;

2′) $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} d_{\psi}(\lambda)|\lambda|^q = 0$;

3′) $d_{\psi}(\lambda) \leqslant C_0 \exp(-\varepsilon_0|\lambda|)$ *для некоторых* C_0, $\varepsilon_0 > 0$.

Доказательство. В гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ суммируемых с квадратом на $\mathbb{R}$ комплекснозначных функций определим линейный оператор $A = A_{\varphi} \in \operatorname{End} L_2(\mathbb{R})$ формулой

$$A_{\varphi}x = \mathscr{F}\varphi\mathscr{F}^{-1}x = \mathscr{F}(\varphi\mathscr{F}^{-1}x), \quad x \in L_2(\mathbb{R}),$$

где $\mathscr{F} \in \operatorname{End} L_2(\mathbb{R})$ — оператор Фурье ($\mathscr{F}x = \hat{x}$, $x \in L_2(\mathbb{R})$). Отметим, что $\|A\| = \|\varphi\| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|$.

Рассмотрим разбиение единицы $P : \mathbb{Z} \to \operatorname{End} L_2(\mathbb{R})$, где $P(n)$ — оператор умножения функций из $L_2(\mathbb{R})$ на характеристическую функцию отрезка $[n, n+1]$. Пусть $A = A_{\varphi} \sim \sum A_k$ — ряд Фурье оператора A, построенный с помощью P (здесь $G = S = \mathbb{Z}$). Докажем, что каждое из условий предположения 3 влечет выполнение одного из следующих соответствующих условий:

а) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_A(k)|k|^q < \infty$;

б) $\lim\limits_{|k|\to\infty} d_A(k)|k|^q = 0$;

в) $d_A(k) \leqslant M_1 \exp(-\varepsilon|k|)$, M_1, $\varepsilon > 0$.

Из леммы 1 вытекает, что каждый коэффициент Фурье A_k, $k \in \mathbb{Z}$, оператора A допускает представление вида (4) (где $S = \mathbb{Z}$), из которого ввиду ортогональности проекторов $P(i)$, $i \in \mathbb{Z}$, следует, что $d_A(k) = \|A_k\|$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. Пусть функция $g \in L_1(\mathbb{R})$ имеет преобразование Фурье, обладающее свойствами: $\hat{g} = 1$ на отрезке $[-2, 2]$ и $\operatorname{supp}\hat{g} \subset [-3, 3]$.

Докажем, что имеют место равенства $P(i)A_{\varphi}P(j) = P(i)A_{g_{\lambda}*\varphi}P_j$ для всех $i, j \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих условию $i - j = k$, и всех $\lambda = k \in \mathbb{Z}$ (здесь $g_{\lambda} = ge_{\lambda}$).

Вначале отметим, что если $x_0 \in C(\mathbb{R})$ — бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем, то $Ax_0 = \widehat{\varphi} * x_0$ ($\widehat{\varphi} * x_0$ — свертка преобразования Фурье обобщенной функции φ медленного роста и функции x_0). Поэтому имеет место включение (см. также [13])

$$\operatorname{supp} Ax_0 \subset \operatorname{supp}\widehat{\varphi} + \operatorname{supp} x_0 = \{t + s : t \in s(\varphi),\ s \in \operatorname{supp} x_0\}.$$

Доказываемые равенства вытекают из включений

$$\begin{aligned}\operatorname{supp} P_i(A\varphi - A_{g_{\lambda}*\varphi})P_j x_0 &= [i, i+1] \cap (\operatorname{supp}(\widehat{\varphi} - \hat{g}_{\lambda}\widehat{\varphi}) + [j, j+1])\\ &\subset [i, i+1] \cap (\mathbb{R} \setminus [k-2, k+2] + [j, j+1]) = \varnothing, \quad k = i - j.\end{aligned}$$

Следовательно, k-й коэффициент Фурье операторов A_{φ} и $A_{g_{\lambda}*\varphi}$ совпадает. Отсюда и из леммы 4 получаем, что существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, $C > 0$, что

$$d_A(k) = \|A_k\| = \|g_k * \varphi\| \leqslant C \sum_{i=1}^{m} d_{\varphi}(k + \lambda_i), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Из этой оценки следует выполнение для функции $d_A : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ одного из соответствующих условий а)–в).

Оператор $A = A_{\varphi}$ обратим и обратный $B = A^{-1}$ имеет вид $Bx = \mathscr{F}\psi\mathscr{F}^{-1}x$, т. е. $B = A_{\psi}$. Из теоремы 2 и ее следствия 2 получаем, что функция $d_B(k) = \|B_k\|$, $k \in \mathbb{Z}$ (B_k — k-й коэффициент Фурье оператора B) удовлетворяет одному из соответствующих условий:

а$'$) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k)|k|^q < \infty$;

б$'$) $\lim\limits_{|k|\to\infty} d_B(k)|k|^q = 0$;

в$'$) $d_B(k) \leqslant M_2 \exp -\varepsilon_0|k|$, $k \in \mathbb{Z}$, $M_2 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$.

Докажем, что функция $d_\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ обладает одним из соответствующих условий $1'$–$3'$. При этом используем оценки а$'$)–в$'$).

С этой целью рассмотрим такую функцию $l \in L_1(\mathbb{R})$, что $\hat{l} = 1$ на $[-1, 1]$ и $\operatorname{supp} \hat{l} \subset [-2, 2]$. Оператор $A_{l*\psi}$ представим в виде

$$A_{l*\psi}x = \int\limits_{\mathbb{R}} l(\tau)T(\tau)A_\psi T(-\tau)x\,d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} l(\tau)A_{\psi_\tau}\,d\tau, \quad x \in L_2(\mathbb{R}), \tag{7}$$

где $(T(\tau)x)(s) = (\exp i\tau s)x(s)$, $\tau \in \mathbb{R}$ — группа изометрических операторов из $\operatorname{End} L_2(\mathbb{R})$ и $\psi_\tau(s) = \psi(s-\tau)$ — сдвиг функции ψ на τ. Из включений

$$\operatorname{supp} P_i A_{l_\lambda*\varphi} P_j x \subset [i, i+1] \cap ([k-2, k+2] + [j, j+1]) = \varnothing,$$

где $\lambda = k \in \mathbb{Z}$, $|i-j-k| \geqslant 2$ и $x \in L_2(\mathbb{R})$, следует, что $P_i A_{l_\lambda*\psi} P_j = 0$. С другой стороны, из формулы (7) получаем равенства

$$P_i A_{l_k*\psi} P_j x = \int\limits_{\mathbb{R}} l_k(\tau)T(\tau)P_i A_\psi P_j T(-\tau)x\,d\tau, \quad i, j, k \in \mathbb{Z}, \ x \in L_2(\mathbb{R}).$$

Поэтому имеем следующее представление:

$$A_{l_k*\psi}x = \sum_{|i-j-k|\leqslant 1} P_i A_{l_k*\psi} P_j = \int\limits_{\mathbb{R}} l_k(\tau)T(\tau)(B_{k-1} + B_k + B_{k+1})T(-\tau)x\,d\tau.$$

Отсюда

$$\|A_{l_k+\psi}\| \leqslant \|l\|(d_B(k-1) + d_B(k) + d_B(k+1)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Если $\lambda \in [k-1/2, k+1/2]$, то $f_\lambda * f_k = f_\lambda$ (в силу равенств $\widehat{f_\lambda * l_k}(t) = \widehat{f_\lambda}(t)\widehat{l_k}(t) = \widehat{f_\lambda}(t)$, $t \in \mathbb{R}$), и поэтому для всех $\lambda \in [k-1/2, k+1/2]$ получаем оценки

$$\begin{aligned} d_\psi(\lambda) = \|f_\lambda * \psi\| &= \|A_{f_\lambda*\psi}\| = \|A_{f_\lambda*l_k*\psi}\| \\ &\leqslant \|f\|\,\|A_{l_k*\psi}\| \leqslant \operatorname{const}(d_B(k-1) + d_B(k) + d_B(k+1)), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Следовательно, каждое из условий а$'$)–в$'$) влечет выполнение соответствующего из условий $1'$–$3'$. Теорема доказана.

Доказанную теорему можно рассматривать как обобщение теоремы Н. Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье на функции с «непрерывным» спектром.

Следствие. *Пусть $\varphi \in C(\mathbb{R})$ удовлетворяет одному из условий $1'$, $2'$ теоремы 5 и $F : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — аналитическая в открытой окрестности U замыкания $\overline{\operatorname{Im}\varphi}$ множества значений функции φ. Тогда функция $F(\varphi)$ также удовлетворяет одному из соответствующих условий $1'$–$3'$ (в условии $3'$ могут быть другими постоянные C_0 и ε_0).*

Доказательство. Пусть γ — жорданов контур, окружающий множество $\overline{\operatorname{Im}\varphi}$, причем $\gamma \subset U$. Тогда утверждение следствия вытекает из теоремы 5 и представления функции $F(\varphi)$ в виде

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} (\lambda - \varphi)^{-1} F(\lambda)\,d\lambda.$$

Следствие доказано.

Теперь приступим к применению полученных в § 2 результатов к оценкам спектральных разложений (коэффициентов Фурье) собственных векторов линейных операторов.

Пусть H — сепарабельное комплексное гильбертово пространство и $P : S \to \operatorname{End} H$ — разложение единицы (S — счетное подмножество из группы $\mathbb{Z}^n$).

Рассмотрим линейный оператор $A \in \operatorname{End} H$, принадлежащий банаховой алгебре $\mathscr{B}$, которая совпадает с одной из подалгебр $\operatorname{End}_\alpha H$, $\operatorname{End}_\beta H$ и $\operatorname{End}_* H$ (см. § 1).

Теорема 6. *Пусть λ_0 — изолированная точка спектра $\sigma(A)$ оператора A, являющаяся простым собственным значением, и a, b — собственные векторы операторов A и A^*, отвечающие собственным значениям λ_0 и $\bar{\lambda}_0$ соответственно, причем $(a, b) = 1$ ($Aa = \lambda_0 a$, $A^* b = \bar{\lambda}_0 b$). Рассмотрим последовательность*

$$d(k; a, b) = \sup_{i-j=k} \|P_i b\| \left\|P_j^* a\right\|, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

1) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d(k; a, b)\alpha(k) < \infty$, *если* $A \in \operatorname{End}_\alpha H$;

2) $\lim\limits_{|k|\to\infty} d(k; a, b)/\beta(k) = 0$, *если* $A \in \operatorname{End}_\beta H$;

3) $d(k; a, b) \leqslant M_0 \gamma_0^{|k|}$, $M_0 > 0$, $\gamma_0 \in (0, 1)$, *если* $A \in \operatorname{End}_* H$.

Доказательство. Пусть $P = P(\sigma_0, A) \in \operatorname{End} H$ — проектор Рисса, построенный по одноточечному спектральному множеству $\sigma_0 = \{\lambda_0\}$ из $\sigma(A)$. Представим его в виде

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_0} R(\lambda, A)\, d\lambda, \quad \gamma_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| = \gamma_0\},$$

где ε_0 — достаточно малое число и $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ — резольвента оператора A. Из теорем 2, 3 получаем, что функция $\lambda \mapsto R(\lambda, A) : \gamma_0 \to \mathscr{B}$ ограничена и непрерывна (как функция, удовлетворяющая резольвентному тождеству Гильберта). Следовательно, оператор P принадлежит той же алгебре $\mathscr{B}$.

По условию теоремы проектор P можно представить также в виде $Px = (x, a)b$, поэтому $d_P(k) = d(k; a, b)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, т. е. выполнено одно из соответствующих свойств 1–3. Теорема доказана.

Пусть $S = \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ и разложение единицы $P : \mathbb{N} \to \operatorname{End} H$ задается с помощью некоторого ортонормированного базиса (e_n) пространства H, т. е. $P(n)x = (x, e_n)e_n$, $n \geqslant 1$. В этом случае для любого оператора $A \in \operatorname{End} H$ имеют место равенства $d_A(k) = \sup\limits_{i-j=k} |a_{ij}|$, где $a_{ij} = (Ae_j, e_i)$, $i, j \geqslant 1$, — матрица оператора A относительно базиса (e_n).

Следствие. *Пусть оператор $A \in \operatorname{End} H$ удовлетворяет условиям теоремы 6 и самосопряжен. Тогда выполнены свойства 1–3 теоремы 5, где $a = b$ и*

$$d(k; a, b) = \sup_{i-j=k} |\alpha_i \alpha_j|, \quad \alpha_i = (a, e_i), \quad i \geqslant 1,$$

— коэффициенты Фурье вектора a относительно базиса (e_n).

Замечание. Все полученные в статье результаты справедливы, если не требовать выполнения предположения 1. Однако в таком случае следует для любого оператора $A \in \operatorname{End} X$ положить

$$d_A(k) = \|A_k\|, \quad k \in G,$$

где A_k, $k \in G$, — коэффициенты Фурье оператора A (относительно заданного разложения единицы $P : S \to \operatorname{End} X$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Allan G. R.* Ideals of vector-valued functions // Proc. London Math. Soc. 1968. V. 18, N 3. P. 193–216.
2. *Bochner S., Phillips R. S.* Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings // Ann. of Math. (2). 1942. V. 43, N 3. P. 409–418.
3. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. М.: Наука, 1975. Т. 2.
4. *Demko S., Moss W. F., Smith P. W.* Decay rates for inverses of band matrices // Math. Comp. 1984. V. 43. P. 491–499.
5. *Шубин М. А.* Псевдоразностные операторы и их функция Грина // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1985. Т. 49, № 3. С. 652–671.
6. *Курбатов В. Г.* Об алгебрах разностных и интегральных операторов // Функцион. анализ и его прил. 1990. Т. 24, № 2. С. 98–99.
7. *Блатов И. А.* Об оценках элементов обратных матриц и о модификациях метода матричной прогонки // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 2. С. 10-21.
8. *Баскаков А. Г.* Теорема Винера и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Функцион. анализ и его прил. 1990. Т. 24, № 3. С. 64–65.
9. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. М.: Физматгиз, 1960.
10. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
11. *Domar Y.* Harmonic analysis based on certain commutative Banach algebras // Acta Math. 1956. V. 96. P. 1–66.
12. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. М.: Мир, 1966. Т. 2.
13. *Herz C. S.* The spectral theory of bounded functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 94. P. 181–232.
14. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982.

г. Воронеж *Статья поступила 18 января 1995 г.*