А. С. Морозов, Счетные однородные булевы алгебры, *Алгебра и логика*, 1982, том 21, номер 3, 269–282

Алгебра и логика, 21, №3 (1982), 269-282

УДК 517.11

СЧЕТНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

А. С. МОРОЗОВ

Изучаются счетные однородные в смысле [3, с. 66] булевы алгебры (б. а.). Все такие б. а. описаны с точностью до изоморфизма и построены как б. а. над порядками. Получено описание сильно конструктивизируемых однородных б. а. В § 3 это описание счетных однородных б. а. применено для доказательства некоторых полугрупповых квазитождеств для квазиоднородных б. а.

Методы, примененные в статье, широко используют специфику счетных б. а., и их вряд ли удастся применить для несчетных мощностей.

Перейдем к обозначениям:

Б. а. будем обозначать готическими буквами $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$, а их основные множества – одноименными латинскими буквами $A, B, \ldots$. Через $\mathfrak{B}\upharpoonright a$ обозначим ограничение $\mathfrak{B}$ на элемент a. Элементарные характеристики $ch(\mathfrak{B}) = \langle ch_1(\mathfrak{B}), ch_2(\mathfrak{B}), ch_3(\mathfrak{B})\rangle$ для б. а. и элементов б. а., идеалы $\mathcal{I}(\mathfrak{B})$ определим как в [1]. Через $At(a)$ обозначим множество атомов, меньших a. Через $\equiv$ и $\cong$ обозначим соответственно элементарную эквивалентность и изоморфизм; через $\omega, \eta, \tilde{n}$ – порядковые типы множеств N (натуральных чисел), рациональных чисел и конечного множества из n элементов соответственно; обозначим $\alpha \times \beta$ – декартово произведение линейных порядков α и β:

$$\langle \alpha_1, \beta_1\rangle < \langle \alpha_2, \beta_2\rangle \leftrightarrow \beta_1 < \beta_2 \vee [\beta_1 = \beta_2 \,\&\, \alpha_1 < \alpha_2].$$

Определение б. а. над порядком L (будем обозначать ее $\mathfrak{B}_L$), а также определение сильной конструктивизируемости можно найти в [2]. Далее, W_i – нумерация Клини всех рекурсивно-перечислимых множеств; Σ_n^0, Π_n^0 – классы иерархии Клини–Мостовского. Из [2] будет использована

ЛЕММА 0.0 (критерий Воота). Пусть $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$ – счетные б.а. $\mathcal{B}_0 \cong \mathcal{B}_1 \leftrightarrow$ существует $S \subseteq B_0 \times B_1$ такое, что

$$1)\ \langle x,y\rangle \in S \to (x=0 \leftrightarrow y=0);$$

$$2)\ \langle x,y\rangle \in S \to \forall x_0 \leqslant x \exists y_0 \leqslant y (\langle x \setminus x_0, y \setminus y_0\rangle \in S \,\&\, \langle x_0, y_0\rangle \in S);$$

$$3)\ \langle x,y\rangle \in S \to \forall y_0 \leqslant y \exists x_0 \leqslant x (\langle x \setminus x_0, y \setminus y_0\rangle \in S \,\&\, \langle x_0, y_0\rangle \in S);$$

$$4)\ \langle x,y\rangle \in S \leftrightarrow \langle \bar{x}, \bar{y}\rangle \in S.$$

Нам понадобится также критерий однородности для счетных б. а., доказательство которого несложно и здесь не приводится:

ЛЕММА 0.1. Счетная б.а. однородна $\leftrightarrow \forall a \forall b (ch(a) = ch(b) \,\&\, ch(\bar{a}) = ch(\bar{b})) \to \forall a_0 \leqslant a \exists b_0 \leqslant b$ $(ch(a_0) = ch(b_0) \,\&\, ch(a \setminus a_0) = ch(b \setminus b_0))$.

§ 1. Классификация однородных счетных булевых алгебр

Здесь мы получим классификацию счетных однородных б. а. по типам изоморфизма. Из этой классификации мы в дальнейшем сделаем выводы о числе однородных счетных б. а., элементарно эквивалентных данной, а также об их сильной конструктивизируемости. Нам понадобятся несколько лемм:

ЛЕММА 1.0. Если $\mathcal{B}$ – счетная однородная б.а., то $\forall a \in B \; \mathcal{B} \upharpoonright a$ однородна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b, c \leqslant a$, $ch(b) = ch(c)$ и $ch(a \setminus b) = ch(a \setminus c)$, тогда $ch(\bar{b}) = ch(\bar{c})$ и, следовательно, для любого $d \leqslant b$ найдется $f \leqslant c$ такой, что $ch(d) = ch(f)$ и $ch(b \setminus d) = ch(c \setminus f)$.

ЛЕММА 1.1. Алгебры $\mathcal{B}_{\omega \times \eta}$, $\mathcal{B}_{\omega \times \eta + \tilde{1} + \eta}$, $\mathcal{B}_{\tilde{n}} (n < \omega)$, $\mathcal{B}_{\tilde{n} + \eta} (n < \omega)$, $\mathcal{B}_{\omega}$, $\mathcal{B}_{\eta + \omega}$, $\mathcal{B}_{\omega + \omega}$, $\mathcal{B}_{\omega + \omega + \tilde{1} + \eta}$ – с точностью до изоморфизма все однородные не более чем счетные б.а. первой характеристики 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО достаточно провести для атомных б. а. Пусть $\mathcal{B}$ – счетная атомная бесконечная б. а. Если не существует такого $a \in B$, что $|At(a)| = |At(\bar{a})|$, то, применяя лемму 0.0, име –

ем $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}_\omega$.

Пусть, наоборот, $a \in B$ таков, что $|At(\bar{a})| = |At(a)| = \omega$. Здесь возникают два варианта: если не существует $b \leqslant a$ такого, что $|At(b)| = |At(a \setminus b)| = \omega$, то $\mathcal{B} \upharpoonright a \cong \mathcal{B}_\omega$; в силу однородности, $\mathcal{B} \upharpoonright a \cong \mathcal{B} \upharpoonright \bar{a}$ и, следовательно, $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}_{\omega+\omega}$. Если же такое b существует, то пусть c – произвольный элемент такой, что $|At(c)| = |At(\bar{c})| = \omega$. В силу однородности $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \upharpoonright c \cong \mathcal{B} \upharpoonright a$, а потому c делится на 2 бесконечноатомных элемента.

Отсюда следует, что и любой элемент c такой, что $|At(c)| = \omega$, делится на 2 бесконечноатомных.

Всюду далее $F(\mathcal{B})$ – идеал Фреше б. а. $\mathcal{B}$. Значит, $\mathcal{B}/F(\mathcal{B})$ безатомна. Действительно, пусть $b \in B$ и $b/F(\mathcal{B})$ – атом, тогда $|At(b)| = \omega$. Пусть c_0 и c_1 – два бесконечноатомных элемента таких, что $c_0 \cap c_1 = 0$ и $c_0 \cup c_1 = b$. Но тогда $c_0/F(\mathcal{B}) \neq 0 \neq c_1/F(\mathcal{B})$ и $0 < c_0/F(\mathcal{B}) < b/F(\mathcal{B})$, $\mathcal{B}/F(\mathcal{B})$ безатомна.

Известно, что тогда $\mathcal{B}/F(\mathcal{B}) \cong \mathcal{B}_\eta$, и значит, применяя лемму 0. 0, имеем $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}_{\omega \times \eta}$.

Будем писать для краткости: $\mathcal{B}^{(0)} \rightleftharpoons \mathcal{B}$, $\mathcal{B}^{(n+1)} \rightleftharpoons \mathcal{B}^{(n)}/\mathcal{I}(\mathcal{B}^{(n)})$. Обозначим через $b^{(n)}$ образ b в $\mathcal{B}^{(n)}$ при естественном гомоморфизме.

ЛЕММА 1. 2. *Если $\mathcal{B}$ – однородная счетная б. а., то для любого $n \geqslant 0$ б. а. $\mathcal{B}^{(n)}$ однородна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будем вести методом индукции: $\mathcal{B}^{(0)}$ однородна. Пусть $\mathcal{B}_1$ – некоторая счетная однородная б. а. Покажем, что $\mathcal{B}_1/\mathcal{I}(\mathcal{B}_1)$ однородна. Пусть $a, \bar{a} \notin \mathcal{I}$ ($\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{B}_1)$); $ch(a/\mathcal{I}) = ch(b/\mathcal{I})$, $ch(\bar{a}/\mathcal{I}) = ch(\bar{b}/\mathcal{I})$; тогда

$$ch(a) = \langle ch_1(a/\mathcal{I}) + 1, \quad ch_2(a/\mathcal{I}), \quad ch_3(a/\mathcal{I}) \rangle,$$
$$ch(b) = \langle ch_1(b/\mathcal{I}) + 1, \quad ch_2(b/\mathcal{I}), \quad ch_3(b/\mathcal{I}) \rangle.$$

Выписав аналогичные равенства для $ch(\bar{a})$ и $ch(\bar{b})$, получаем, что $ch(a) = ch(b)$ и $ch(\bar{a}) = ch(\bar{b})$. Пусть $c'/\mathcal{I} \leq a/\mathcal{I}$. Положим $c = c' \cap a$. Пусть d таково, что $ch(c) = ch(d)$ и $ch(a \setminus c) = ch(b \setminus d)$. Тогда $ch(d/\mathcal{I}) = ch(c/\mathcal{I}) = ch(c'/\mathcal{I})$ и $ch(a/\mathcal{I} \setminus c/\mathcal{I}) = ch(b/\mathcal{I} \setminus d/\mathcal{I})$. Пусть доказано, что $\mathcal{B}^{(n-1)}$ однородна, тогда и $\mathcal{B}^{(n)} \cong \mathcal{B}^{(n-1)}/\mathcal{I}(\mathcal{B}^{(n-1)})$ однородна. Что и требовалось.

Обратное неверно, например, $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}_{\omega+\eta+\omega^2+\eta}$ – не однородная булева алгебра, но $\mathcal{L}^{(1)} \cong \mathcal{L}_{\tilde{2}}$ – однородная б. а.

ЛЕММА 1. 3. Пусть $\mathcal{L}$ однородна, $ch_1(\mathcal{L}) > 0$, $a_0, a_1 \in B$, $ch(a_0) = ch(a_1) = \langle 0, \infty, 0 \rangle$. Тогда $\mathcal{L} \upharpoonright a_0 \cong \mathcal{L} \upharpoonright a_1$, $\mathcal{L} \upharpoonright a_0$ и $\mathcal{L} \upharpoonright a_1$ однородные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что $\mathcal{L} \upharpoonright a_0 \cong \mathcal{L} \upharpoonright a_1$, легко следует из однородности $\mathcal{L}$. Однородность $\mathcal{L} \upharpoonright a_0$ следует из леммы 1. 0.

СЛЕДСТВИЕ 1. 4. Пусть $\mathcal{L}$ – однородна, $ch_1(\mathcal{L}) > 0$. Тогда $\forall a \in B \ \ ch(a) = \langle 0, \infty, 0 \rangle \rightarrow \mathcal{L} \upharpoonright a$ изоморфна либо $\mathcal{L}_\omega$, либо $\mathcal{L}_{\omega \times 2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1. 3, $\mathcal{L} \upharpoonright a$ – атомная однородная счетная б. а. Вспомним лемму 1. 1 и покажем, что случай $\mathcal{L} \upharpoonright a \cong \mathcal{L}_{\omega+\omega}$ невозможен. Действительно, тогда, в силу однородности, мы должны иметь $\mathcal{L}_{\omega+\omega} \cong \mathcal{L}_\omega$. Противоречие.

Пусть $B_\omega \leftrightharpoons \{ a \in B \mid ch(a) = \langle 0, \infty, 0 \rangle \}$. Ввиду леммы 1. 2 и следствия 1. 4, при $ch_1(\mathcal{L}) > 0$ возможен один и только один из трех случаев:

0) $B_\omega = \varnothing$;

1) $B_\omega = \{ a \in B \mid \mathcal{L} \upharpoonright a \cong \mathcal{L}_{\omega \times 2} \} \neq \varnothing$;

2) $B_\omega = \{ a \in B \mid \mathcal{L} \upharpoonright a \cong \mathcal{L}_\omega \} \neq \varnothing$.

Все они, например, реализуются соответственно в $\mathcal{L}_{\omega+2}$, $\mathcal{L}_{\omega+2}$, $\mathcal{L}_{\omega+\omega+2}$. Определим для однородной б. а. $\mathcal{L}$ ее тип $\rho(\mathcal{L})$. В случае, когда $ch_1(\mathcal{L}) > 0$, положим $\rho(\mathcal{L})$ равным номеру случая, реализующегося для B_ω. Если $ch_1(\mathcal{L}) = 0$, то $\rho(\mathcal{L})$ положим равным такому порядку L из леммы 1. 1, что $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}_L$ и $\rho(\mathbb{0}) \leftrightharpoons \varnothing$.

Случай $\rho(\mathcal{L}^{(n)}) = 2$ – особый, что показывает следующая

ЛЕММА 1. 5. Пусть $\mathcal{L}$ – счетная однородная б. а., $\rho(\mathcal{L}^{(n)}) = 2$, тогда $\mathcal{L}^{(n+1)} \cong \mathcal{L}_1$ (атомной б. а. с одним атомом).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $\rho(\mathcal{L}^{(n)}) = 2$, $|\mathcal{L}^{(n+1)}| > 2$, тогда в $\mathcal{L}$ найдутся a_0 и a_1 такие, что $a_0 \cup a_1 = 1$, $a_0 \cap a_1 = 0$ и $a_0^{(n+1)} \neq 0 \neq a_1^{(n+1)}$. Пусть $b \in B$ обладает свойством $\mathcal{L}^{(n)} \upharpoonright b^{(n)} \cong \mathcal{L}_\omega$. Тогда рассмотрим

$$b' \leftrightharpoons \begin{cases} b \cap a_0, & \text{если } \mathcal{L}^{(n)} \upharpoonright (b \cap a_0)^{(n)} \cong \mathcal{L}_\omega, \\ b \cap a_1, & \text{если } \mathcal{L}^{(n)} \upharpoonright (b \cap a_1)^{(n)} \cong \mathcal{L}_\omega. \end{cases}$$

Пусть, для определенности, $b' \leqslant a_0$. Тогда $ch(a_0 \setminus b') = ch(a_0)$ &

$\& ch(a_1 \cup b') = ch(a_1)$. Из однородности $\mathcal{B}$ следует $\mathcal{B}\upharpoonright a_1 \cong \mathcal{B}\upharpoonright(a_1 \cup \cup b')$, поэтому найдется $b'' \leq a_1$ такой, что $\mathcal{B}^{(n)}\upharpoonright b''^{(n)} \cong \mathcal{B}_\omega$, значит, $\mathcal{B}^{(n)}\upharpoonright(b' \cup b'')^{(n)} \cong \mathcal{B}_{\omega+\omega}$, что невозможно, так как в этом случае из однородности $\mathcal{B}$ следует

$$\mathcal{B}_\omega \cong \mathcal{B}^{(n)}\upharpoonright b^{(n)} \cong \mathcal{B}^{(n)}\upharpoonright(b' \cup b'')^{(n)} \cong \mathcal{B}_{\omega+\omega}.$$

Противоречие.

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_1$ – счетные однородные б.а., $ch_1(\mathcal{B}_0) < \infty$. Если $\rho(\mathcal{B}_0^{(n)}) \cong \rho(\mathcal{B}_1^{(n)})$ для любого $m < \omega$, то $\mathcal{B}_0 \cong \mathcal{B}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим подмножество $S \subseteq B_0 \times B_1$ так: $S \rightleftharpoons \{\langle a,b \rangle \mid ch(a^i) = ch(b^i)$ при $i = 0,1\}$. Покажем, что для S выполнены условия 1 – 4 критерия Воота. В проверке нуждается лишь условие 2 (3-е ему симметрично). Пусть $\langle a,b \rangle \in S$, $a_0 \leq a$. Пусть $ch(a_0) = \langle k_0, m_0, \varepsilon_0 \rangle$, $ch(a) = \langle k, m, \varepsilon \rangle$. Нетривиален лишь случай, когда $k_0 < k$ и $m_0 = \infty$. Ввиду того, что $\rho(\mathcal{B}_0^{(k_0)}) = \rho(\mathcal{B}_1^{(k_1)})$, существует $b' \in B_1$ такой, что $ch(b') = \langle k_0, \infty, \varepsilon_0 \rangle$. Если $k_0 > ch_1(\bar{b})$ или $k_0 = ch_1(\bar{b})$ и $\rho(\mathcal{B}^{(k_0)}) = 2$, то $ch(b' \setminus \bar{b}) = \langle k_0, \infty, \varepsilon_0 \rangle$ и $b' \setminus \bar{b}$ – искомый. Если $k_0 = ch_1(\bar{b})$ и $\rho(\mathcal{B}^{(k_0)}) = 1$, то найдется $b'' < b'$ такой, что $ch(b'') = \langle k_0, \infty, \varepsilon_0 \rangle$, а следовательно, и $ch((b \cup b'')^i) = ch(b^i)$, поэтому $\mathcal{B}_1 \upharpoonright b \cup b'' \cong \mathcal{B}_1 \upharpoonright b$, стало быть, найдется $b^* < b$ такой, что $ch(b^*) = \langle k_0, \infty, \varepsilon_0 \rangle$. Если $k_0 < ch_1(\bar{b})$, то $\mathcal{B}^{(n)}\upharpoonright(b \cup b') \cong \mathcal{B}^{(n)}\upharpoonright b$ и, следовательно, существует $b'' < b$ такой, что $ch(b'') = \langle k_0, \infty, \varepsilon_0 \rangle$.

Теорема доказана.

Остается рассмотреть случай $n_1 = \infty$. Как и при доказательстве леммы 3.1, легко установить, что для однородной б.а. $\mathcal{B}$ с $ch_1(\mathcal{B}) = \infty$ возможен один и только один из трех случаев:

1) $\forall b \in B\, (ch_1(b) < \infty) \vee (ch_1(\bar{b}) < \infty)$;

2) $\exists b \in B\, ((ch_1(b) = ch_1(\bar{b}) = \infty) \,\&\, (\mathcal{B}\upharpoonright b$ и $\mathcal{B}\upharpoonright \bar{b}$ обладают свойством 1);

3) $\forall b \in B\; ch_1(b) = \infty \to \exists c \leq b\, ch_1(c) = ch_1(b \setminus c) = \infty$.

Номер случая, который реализуется для $\mathcal{B}$, обозначим через $t(\mathcal{B})$. Если $ch_1(\mathcal{B}) < \infty$, то $t(\mathcal{B}) \rightleftharpoons 0$.

ТЕОРЕМА 1.7. Счетные однородные б.а. $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{B}_1$ тогда и только тогда изоморфны, когда $t(\mathcal{B}_0) = t(\mathcal{B}_1)$ и $\rho(\mathcal{B}_0^{(n)}) = \rho(\mathcal{B}_1^{(n)})$ для всех $n < \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна. Достаточность. Как и при доказательстве теоремы 1. 6, определим $S \subseteq B_0 \times B_1$ так:

$$S \leftrightharpoons \{\langle a, b\rangle \mid ch(a^i) = ch(b^i) \quad \text{при} \quad i = 0,1\}$$ и

аналогично доказываем, что для S выполнены условия 1) – 4) из критерия Воота.

Таким образом, все счетные однородные б. а. классифицированы по типу изоморфизма. Инвариант такой б. а. есть пара $\langle t(\mathcal{B}), (\rho(\mathcal{B}^{(n)}))_{n<\omega}\rangle$, состоящая из натурального числа и последовательности.

Какие необходимо наложить условия на эти пары, чтобы они определяли однородную б. а. ?

Зададим

$$\chi \subseteq \{0,1,2,3\} \times [\{0,1,2\} \cup (\tilde{\omega} \setminus \{\tilde{0}\}) \cup \{\emptyset\} \cup$$
$$\cup \{\omega, \omega+\omega, \omega\times\eta, \eta\times\omega, \eta+\omega+\omega, \eta+\tilde{1}+\omega\times\eta\} \cup \{\tilde{n}+\eta \mid n<\omega\}]^N$$

следующими свойствами: (здесь элементы χ обозначены $\langle m, a\rangle$)

1) $0 \leq a_i \leq 2 \to \forall j < i, \ 0 \leq a_j \leq 2$;

2) $(a_i \notin N \ \& \ a_i \neq \emptyset) \to ((\forall j < i \quad 0 \leq a_j \leq 2) \ \& \ \forall j > i \ \ a_j = \emptyset)$;

3) $a_i = 2 \to a_{i+1}$ = одноэлементному порядку;

4) $\exists k \ \ a_k = \emptyset \to m = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В определении χ условия 1, 4 очевидны, условие 2 выражает тот факт, что если $\mathcal{B}^{(n)} \neq 0$ и $n > 0$, то $\mathcal{B}^{(n+1)} \neq 0$, и если $\mathcal{B}^{(n)} = 0$, то $\mathcal{B}^{(n+1)} = 0$. Условие 3 есть отражение леммы 1. 5.

ТЕОРЕМА 1. 8. Для любой пары $\langle m, a\rangle \in \chi$ существует счетная однородная б. а. $\mathcal{B}$ такая, что $\langle m, a\rangle$ – инварианты $\mathcal{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задана пара $\langle m, a\rangle \in \chi$ с условием $m = 0$. Пусть n_0 – минимальное натуральное число такое, что $a_{n_0+1} = \emptyset$. (Если такого n_0 не существует, то искомая б. а. – нулевая.) Построим однородную б. а. $\mathcal{B}$, для которой $\forall n \, a_n = \rho(\mathcal{B}^{(n)})$. Строим по индукции линейные порядки: $L^a_{n_0} \leftrightharpoons a_{n_0}$.

Пусть L^a_n уже построено, $n > 0$. Строим L^a_{n-1}.

$$L^a_{n-1} \leftrightharpoons \begin{cases} \left[\sum_{k<\omega}(\tilde{k}+\eta)\right] \times L^a_n, & \text{если } a_{n-1}=0; \\ \omega+\omega+\eta & \text{, если } a_{n-1}=2; \\ (\tilde{1}+\omega\times\eta+\tilde{1}+\eta)\times\omega\times L^a_n, & \text{если } a_{n-1}=1. \end{cases}$$

Тогда б. а. $\mathcal{B}_{L^a_0}$ будет искомой.

Для этого достаточно доказать следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. 1) Пусть L - счетный линейный порядок. Если $\mathcal{B}_L$ однородна, то $\mathcal{B}_{[\sum_{k<\omega}(\tilde{k}+\eta)]\times L}$, $\mathcal{B}_{(\tilde{1}+\omega\times\eta+\tilde{1}+\eta)\times\omega\times L}$ однородны.
2) $\mathcal{B}_{\omega+\omega+\eta}$ однородна.

Условие 1 доказывается с помощью критерия однородности, а для доказательства условия 2 достаточно заметить, что если $ch(a^i)=ch(b^i)$ при $i=0,1$, то ограничения этой б. а. на $\bar{a}$ и $\bar{b}$, a и b попарно изоморфны и применить О. 1.

Вернемся к теореме.

Пусть $\langle m, a\rangle \in \mathcal{X}$ и $\neg(\exists k\, a_k=\emptyset)$. Заметим, что ввиду леммы 1. 5 выполняется $\neg\exists i\, a_i=2$.

Определим для $n<\omega$

$$a^n_i \leftrightharpoons \begin{cases} \text{одноэлементному порядку, если } i=n; \\ \emptyset \text{ , если } i>n; \\ a_i \text{ , если } i<n. \end{cases}$$

Пара $\langle 0, a^n\rangle$, очевидно, попадает в $\mathcal{X}$. Б. а. $\mathcal{B}^*=\sum_{n<\omega}\mathcal{B}_{L^{a^n}_0}$ будет однородной, причем $t(\mathcal{B}^*)=1$ и $\forall k\ \rho(\mathcal{B}^{*(k)})=a_k$. Также будет однородной и $(\mathcal{B}^*)^2$, причем

$$t((\mathcal{B}^*)^2)=2 \quad \text{и } \forall n\ \rho(((\mathcal{B}^*)^2)^{(n)})=a_n.$$

Для однородной б. а. $\mathcal{B}^{**}=\mathcal{B}_{\sum_{x\in\eta}L_0^{a^{\nu-1}(x)}}$, где ν есть $1-1$-конструктивизация порядка η, имеем:

$$t(\mathcal{B}^{**})=3 \qquad \text{и } \forall n\ \rho((\mathcal{B}^{**})^{(n)})=a_n.$$

Таким образом, все пары $\langle m, a\rangle \in \mathcal{X}$ обладают счетной однородной б. а. с условиями

$$\forall n\ \rho(\mathcal{B}^{(n)})=a_n \quad \text{и } t(\mathcal{B})=m.$$

Можно сосчитать число неизоморфных однородных счетных моделей в каждом элементарном классе.

В приведенной таблице слева выписаны элементарные характеристики элементарных классов б. а., справа – число однородных б. а. в этих классах:

$\langle \infty, 0, 0 \rangle$	2^{ω}
$\langle n, \infty, \varepsilon \rangle$	$3 \cdot 2^{n}$
$\langle n, l, \varepsilon \rangle$ при $\infty > l \neq 1$	2^{n}
$\langle n, 1, 1 \rangle$	2^{n}
$\langle n, 1, 0 \rangle$	$2^{n-1} \cdot 3$
$\langle 0, 1, \varepsilon \rangle$	1

Утверждение доказывается прямым подсчетом числа элементов χ, б. а. которых лежат в данном классе. При этом надо использовать замечание, что если n – минимальное натуральное число такое, что $a_n \notin N$, то первая характеристика б. а., отвечающей данной последовательности, равна n. Оказывается, число однородных б. а. в элементарном классе с конечной первой характеристикой конечно!

§ 2. Критерий сильной конструктивизируемости однородных булевых алгебр

Полученная классификация счетных однородных б. а. позволяет сформулировать некоторые утверждения об их конструктивизируемости.

В [1] доказана модельная полнота теории б. а. с предикатами $A_i, Б_i, B_i, \mathcal{I}_i$ $(i < \omega)$, выделяющими элементы, образы которых в i-м факторе – соответственно атомы, безатомные элементы, атомные элементы и элементы $\mathcal{I}(\mathcal{L}^{(i)})$. Поэтому для сильной конструктивизируемости $\mathcal{L}$ необходимо и достаточно, чтобы существовала конструктивизация $\mathcal{L}$, в которой все вышеуказанные предикаты равномерно рекурсивны по i.
Исходя из этого замечания и построений § 1, доказывается следующая

ТЕОРЕМА 2. 0. Если счетной однородной б. а. $\mathcal{L}$ соответствует пара $\langle m, a \rangle$, где $a : i \mapsto a_i$ – вычислимая функция, то $\mathcal{L}$ сильно конструктивизируема.

СЛЕДСТВИЕ 2. 1. Все однородные счет –

ные б.а. с конечной первой характеристикой сильно конструктивизируемы.

Главным утверждением настоящего параграфа является следующая

ТЕОРЕМА 2.2. Для счетной однородной б.а. $\mathcal{L}$ с инвариантами $\langle m, a\rangle$ эквивалентны следующие условия:

1) $\mathcal{L}$ сильно конструктивизируема;

2) $\{n \mid a(n) = 0\} \in \Pi^0_2$;

3) $\{n \mid a(n) = 1\} \in \Sigma^0_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий 2 и 3 очевидна, поэтому будем доказывать эквивалентность условий 1 и 2.

Пусть $\mathcal{L}$ сильно конструктивизируема. Определим рекурсивный предикат $P^3(n, m, \ell)$:

$P^3(n, m, \ell) \Longleftrightarrow \left[(\nu m)^{(n)}\right.$ – атомный и содержит ровно ℓ атомов$\left.\right]$.

Из определения a ясно, что $a(n) = 0 \longleftrightarrow \forall m \exists \ell P^3(n, m, \ell)$, откуда $\{n \mid a(n) = 0\} \in \Pi^0_2$.

Пусть теперь $\{n \mid a(n) = 0\} \in \Pi^0_2$, а P^3 – такой трехместный предикат, что $a(n) = 0 \longleftrightarrow \forall k \exists \ell P^3(n, k, \ell)$. Применяя алгоритм Крайзеля [4], получим предикат $S^2(m, n)$ такой, что $a(n) = 0 \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow \mho x\, S^2(x, n)$. (Здесь $\mho x\, \Gamma(x)$ означает, что существует ω таких x, что $\Gamma(x)$.)

Учитывая построения § 1, достаточно показать, что существует эффективная процедура, позволяющая по n эффективно строить конструктивный линейный порядок по типу $L = \sum_{i<\omega}(\tilde{1} + \eta + \tilde{1} + \alpha_i)$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) Если $a(n) = 0$, то все α_i – конечные порядки.

2) Если $a(n) = 1$, то для любого i порядок α_i – либо конечный, либо порядок по типу $\omega \times \eta$ и существует бесконечно много j таких, что α_j есть порядок по типу $\omega \times \eta$.

3) Множество точек из η , входящих в эту сумму, рекурсивно.

4) Множество пар соседних элементов порядка рекурсивно.

5) Множество пар $\langle \alpha, \beta\rangle$ таких, что α и β принадлежат одному и тому же сегменту η, рекурсивно.

6) Множество пар $\langle \alpha, \beta\rangle$ таких, что α не принадлежит сегмен-

ту η и β не принадлежит сегменту η и отрезок $[\alpha,\beta)$ не содержит точек сегмента η, рекурсивно.

Выполнение всех этих условий дает рекурсивность предикатов $\mathcal{J}_i$, $A_i, Б_i, В_i$ и, следовательно, сильную конструктивизируемость всей б.а. $\mathcal{L}$.

Для построения порядка L, удовлетворяющего условиям 1–6, достаточно построить вычислимую последовательность $(\alpha_i)_{i<\omega}$ конструктивных порядков, удовлетворяющих условиям 1, 2, 4.

Зафиксируем конструктивную модель $\Omega = (\langle \omega\times\eta;\ S^2, \leqslant\rangle, \nu)$ такую, что ν – 1 – 1 – конструктивизация порядка $\omega\times\eta$ и $S^2(x,y)$ эквивалентно $[x<y \;\&\; \neg\exists z(x<z<y)]$.

На каждом шаге t мы будем иметь конечную подмодель Ω:

$$\mathfrak{A}_i^t = (\langle A_i^t;\ S_i^t, \leqslant_i^t\rangle, \nu^t),$$

где ν^t – 1 – 1 – отображение из некоторого начального отрезка натуральных чисел $\{0,\dots,m\}$ в A^t такое, что

$\nu^t(0) = \nu(0),\dots,\nu^t(m) = \nu(m)$, т. е. $A_i^t = \{\nu(j) \mid j \leqslant m\}$, $S_i^t = S\restriction A_i^t \times A_i^t$, $\leqslant_i^t = \leqslant\restriction A_i^t \times A_i^t$.

Опишем построение:

ШАГ 0. $\mathfrak{A}_i^0 \leftrightharpoons (\langle\{\nu(0)\}, S_i^0, \leqslant_i^0\rangle, \nu_i^0)$.

ШАГ $t+1$. Если $\mathbf{S}(t,n)$, то $\mathfrak{A}_i^{t+1} \leftrightharpoons \mathfrak{A}_i^t$ для всех i, $f(t+1) \leftrightharpoons f(t)+1$.

Если $\neg\mathbf{S}(t,n)$, то для всех $i \geqslant f(t)$ расширим $\mathfrak{A}_i^t$ до $\mathfrak{A}_i^{t+1}$ путем добавления в эту модель еще одного элемента, а именно: если область определения ν^t есть $\{0,\dots,m\}$, то $A_i^{t+1} = A_i^t \cup \{\nu(m+1)\}$, $f(t+1) \leftrightharpoons f(t)$. Описание построения закончено. Положим $\mathfrak{A}_i \leftrightharpoons \bigcup\limits_{t\geqslant 0} \mathfrak{A}_i^t$.

Докажем, что последовательность $\mathfrak{A}_i$ удовлетворяет условиям 1, 2, 4. Для этого достаточно заметить, что

а) f – монотонная функция и $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \infty \leftrightarrow \bigcup t\,\mathbf{S}(t,n)$;

б) для любых a и b из $\mathfrak{A}_m^t$ таких, что $\neg S_i(a,b)$ и $\mathfrak{A}_m^t \models \neg\exists z(a<z<b)$, либо существует $t'>t$ такое, что $\mathfrak{A}_m^{t} \models \exists z(a<z<b)$, либо существует $t'>t$ такое, что $f(t')>m$ и, значит, $\mathfrak{A}_m = \mathfrak{A}_m^{t'}$. Из этого следует, что множество пар соседних элементов порядка $\mathfrak{A}_m$ разрешимо;

в) если $f(t)>m$, то $\forall t'>t\ \mathfrak{A}_m^{t'}=\mathfrak{A}_m^t$;

г) если $\forall t f(t)<m$, то $\mathfrak{A}_m=\bigcup\limits_{t\geqslant 0}\mathfrak{A}_m^t$ упорядочено по типу $\omega\times\eta$.

Из этих замечаний легко следует выполнение условий 1, 2, 4. Критерий доказан.

§ 3. Некоторые полугрупповые проблемы для квазиоднородных булевых алгебр

Б. а. будем называть квазиоднородной, если она является декартовым произведением конечного числа однородных б. а. Типы изоморфизма счетных квазиоднородных б. а. образуют полугруппу относительно декартова умножения. Обозначим ее H_0.

Естественно попытаться выяснить, будет ли эта полугруппа удовлетворять известным квазитождествам, вопрос о выполнимости которых в полугруппе типов всех счетных б. а. решен отрицательно Кетоненом [5] и др.

Вот эти квазитождества:

1. $x=xyz\rightarrow x=xy$;
2. $x^2=y^2\rightarrow x=y$;
3. $x=xy^2\rightarrow x=xy$;
4. $x=x^3\rightarrow x=x^2$.

В качестве применения полученной в § 3 классификации счетных однородных б. а., мы установим истинность всех этих квазитождеств на H_0. Таким образом, у нас будет весьма широкий класс б. а., для которого квазитождеств[illegible] – 4 истинны.

Выбере[illegible] удобную для дальнейших рассуждений систему порождающих для H_0:

$S_0\leftleftarrows\{\mathcal{L}\mid\mathcal{L}$ – счетная однородная б. а. с инвариантами $\langle m,a\rangle$ и $(\forall j<\omega\ a_j\neq 2)\&((m\in\{1,3\})\vee(\exists j<\omega\ a_j\in\{\bar{1},\eta,\omega,\omega\times\eta\}))\}$.

ЛЕММА 3.0. Справедливы следующие утверждения:

1) $f,g\in S_0\ \&\ fg\in S_0\rightarrow fg\in\{f,g\}$;

2) $f,g\in S_0\ \&\ fg=f\rightarrow ch_1(f)\geqslant ch_1(g)$;

3) $f,g,h\in S_0\ \&\ fg=f\ \&\ gh=g\rightarrow fh=f$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие 1 доказывается перебором всевозможных вариантов, 2, 3 очевидны.

Пусть $g = f_1^{\varepsilon_1} \dots f_k^{\varepsilon_k}$ – запись элемента из H_0 через порождающие из S_0. Ее длиной назовем $\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i$. Запись с минимальной длиной назовем канонической.

ЛЕММА 3.1. 1) Запись $g = f_1^{\varepsilon_1} \dots f_k^{\varepsilon_k}$ будет канонической, если из нее нельзя удалить ни одного элемента за счет сокращений вида $ef = f$ и перестановок.

2) Любые две канонические записи g совпадают с точностью до перестановки порождающих (фактически это классификация квазиоднородных б. а.).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1 и 2 будем доказывать одновременно. Пусть $g = e_1^{\varepsilon_1} \dots e_k^{\varepsilon_k} = f_1^{\gamma_1} \dots f_e^{\gamma_e}$ – две записи элемента g, причем первая несократима, а вторая – каноническая.

Покажем сначала, что $\{e_1, \dots e_k\} = \{f_1 \dots f_e\}$ и $e = k$. Рассмотрим e_1. В g существует элемент α такой, что $g \upharpoonright \alpha$ – однородная б. а. с инвариантами, как у e_1. Нетрудно убедиться, что можно выбрать такое α, чтобы $\alpha \in f_i$ для некоторого f_i. Если $ch_1(\alpha) < ch_1(f_i)$, то в g существует счетное число попарно-непересекающихся элементов α_i $(i < \omega)$ с инвариантами, как у e_1, что неверно для $e_1^{\varepsilon_1} \dots e_k^{\varepsilon_k}$, так как в этом случае $e_1^{\varepsilon_1} \dots e_k^{\varepsilon_k}$ можно было бы сократить. Таким образом, $ch_1(\alpha) = ch_1(f_i)$, $g \upharpoonright \alpha$ изоморфен порождающему e_1. Это влечет $g \upharpoonright \alpha \cong f_i$ и $e_1 \cong f_i$. Повторив наши рассуждения для $e_2, \dots, e_k$, $f_1, \dots, f_e$, мы приходим к выводу, что $k = e$ и $\{e_1, \dots, e_k\} = \{f_1, \dots, f_e\}$. В дальнейшем считаем, что $e_i = f_i$ $(i = 1, \dots, k)$. Покажем, что $\varepsilon_j = \gamma_j$ при $j = 1, \dots, k$.

В дальнейшем $\langle m, a \rangle$ – инварианты e_i.

СЛУЧАЙ 1. $\exists j < \omega$ $a_j = \widetilde{1}$. В этом случае $\varepsilon_i = \gamma_i$ равно числу таких атомов в $g^{(j)}$, что у них существует канонический однородный прообраз в g, имеющий инварианты, как у e_i.

СЛУЧАЙ 2. $\exists j < \omega$ $a_j = \omega$. В этом случае $\varepsilon_i = \gamma_i$ равно числу таких атомов в j-м факторе g, профакторизованным по идеалу Фреше, что у них есть канонический однородный прообраз в g, имеющий инварианты $\langle m, a \rangle$.

СЛУЧАЙ 3. $\exists j < \omega$ $a_j \in \{\omega \times \eta, \eta\}$. В этом случае, как это следует из представления алгебр порядками, $e_i^{\varepsilon_i} = e_i = f_i$ и $\varepsilon_i = \gamma_i = 1$.

СЛУЧАЙ 4. $m = 1$. В этом случае $\varepsilon_i - \gamma_i$ равно числу таких атомов в факторе $\mathcal{G}$ по идеалу, состоящему из элементов с конечной первой характеристикой, что у них есть однородный прообраз, имеющий инварианты $\langle m, a\rangle$.

СЛУЧАЙ 5. $m=3$. По критерию однородности б. а.,

$$\left(\mathcal{B}_{\sum\limits_{x\in\eta} L_0} a^{\nu-1}(x)\right)^{\kappa}$$ однородна, и, следовательно, по 1. 7, $e_i^{\varepsilon_i} = e_i$ и $\varepsilon_i = \gamma_i = 1$.

Для удобства в дальнейшем определим

$$\hat{e}^{n} \rightleftharpoons \begin{cases} e, & \text{если для инвариантов } e, \langle m, a\rangle \text{ выполнено } m = 3 \vee (\exists j<\omega\ a_j \in \{\omega\times\eta, \eta\}); \\ e^{n} - & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. 2. Если $e_1^{\varepsilon_1}\dots e_\kappa^{\varepsilon_\kappa}$ – каноническая запись, то $\forall n>0$ $\widehat{e_1^{n\varepsilon_1}}\dots\widehat{e_\kappa^{n\varepsilon_\kappa}}$ – каноническая запись.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что полученная запись будет несократимой и поэтому, в силу 3. 1. 1, канонической.

ТЕОРЕМА 3. 3. H_0 – это полугруппа с однозначным извлечением корня n-й степени для всех $n>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(e_1^{\varepsilon_1}\dots e_\kappa^{\varepsilon_\kappa})^n = (f_1^{\gamma_1}\dots f_e^{\gamma_e})^n$, где записи внутри скобок канонические. Тогда, по 3. 2, имеем равенство двух канонически записанных элементов:

$$\widehat{e_1^{n\varepsilon_1}}\dots\widehat{e_\kappa^{n\varepsilon_\kappa}} = \widehat{f_1^{n\gamma_1}}\dots\widehat{f_e^{n\gamma_e}}.$$

Ввиду 3. 1. 2) можно считать, что $\kappa = e$, $f_j = e_j$ и $\varepsilon_j = \gamma_j$ при $j = 1,\dots,\kappa$.

ТЕОРЕМА 3. 4. Справедливо $\forall x\in H_0$ $\forall n>2$ $x = x^n \to x = x^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 3. 1 и утверждения 3. 2.

ТЕОРЕМА 3. 5. Справедливо $\forall x,y,z\in H_0$ $x = xyz \to x = xy$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем x, y, z в каноническом виде и начнем, где это можно, сокращения в произведении xyz. В конце концов мы получим x. По лемме 3. 0, если сокращения начнем в xy, то в итоге тоже получим x .

СЛЕДСТВИЕ 3. 6. Справедливо $\forall x, y \in H_0$
$x = xy^2 \to x = xy$.

Аналогичными методами можно устанавливать истинность или ложность достаточно большого класса утверждений об H_0 .

В заключение заметим, что подполугруппа $H_0^{<\omega} < H_0$ квазиоднородных б. а. с конечной первой характеристикой конструктивизируема. Будет ли конструктивизируемой подполугруппа, порожденная в H_0 всеми сильно конструктивизируемыми однородными б. а., – неизвестно.

Автор выражает искреннюю благодарность С. С. Гончарову за помощь и внимание к работе.

Литература

1. Ю. Л. ЕРШОВ, Разрешимость элементарной теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров, Алгебра и логика, 4, № 3 (1964), 17-38.

2. Ю. Л. ЕРШОВ, Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М., Наука, 1980.

3. Дж. САКС, Теория насыщенных моделей, М., Мир, 1976.

4. Х. РОДЖЕРС, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., Мир, 1972.

5. J. KETONEN, The structure of countable Boolean algebras, Ann. Math., 108, N 1 (1978), 41-90.

Поступило 28 апреля 1981 г.