Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Б. Я. Солон, Степени перечислимости ограниченных множеств, *Модел. и анализ информ. систем*, 2022, том 29, номер 2, 104–114

https://www.mathnet.ru/mais770

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.90
5 декабря 2025 г., 05:44:49

MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS, VOL. 29, NO. 2, 2022
journal homepage: www.mais-journal.ru

DISCRETE MATHEMATICS IN RELATION TO COMPUTER SCIENCE

Enumeration Degrees of the Bounded Sets

B. Y. Solon[1]
DOI: 10.18255/1818-1015-2022-2-104-114

[1]Ivanovo State University, 39 Ermaka str, Ivanovo 153025, Russia.

MSC2020: 03D25
Research article
Full text in Russian

Received April 27, 2022
After revision May 23, 2022
Accepted May 25, 2022

The term "total enumeration degree" is related to the fact that the e-degree is total if and only if it contains a graph of some total function. In a number of works by the author and a group of mathematicians from the University of Wisconsin-Madison, the so-called "graph-cototal enumeration degrees" were considered, i. e. e-degrees containing the complement of the graph of some total function $f(x)$. In this article, the next step is taken – the enumeration degrees of sets bounded from above or below by a graph of a total function are considered. More precisely, the set A is bounded from above if $A = \{\langle x, y\rangle : y < f(x)\}$ for some total function $f(x)$ and the set A is bounded from below if $A = \{\langle x, y\rangle : y > f(x)\}$ for some total function $f(x)$.

The article presents a number of results showing the existence of nontotal enumeration degrees containing bounded sets, and the constructed e-degrees are quasi-minimal. An important result is the one stating that bounded sets have the Friedberg property related to the jump inversion.

Keywords: enumeration degrees; quasi-minimal enumeration degrees; bounded sets

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Boris Yakovlevich Solon correspondence author	orcid.org/0000-0002-4037-1610. E-mail: bysolon@gmail.com Head of the Department of Fundamental Mathematics, Doctor of Science, Professor.

For citation: B. Y. Solon, "Enumeration Degrees of the Bounded Sets", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 2, pp. 104-114, 2022.

© Solon B. Y., 2022
This is an open access article under the CC BY license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ, ТОМ 29, № 2, 2022
сайт журнала: www.mais-journal.ru

DISCRETE MATHEMATICS IN RELATION TO COMPUTER SCIENCE

Степени перечислимости ограниченных множеств

Б. Я. Солон[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2022-2-104-114

[1]Ивановский государственный университет, ул. Ермака, д.39, г. Иваново, 153025 Россия.

УДК 510.676, 519.7
Научная статья
Полный текст на русском языке

Получена 27 апреля 2022 г.
После доработки 23 мая 2022 г.
Принята к публикации 25 мая 2022 г.

Термин «тотальная степень перечислимости» связан с тем, что e-степень тотальна тогда и только тогда, когда она содержит график некоторой тотальной функции. В ряде работ автора и группы математиков из University of Wisconsin-Madison рассматривались так называемые «граф-кототальные степени перечислимости», т. е. e-степени, содержащие дополнение графика некоторой тотальной функции $f(x)$. В данной статье сделан следующий шаг – рассмотрены степени перечислимости множеств, ограниченных сверху или снизу графиком тотальной функции. Более точно, множество A ограничено сверху, если $A = \{\langle x, y\rangle : y < f(x)\}$ для некоторой тотальной функции f(x) и множество A ограничено снизу, если $A = \{\langle x, y\rangle : y > f(x)\}$ для некоторой тотальной функции $f(x)$.
В статье приводится ряд результатов, показывающих существование нетотальных степеней перечислимости, содержащих ограниченные множества, причем построенные e-степени являются квазиминимальными. Важным является результат, утверждающий, что ограниченные множества обладают свойством Фридберга, связанным с инверсией скачка.

Ключевые слова: степени перечислимости; квазиминимальные степени перечислимости; ограниченные множества

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Борис Яковлевич Солон автор для корреспонденции	orcid.org/0000-0002-4037-1610. E-mail: bysolon@gmail.com Заведующий кафедрой фундаментальной математики, доктор физ.-мат. наук, профессор.

Для цитирования: B. Y. Solon, “Enumeration Degrees of the Bounded Sets”, *Modeling and analysis of information systems*, vol. 29, no. 2, pp. 104-114, 2022.

© Солон Б. Я., 2022
Эта статья открытого доступа под лицензией CC BY license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Введение

Для произвольного множества A е-степени $\deg_e(A)$ и $\deg_e(\bar{A})$ не обязательно должны быть сравнимы. Чтобы потребовать их сравнимость, в статье [1] предложено выделить два интересных подкласса е-степеней. Первый был введен одновременно с самими степенями перечислимости. Множество A называется *тотальным*, если $\bar{A} \leq_e A$, и е-степень тотальной, если она содержит некоторое тотальное множество. Заметим, что A — тотальное множество тогда и только тогда, когда $A \equiv_e A \oplus \bar{A}$. Так как каждое множество вида $A \oplus \bar{A}$ тотально, то тотальные е-степени в точности е-степени множеств $A \oplus \bar{A}$ для некоторого A. Фактически, отображение $A \longrightarrow A \oplus \bar{A}$ индуцирует изоморфизм между структурой T-степеней и структурой тотальных е-степеней.

Термин «тотальный» связан с тем, что е-степень тотальна тогда и только тогда, когда она содержит график некоторой тотальной функции. В частности, если A — тотальное множество, то $\deg_e(A)$ содержит график характеристической функции множества A.

Второй подкласс появляется, если перевернуть отношение сводимости между A и $\bar{A}$. Множество A называется *ко-тотальным*, если $A \leq_e \bar{A}$, и е-степень *ко-тотальной*, если она содержит некоторое ко-тотальное множество.

Определение 1. *Множество A называется граф-кототальным, если $A = \bar{f}$, где $\bar{f} = \{\langle x, y\rangle \,:\, y \neq f(x)\}$, для некоторой тотальной функции f.*

Ясно, что если A граф-кототальное множество, то $A \leq_e \bar{A}$, т. е. любое граф-кототальное множество является ко-тотальным. В статье [1] доказано, что существуют ко-тотальные множества, которые не являются граф-кототальными. Вместе с дополнением графика тотальной функции можно рассматривать и два его подмножества $\hat{f} = \{\langle x, y\rangle \,:\, y < f(x)\}$ и $\check{f} = \{\langle x, y\rangle \,:\, y > f(x)\}$.

Определение 2. *Множество A называется ограниченным сверху, если $A = \hat{f}$ для некоторой тотальной функции f. Множество A называется ограниченным снизу, если $A = \check{f}$ для некоторой тотальной функции f.*

Впервые понятие ограниченного сверху множества было введено в совместной статье [2]. В этой работе доказаны следующие результаты.

Теорема 1. *Для любой тотальной невычислимой функции f такой, что множество $\omega \setminus \{x \,:\, \langle x, i\rangle \in \mathrm{graph}(f) \wedge i \leq 1\}$ бесконечно, существует тотальная функция h такая, что $\hat{h} \subseteq \hat{f}$, $h \leq_e f$ и $A = \hat{f} \setminus \hat{h}$ является $\hat{f}$ — квазиминимальным множеством.*

Теорема 2. *Любая тотальная е-степень $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'$ содержит тотальную функцию f такую, что $\deg_e(\hat{f})$ — квазиминимальная е-степень.*

Теорема 3. *Для каждой тотальной е-степени $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'$ существует тотальная функция f такая, что $\mathbf{b} = \deg_e(\hat{f})$ — квазиминимальная е-степень и $\mathbf{a} = \mathbf{b}'$.*

В дальнейшем е-степени ограниченных сверху множеств изучались в статье моего аспиранта С. Рожкова [3]. Им были получены следующие результаты:

1. Для любой тотальной е-степени $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'$ существует е–степень $\mathbf{b} \leq \mathbf{a}$ такая, что $\mathbf{b} \neq \deg_e(\hat{f})$ для любой тотальной функции $f \in \mathbf{a}$.
2. Пусть $\mathbf{a}$ — тотальная е-степень и $\mathbf{b} \leq \mathbf{a}$ — произвольная е-степень, тогда существует е-степень $\mathbf{c} \neq \deg_e(\hat{f})$ для некоторой тотальной функции $f \in \mathbf{a}$, такая, что $\mathbf{a} = \mathbf{b} \cap \mathbf{c}$.
3. Для любой е-степени $\mathbf{b} > \mathbf{0}'$ существует квазиминимальная е-степень $\mathbf{a} \neq \deg_e(\hat{f})$ для некоторой тотальной функции f, такая, что $\mathbf{a} \mid \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b}'$.

Цель данной статьи — продолжить изучение е-степеней ограниченных множеств, обратив особое внимание на е-степени ограниченных снизу множеств.

1. Основные определения и предварительные утверждения

Мы будем использовать понятия и терминологию, которые приняты в монографии [4]. Пусть $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел; A, B, …, X, Y (с индексами или без) — подмножества ω. Пусть, как обычно, $\langle x, y \rangle$ — канторовский номер упорядоченной пары (x, y). Если z — канторовский номер пары (x, y), то пусть $\langle z \rangle_1 = x$ и $\langle z \rangle_2 = y$. Пусть PF — множество одноместных частичных арифметических функций. Для данной частичной функции $\alpha : \omega \longrightarrow \omega$ пусть $\mathrm{dom}(\alpha)$, $\mathrm{ran}(\alpha)$ и $\mathrm{graph}(\alpha) = \{\langle x, \alpha(x) \rangle : x \in \mathrm{dom}(\alpha)\}$ область определения, множество значений и график α соответственно. Будем писать $\alpha(x)\downarrow$, если $x \in \mathrm{dom}(\alpha)$ и $\alpha(x)\uparrow$, если $x \notin \mathrm{dom}(\alpha)$. Для обозначения частичных функций из PF будем использовать малые греческие буквы начала алфавита: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ Функция α называется *тотальной*, если $\mathrm{dom}(\alpha) = \omega$. Мы ограничим использование символов f, g, h только для обозначения тотальных функций. Множество тотальных функций обозначим через TF. Множество A называется *однозначным*, если $A = \mathrm{graph}(\alpha)$ для некоторой частичной функции α. Пусть $\tau^{-1}(X) = \{(x, y) : \langle x, y \rangle \in X\}$, тогда для однозначного множества A имеем $\tau^{-1}(A) = \alpha$, где $A = \mathrm{graph}(\alpha)$. Обозначим через SV класс всех однозначных множеств. С целью полноты изложения приведем ряд основных определений из монографии [4] с некоторыми терминологическими изменениями.

Определение 3. *Любое всюду определенное однозначное отображение* $\Phi : 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$ *называется оператором.*

Определение 4. *Оператор*

$$\Phi_z(X) = \{x : (\exists u)[\langle x, u \rangle \in W_z \ \&\ D_u \subseteq X]\}$$

называется e-оператором с геделевым номером z.

Очевидно, что любой e-оператор Φ обладает свойствами:

(i) *Монотонности* $A \subseteq B \Longrightarrow \Phi(A) \subseteq \Phi(B)$,

(ii) *Непрерывности* $(\forall x)[x \in \Phi(A) \Longrightarrow (\exists D)[D \subset A \wedge x \in \Phi(D)]$.

Определение 5. $A \leq_e B \iff \exists z[A = \Phi_z(B)]$, $\deg_e(A) = \{X : X \equiv_e A\}$ *— e-степень множества* A, $\deg_e(A) \leq \deg_e(B) \iff A \leq_e B$, $\alpha \leq_e B \iff \mathrm{graph}(\alpha) \leq_e B$, $\mathbf{D}_e$ *— частично упорядоченное множество (верхняя полурешетка) e-степеней.*

Пусть $\varphi_z^A(x) = \{z\}^A(x)$ — функция, вычислимая на машине Тьюринга P_z с оракулом для множества A.

Определение 6. *Функция* η *называется A-частично вычислимой, если* $\eta = \varphi_z^A$ *для некоторого* z. *Функция* f *называется A-вычислимой, если* $f = \varphi_z^A$ *для некоторого* z *и* $\mathrm{dom}(\varphi_x^A) = \omega$.

Множество A *вычислимо* в B, если характеристическая функция $c_A(x)$ — B-вычислима. Множество A *вычислимо перечислимо в* B, если $A = \varnothing$ или $A = \mathrm{ran}(f)$ для некоторой B-вычислимой функции f.

Важную роль в теории вычислимости играет операция скачка, применяемая к множествам и степеням. Понятие скачка привязано к алгоритмической сводимости, поэтому рассматриваются скачки, связанные с тьюринговой сводимостью и с e-сводимостью. Дадим эти определения и уточним роль скачков с точки зрения соответствующей сводимости.

Определение 7. *Множество* $J_T(A) = \{x : \varphi_x^A(x) \downarrow\} = \{x : x \in W_x^A\} = K^A$ *называется T-скачком множества A.*

T-скачок множества A — это множество $J_T(A)$, которое решает проблему остановки для всех вычислительных относительно A процедур: «Для любого данного n, $n \in W_n^A$ или нет?».

e-скачок множества A должен быть таким множеством, которое отвечает на вопрос: «Для любых данных x и n, $x \in \Phi_n(A)$ или нет?». Следовательно, определение e-скачка множества A должно быть сконструировано таким образом, чтобы он являлся наименьшим (по e-сводимости) множеством, к которому e-сводится характеристическая функция каждого множества, e-сводимого к A.

Пусть $A^* = \{x \ : \ x \in \Phi_x(A \oplus \bar{A})\}$ и $A_0^* = \{\langle x, z\rangle \ : \ x \in \Phi_z(A \oplus \bar{A})\}$.

Предложение 1. *Для любого множества A*

1.1 $A^* \equiv A_0^*$;

1.2 $A^* \equiv J_T(A)$;

1.3 $\bar{A}^* \leq_e A \otimes \bar{A}$;

1.4 $A^* \equiv_e A \oplus \bar{A}$.

Из предложения 1.2 следует, что операция $*$ совпадает с точностью до изоморфизма с T-скачком. Однако как показывает следующее предложение, рассматривать ее как e-скачок в $\mathbf{D}_e$ в соответствии с требованиями, которые мы накладываем на скачки множеств, нельзя.

Предложение 2. *Существуют множества A и B, такие, что $A \equiv_e B$ и $A^* \not\equiv_e B^*$.*

Доказательство. Пусть $A = C^*$ и $B = C \oplus \bar{C}$ для некоторого множества C. По предложению 1.4 $A \equiv_e B$. Далее, имеем $A^* = (C^*)^* \equiv_e C^* \oplus \bar{C}^*$ и $B^* = (C \oplus \bar{C})^* \equiv_e (C \oplus \bar{C}) \oplus C \bar{\oplus} \bar{C} \equiv_e C \oplus \bar{C}$. Если предположить, что $A^* \equiv_e B^*$, то $C^* \oplus \bar{C}^* \equiv_e C \oplus \bar{C}$, откуда следует, в частности, что $\bar{C}^* \leq_e C \oplus \bar{C}$. Это противоречит предложению 1.3. □

Пусть $A^e = \{x \ : \ x \in \Phi_x(A)\}$ и $A_0^e = \{\langle x, z\rangle \ : \ x \in \Phi_z(A)\}$. В статье [5] множество A^e называется *e-цилиндрификацией* множества A.

Предложение 3. *Для любого множества A*

3.1 $A \leq_1 A^e \leq_e A$;

3.2 $A \leq_e B \Longleftrightarrow A \leq_1 B^e \Longleftrightarrow A^e \leq_1 B^e$;

3.3 $\bar{A}^e \not\leq_e A$;

3.4 $A^e \equiv A_0^e$.

Из свойства 3.1 следует, что операция e-цилиндрификации не может играть роль e-скачка, т.к. примененная к e-степени $\deg_e(A)$ оставляет её на месте в $\mathbf{D}_e$.

Пусть $A^\diamond = \bar{A}^e$. В статье [1] множество $A^\diamond$ называется *скипом* множества A.

Предложение 4. *Для любых множеств A и B*

4.1 $\forall X[X \in \deg_e(A) \longrightarrow \bar{X} \leq_e A^\diamond]$;

4.2 $A \equiv_e B \longrightarrow A^\diamond \equiv_e B^\diamond$;

4.3 $A^\diamond \not\leq_e A$;

4.4 $\bar{K} \leq_e A \longrightarrow \exists B[B^\diamond \equiv_e A]$ *(аналог теоремы Фридберга об инверсии скачка).*

Несмотря на сходство операции скип с T-скачком в предыдущих позициях, полного соответствия нет. Можно привести примеры множеств, для которых $A \not\leq_e A^\diamond$. Если изменить определение операции скип, чтобы гарантировать все свойства скачка, то возникает определение e-скачка, введенное Купером. (Купер в [6], 1984 г., благодарит своего ученика Макэвоя за помощь в обеспечении правильного определения оператора e-скачка. Сорби заметил, что оригинальное «неправильное» определение Купера на самом деле было определением оператора скип.)

Определение 8. *Множество* $J_e(A) = A \oplus \bar{A}^e$ *называется e-скачком множества A. Будем также использовать обозначение* A' *вместо* $J_e(A)$.

Предложение 5. *Для любых множеств A и B*

5.1 $A \leq_e B \longrightarrow A' \leq_1 B'$;

5.2 $A' \equiv (A^e)^*$;

5.3 $A^* \leq_1 A' \leq_1 (A^*)^*$;

5.4 $\exists B[A \equiv B^e] \longrightarrow A' \equiv A^*$ *(аналог теоремы Фридберга об инверсии скачка);*

5.5 $\bar{A} \leq_e A \longrightarrow A' \equiv (A^*)^*$;

5.6 $A \leq_1 A^* \leq_1 A'$;

5.7 $A'' \equiv (A')^*$;

5.8 $\exists A, B[A' \leq_1 B' \wedge A \not\leq_e B]$.

Из предложения 5.1 следует, что e-скачок множества корректно индуцирует оператор скачка на e-степенях. Будем писать $\mathbf{a}'$ для скачка e-степени $\mathbf{a}$. Определение e-скачка гарантирует, что $A <_e A'$, что и ожидается от скачка. С другой стороны, мы теряем два свойства, которые скип разделяет с T-скачком. e-скачок всегда тотален, поэтому он не может быть отображен на все e-степени выше $\mathbf{0}_e{}'$. Однако можно доказать аналог теоремы Фридберга для любой тотальной степени выше $\mathbf{0}_e{}'$. Предложение 5.8 показывает, что $A' \leq_1 B'$ не обязательно означает, что $A \leq_e B$. Таким образом, ни скип, ни е-скачок не являются совершенным аналогом скачка Тьюринга. Справедливости ради, замечу, что первое определение e-скачка множества дал М. Г. Розинас в малодоступной статье [7]. Отмечу также, что в статье [8] было введено еще одно определение e-скачка множества. Можно доказать, что все e-скачки (Rozinas, Cooper, McEvoy), примененные к одному множеству A принадлежат одной e-степени $\deg_e(A')$. В дальнейшем будем использовать для e-скачка определение 8 и обозначения, приведенные в этом определении.

2. Ограниченные множества и их степени перечислимости

Перейдем к рассмотрению граф-кототальных и ограниченных множеств в смысле определения 2. Простейшие свойства ограниченных множеств приведены в следующем предложении.

Предложение 6. *Для любой тотальной функции f и любого множества A*

6.1 $\bar{f} \leq_e f$; $\hat{f} \leq_e f$; $\check{f} \leq_e f$;

6.2 $\hat{c}_A \equiv_e A$;

6.3 $\bar{A} \leq_e \check{c}_A$;

6.4 $\hat{c}_A \equiv_e c_A$;

6.5 *если f — вычислимая функция, то* $\bar{f} \equiv_e \bar{f} \equiv_e \hat{f} \equiv_e \check{f}$;

6.6 $f \leq_e \check{f} \leftrightarrow \check{f} \equiv_e c_{\mathrm{graph}(f)}$.

Доказательство. Утверждения 6.1, 6.2, 6.4 и 6.5 очевидны.

6.3 следует из эквивалентности $\forall x[x \in \bar{A} \leftrightarrow \langle x, 1\rangle \in \check{c}_A]$.

6.6. Пусть $f \leq_e \check{f}$, с учетом 6.1 получаем, что $f \equiv_e \check{f}$. Кроме того, для любой тотальной функции f имеем е-эквивалентность $f \equiv_e c_{\mathrm{graph}(f)}$, следовательно, $\check{f} \equiv_e c_{\mathrm{graph}(f)}$. Обратно, пусть $\check{f} \equiv_e c_{\mathrm{graph}(f)}$, тогда $f \equiv_e \check{f}$, в частности, $f \leq_e \check{f}$. □

Следствие 1. (i) *Если A — в.п., невычислимое множество, то* $c_A \not\leq_e \hat{c}_A$;

(ii) *Если A — в.п., невычислимое множество, то* $c_A \leq_e \check{c}_A$.

Доказательство. (i). Пусть A — в.п., невычислимое множество, тогда $\mathrm{graph}(c_A)$ не является в.п. множеством. В то же время, в силу утверждения 6.2 мы имеем, что $\mathrm{graph}(\hat{c}_A)$ является в.п. множеством. Если предположить, что $c_A \le_e \hat{c}_A$, то получаем, что $\mathrm{graph}(c_A)$ является в.п., противоречие.

(ii). Так как A — в.п., невычислимое множество, то $A \le_e \check{c}_A$. Кроме того, $\forall x[x \in \bar{A} \iff \langle x, 1\rangle \in \check{c}_A]$, поэтому $\bar{A} \le_e \check{c}_A$. Следовательно, $c_A \le_e \check{c}_A$. □

Теорема 4. *Существует тотальная функция f такая, что*

(i) $\hat{f}$ — *квазиминимальное множество;*

(ii) $\check{f}$ — *квазиминимальное множество;*

(iii) $\hat{f}$ *и* $\check{f}$ — *оба квазиминимальные множества.*

Доказательство. (i). Это утверждение доказано в более сильной форме в статье [2].

(ii). Докажем более сильное утверждение: любая тотальная e-степень $\mathbf{a} \ge \mathbf{0}'$ содержит тотальную функцию f такую, что $\deg_e(\check{f})$ — квазиминимальная e-степень. Пусть $\mathbf{a} \ge \mathbf{0}'$ — тотальная e-степень, тогда [9] в силу тотальности e-степени $\mathbf{a}$ существует ретрассируемое множество $A \in \mathbf{a}$. Это значит, что существует ч. в. функция ψ такая, что $A \in \mathrm{dom}(\psi)$, $\psi(a_0) = a_0$ и $\psi(a_{n+1}) = a_n$ для всех $n \in \omega$, где $a_0 < a_1 < \dots < a_n < \dots$ — прямой пересчет множества A. Можно предполагать, что при этом $0 \notin A$.

Построим тотальную функцию f с помощью конструкции, вычислимой относительно A, такую, что $\mathrm{ran}(f) = A \cup \{0\}$ и $\deg_e(\check{f})$ — квазиминимальная e-степень.

На шаге $t+1$ через f_t обозначен начальный сегмент функции f, построенный к концу шага t. Пусть $x_t = \max(\mathrm{dom}(f_t)) + 1$ и $X_t = \{x : x \ge x_t\}$. Символ F будем использовать в качестве переменной для конечных множеств.

Шаг 0. Полагаем $f_0 = \varnothing$ и $x_0 = 0$.

Шаг $3s+1$. Полагаем $f_{3s+1} = f_{3s} \cup \{(x_{3s}, a_s)\}$.

Шаг $3s+2$. Проверим выполнимость условия

$$\exists y[y \in A \wedge \langle x_{3s+2}, y\rangle \in W_s]. \tag{1}$$

Если (1) выполнено, то пусть y^*— наименьшее y, для которого выполнено условие (1). Пусть $y^* = a_n$ для некоторого n. Полагаем

$$f_{3s+2} = f_{3s+1} \cup \{(x_{3s+1}, a_n)\}.$$

Если (1) не выполнено, то полагаем

$$f_{3s+2} = f_{3s+1} \cup \{(x_{3s+1}, 0)\}.$$

Шаг $3s+3$. Проверим выполнимость условия

$$\exists F[(F \subseteq \check{f}_{3s+2} \cup X_{3s+2} \times \omega') \wedge (\Phi_s(F) \text{ — неоднозначное множество})], \tag{2}$$

где $\omega' = \{1, 2, \dots\}$.

Если условие (2) выполняется, то пусть F^*— конечное множество, удовлетворяющее (2) и имеющее наименьший канонический индекс. Пусть $x^* = \max\{x : \exists y[\langle x, y\rangle \in F^*]\}$. Если $x^* \ge x_{3s+2}$, то полагаем

$$f_{3s+3} = f_{3s+2} \cup \{(x_{3s+2}, 0), \dots, (x^*, 0)\}.$$

Если $x^* < x_{3s+2}$, то полагаем

$$f_{3s+3} = f_{3s+2}.$$

Если условие (2) не выполняется, то полагаем

$$f_{3s+3} = f_{3s+2}.$$

Описание конструкции закончено. Из конструкции следует, что $f_s \subseteq f_{s+1}$ для всех $s \in \omega$, поэтому определение $f = \bigcup_{s\in\omega} f_s$ корректно. Докажем, что функция f удовлетворяет условию теоремы, т.е. что множество $\check{f} = \{\langle x, y\rangle : y > f(x)\}$ квазиминимально.

Заметим, что шаги $3s + 2$ и $3s + 3$ вычислимы в множестве $\bar{K}_0 \oplus A$, где $K_0 = \{\langle x, y\rangle : x \in W_y\}$, т.е. проверка условий, которая производится на этих шагах, вычислима с оракулом для множества $\bar{K}_0 \oplus A$. Шаги $3s + 1$, $s \in \omega$ вычислимы относительно множества A. Так как, по условию, $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'$, поэтому $\bar{K}_0 \leq_T A$ и вся конструкция построения функции эффективна с оракулом для множества A. Следовательно, $f \leq_T A$. Из того, что f — тотальная функция, а A — ретрассируемое множество, получаем, что $f \leq_e A$. Так как $A \leq_e f$ в силу того, что $\mathrm{ran}(f) \setminus \{0\} = A$, то $f \equiv_e A$.

Шаги $3s + 2$ обеспечивают $\check{f} \neq W_s$ для всех $s \in \omega$. В самом деле, если на некотором шаге $3s + 2$ выполнено условие (1), то после определения начального сегмента $f_{3s+2} \subseteq f$ имеем $\langle x_{3s+2}, a_n\rangle \in W_s$ и $\langle x_{3s+2}, a_n\rangle \notin \check{f}$. Если (1) не выполнено, то $\langle x_{3s+2}, a_0\rangle \notin W_s$ и $\langle x_{3s+2}, a_0\rangle \in \check{f}$ и $a_0 > 0$.

Наконец, докажем, что $\check{f}$ — квазиминимальное множество. Пусть для некоторой тотальной функции g выполнено $g \leq_e \check{f}$, тогда $\mathrm{graph}(g) = \Phi_s(\check{f})$ для некоторого s. Рассмотрим шаг $3s+3$. Если на этом шаге условие (2) не выполняется, то верно

$$\forall F[(F \subseteq \check{f}_{3s+2} \cup X_{3s+2} \times \omega') \longrightarrow (\Phi_s(F) \text{ — однозначное множество})]. \tag{3}$$

Тогда множество $\Phi_s(\check{f}_{3s+2} \cup X_{3s+2} \times \omega')$ однозначно, так как в противном случае для некоторого $F \subseteq \check{f}_{3s+2} \cup X_{3s+2} \times \omega'$ имели бы неоднозначность множества $\Phi_s(F)$, что противоречит условию (3).

Ясно, что

$$\mathrm{graph}(g) = \Phi_s(\check{f}) \subseteq \Phi_s(\check{f}_{3s+2} \cup X_{3s+2} \times \omega').$$

В силу тотальности функции g и однозначности множества $\Phi_s(\check{f}_{3s+2} \cup X_{3s+2} \times \omega')$ имеем равенство

$$\mathrm{graph}(g) = \Phi_s(\check{f}_{3s+2} \cup X_{3s+2} \times \omega').$$

Отсюда следует, что $g \leq_e \check{f}_{3s+2} \cup X_{3s+2} \times \omega'$. Поскольку множество $\check{f}_{3s+2} \cup X_{3s+2} \times \omega'$ вычислимо, то функция g — вычислимая.

Если на шаге $3s + 3$ условие (2) выполняется, то конструкция обеспечивает неоднозначность множества $\Phi_s(\check{f})$. В этом случае не может быть равенства $\mathrm{graph}(g) = \Phi_s(\check{f})$.

(iii). Применение на четных шагах конструкции из пункта (i) и на нечетных — конструкции из пункта (ii) позволит построить функцию f, такую, что оба множества $\hat{f}$ и $\check{f}$ квазиминимальны. Теорема полностью доказана. □

Следствие 2. (i) $\exists f[f \not\leq_e \hat{f}]$;

(ii) $\exists f[f \not\leq_e \check{f}]$.

Доказательство. (i). Пусть f — тотальная функция, построенная в ходе доказательства теоремы 4(i). Из конструкции следует, что f не является вычислимой функцией. Так как множество $\hat{f}$ является квазиминимальным, то из сводимости $f \leq_e \hat{f}$ следует, что функция f должна быть вычислимой, противоречие.

(ii). Аналогично функция f, построенная в ходе доказательства теоремы 4(ii), доказывает данное следствие. □

Теорема 5. *Любая тотальная e-степень* $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'$ *содержит тотальную функцию* f *такую, что* $\mathbf{b} = \deg_e(\check{f})$ *— квазиминимальная e-степень и* $\mathbf{a} = \mathbf{b}'$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'$ — тотальная е-степень, тогда в ней существует множество $A \in \mathbf{a}$ такое, что $A \equiv_e c_A$. Заметим, что последнее утверждение справедливо для любой тотальной е-степени. Построим с помощью пошаговой конструкции тотальную функцию f, удовлетворяющую следующим требованиям для всех $s \in \omega$:

(N_s): $\check{f} \neq W_s$;

(Q_s): $\Phi_e(\check{f}) = g \longrightarrow g$ — вычислимая функция;

(J) $\check{f}' \equiv_e A$.

Будем использовать те же обозначения, которые были введены в доказательстве предыдущей теоремы.

Шаг 0. Полагаем $f_0 = \varnothing$ и $x_0 = 0$.

Шаг $4s + 1$. Пусть $t = 4s$. Проверим выполнимость условия

$$\exists y[y > 0 \wedge \langle x_t, y \rangle \in W_s] \tag{1}$$

Если (1) выполнено, то пусть y^* — наименьшее y, для которого $\langle x_t.y \rangle \in W_s$. Полагаем

$$f_{4s+1} = f_{4s} \cup \{(x_t, y^* + 1)\}.$$

Если (1) не выполнено, то полагаем

$$f_{4s+1} = f_{4s} \cup \{(x_t, 0)\}.$$

Шаг $4s + 2$. Пусть $t = 4s + 1$. Проверим выполнимость условия

$$\exists F[(F \subseteq \check{f}_t \cup X_t \times \omega') \wedge (\Phi_s(F) \text{ — неоднозначное множество})], \tag{2}$$

Если условие (2) выполняется, то пусть F^*— конечное множество, удовлетворяющее (2) и имеющее наименьший канонический индекс. Пусть $x^* = \max\{x : \exists y[\langle x, y \rangle \in F^*]\}$. Если $x^* \geq x_t$, то полагаем

$$f_{4s+2} = f_{4s+1} \cup \{(x_t, 0), \ldots, (x^*, 0)\}.$$

Если $x^* < x_t$, то полагаем

$$f_{4s+2} = f_{4s+1}.$$

Если условие (2) не выполняется, то полагаем

$$f_{4s+2} = f_{4s+1}.$$

Шаг $4s + 3$. Пусть $t = 4s + 1$. Проверим выполнимость условия

$$\exists \sigma[(f_t \subset \sigma \wedge s \in \Phi_s(\check{\sigma})], \tag{3}$$

где σ — переменная, принимающая значения в множестве функций, определенных на начальных отрезках множества ω (в множестве начальных сегментов).

Если условие (3) выполняется, то пусть σ^*— начальный сегмент, удовлетворяющий (3) с наименьшим каноническим индексом графика graph(σ^*). Полагаем $f_{4s+3} = \sigma^*$. Если условие (3) не выполняется, то полагаем $f_{4s+3} = f_{4s+2}$.

Шаг $4s + 4$. Пусть $t = 4s + 3$. Полагаем

$$f_{4s+4} = f_{4s+3} \cup \{(x_t, 1 - c_A(s))\}.$$

Описание конструкции закончено. Из конструкции следует, что $f_s \subseteq f_{s+1}$ для всех $s \in \omega$, поэтому определение $f = \bigcup_{s \in \omega} f_s$ корректно. Докажем, что полученная в результате конструкции функция f удовлетворяет требованиям (N_s); (Q_s), $s \in \omega$ и требованию (J).

Требования (N_s), $s \in \omega$ удовлетворены благодаря шагам $4s+1$. В самом деле, докажем, что $\check{f} \neq W_s$. Если условие (1) выполнено, то $\langle x_t, y^* \rangle \in W_s$ и $f(x_t) = y^* + 1$. В этом случае по определению операции $\check{f}$ имеем $\langle x_t, y^* \rangle \notin W_s$. Если условие (1) не выполнено, то $f(x_t) = 0$. Тогда все числа $\langle x_t, 1 \rangle, \langle x_t, 2 \rangle, \ldots$ принадлежат множеству $\check{f}$. В то же время, отрицание условия (1) влечет, что для всякого $y > 0$ имеем $\langle x_t, y \rangle \notin W_s$.

Требования (Q_s), $s \in \omega$ удовлетворены благодаря шагам $4s+2$. Докажем, что $\check{f}$ — квазиминимальное множество. Пусть для некоторой тотальной функции g выполнено $g \leq_e \check{f}$, тогда $\mathrm{graph}(g) = \Phi_s(\check{f})$ для некоторого s. Рассмотрим шаг $4s + 2$. Если на этом шаге условие (2) не выполняется, то верно

$$\forall F[(F \subseteq \check{f}_t \cup X_t \times \omega') \longrightarrow (\Phi_s(F) \text{ — однозначное множество})]. \tag{2$'$}$$

Тогда множество $\Phi_s(\check{f}_t \cup X_t \times \omega')$ однозначно, так как в противном случае для некоторого $F \subseteq \check{f}_t \cup X_t \times \omega'$ имели бы неоднозначность множества $\Phi_s(F)$, что противоречит условию $(2')$.

Ясно, что

$$\mathrm{graph}(g) = \Phi_s(\check{f}) \subseteq \Phi_s(\check{f}_t \cup X_t \times \omega').$$

В силу тотальности функции g и однозначности множества $\Phi_s(\check{f}_t \cup X_t \times \omega')$ имеем равенство

$$\mathrm{graph}(g) = \Phi_s(\check{f}_t \cup X_t \times \omega').$$

Отсюда следует, что $g \leq_e \check{f}_t \cup X_t \times \omega'$. Поскольку множество $\check{f}_t \cup X_t \times \omega'$ вычислимо, то функция g — вычислимая.

Если на шаге $4s + 2$ условие (2) выполняется, то конструкция обеспечивает неоднозначность множества $\Phi_s(\check{f})$. В этом случае не может быть равенства $\mathrm{graph}(g) = \Phi_s(\check{f})$.

Докажем, что удовлетворено требование (J). Конструкция обеспечивает вычислимость шагов $4s + 1$, $4s + 2$, $4s + 3$, $s \in \omega$ в $\bar{K}_0$ и вычислимость шагов $4s + 4$, $s \in \omega$ в $A \equiv_e c_A$. Поскольку $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'$, то вся конструкция построения функции f эффективна с оракулом для множества A. Следовательно, $f \leq_T A$. Из того, что f — тотальная функция, а множество A е-эквивалентно тотальной функции c_A, получаем, что $f \leq_e A$.

Проверяя на шагах $4x + 3$, $x \in \omega$ выполнимость условия (3), имеем

$$x \in \Phi_x(\check{f}) \leftrightarrow \mathrm{graph}(f_{4x+2}) \neq \mathrm{graph}(f_{4x+3}).$$

Следовательно, $J(\check{f}) \leq_e A$.

Чтобы проверить сводимость $A \leq_e J(\check{f})$, покажем, что последовательность начальных сегментов $\{f_t\}_{t\in\omega}$ и, следовательно, последовательность вычислимых множеств $\{\check{f}_t\}_{t\in\omega}$ вычислима относительно $\check{f}'$. Так как $c_A(s) = 1 - f_{4s+4}(x_{4s+3})$, поэтому $c_A \leq_e f$. Ясно, что $\check{f} \leq_e J(\check{f})$. Все шаги, кроме $4s + 4, s \in \omega$ вычислимы в $\bar{K}_0$, а на шагах $4s + 4, s \in \omega$ выполняется построение

$$f_{4s+4} = f_{4s+3} \cup \{(x_t, 1 - c_A(s))\},$$

которое вычислимо в $\check{f}$. Следовательно, $A \leq_e J(\check{f})$ и требование (J) удовлетворено.

Пусть $\mathbf{b} = \mathrm{graph}(\check{f})$. Конструкция в доказательстве теоремы обеспечивает, что $\mathbf{b}$ — квазиминимальная е-степень и $\mathbf{a} = \mathbf{b}'$. Теорема доказана. □

Заключение

Результаты, изложенные в данной статье, дополняют и завершают исследование степеней перечислимости ограниченных множеств, начатое в работе [2]. Важным является результат, следующий из теоремы 5, о том, что ограниченные снизу множества обладают свойством Фридберга, связанным с инверсией скачка.

References

[1] U. Andrews, H. Ganchev, R. Kuyper, S. Lempp, J. Miller, A. Soskova, and M. Soskova, "On cototality and the skip operator in the enumeration degrees", *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 372, no. 3, pp. 1631–1670, 2019.

[2] B. Solon and S. Rozhkov, "Enumeration degrees of the bounded total sets", in *International Conference on Theory and Applications of Models of Computation*, Springer, 2006, pp. 737–745.

[3] S. Rozhkov, "Properties of e-degrees of the bounded total sets", *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 44, no. 7, pp. 452–454, 2010.

[4] H. Rogers Jr, *Theory of recursive functions and effective computability*. New York: McGraw-Hill, 1967.

[5] M. G. Rosinas, "Chastichnie stepeni i r-stepeni", *Siberian Mathematical Journal*, vol. 15, no. 6, pp. 1323–1331, 1974.

[6] S. B. Cooper, "Partial degrees and the density problem. Part 2: The enumeration degrees of the Σ2 sets are dense", *The Journal of symbolic logic*, vol. 49, no. 2, pp. 503–513, 1984.

[7] M. G. Rosinas, "Operacia skachka dlja nekotorih vidov svodimosti", *VINITI Dep*, pp. 3185–76,

[8] K. McEvoy, "Jumps of quasi-minimal enumeration degrees", *The Journal of symbolic logic*, vol. 50, no. 3, pp. 839–848, 1985.

[9] J. Case, "Enumeration reducibility and partial degrees", *Annals of mathematical logic*, vol. 2, no. 4, pp. 419–439, 1971.