



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Калябин, Описание следов для анизотропных пространств типа Трибеля–Лизоркина,  
*Тр. МИАН СССР*, 1979, том 150, 160–173

<https://www.mathnet.ru/tm2484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

14 мая 2025 г., 05:25:38



Г. А. КАЛЯБИН  
ОПИСАНИЕ СЛЕДОВ  
ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ  
ТИПА ТРИБЕЛЯ—ЛИЗОРКИНА

ВВЕДЕНИЕ

В работе используются следующие обозначения:  $1 < p < \infty$ ,  $p' = p/(p-1)$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$ ,  $m, n$  — натуральные,  $m < n$ ;  $k, j$  — индексы, пробегающие соответственно множества  $\{1, 2, \dots\}$ ,  $\{1, 2, \dots, n\}$ ;  $R_n$  — евклидово пространство векторов  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x = (w, y)$ ,  $w = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $y = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ ,  $R_m$  — подпространство  $\{y = 0\}$ . Через  $\varepsilon, \delta, c, c_1, c_2, \dots$  обозначаются различные положительные постоянные. Символ  $|f, X|$  означает норму элемента  $f$  в нормированном пространстве  $X$ ;  $L_p(R_n)$  — совокупность всех (комплексно-значных) измеримых функций  $g(x)$  таких, что

$$|g, L_p(R_n)| \equiv \left( \int_{R_n} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad (1)$$

$l_\theta$  — пространство последовательностей  $(u_k)$  с нормой

$$|(u_k), l_\theta| \equiv \left( \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty; \quad |(u_k), l_\infty| \equiv \sup_k |u_k|. \quad (2)$$

Через  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{F}^{-1}$  будем обозначать прямое и обратное преобразование Фурье в  $R_n$ , т. е. (см. [1, § 1.5]) для  $g \in L_1(R_n)$

$$\mathcal{F}g(v) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R_n} g(x) e^{i(v,x)} dx, \quad (3)$$

$$v = (v_1, \dots, v_n) \in R_n; \quad (v, x) = \sum_{j=1}^n v_j x_j.$$

Пусть заданы  $n$  последовательностей положительных чисел  $N_{j,k}$ , относительно которых мы будем предполагать выполненным условие

$$N_{j,k+1} \geq (1 + \varepsilon_j) N_{j,k}, \quad \varepsilon_j > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Для  $g(x) \in L_p(R_n)$  положим

$$A_k g(x) = \mathcal{F}^{-1}((\Omega_k(v) - \Omega_{k-1}(v)) \mathcal{F}g(v))(x), \quad (5)$$

где  $\Omega_0(v) \equiv 0$ ,  $\Omega_k(v)$  — характеристическая функция прямоугольника

(параллелепипеда),

$$\omega_k = \{v \mid |v_j| \leq N_{j,k}; \quad j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Зададим еще некоторое пространство последовательностей  $\Phi$  со свойством

$$c_1 |(u_k), l_\infty| \leq |(u_k), \Phi| \leq c_2 |(u_k), l_\infty| \quad (6)$$

и произвольные положительные числа  $\beta_k$  и рассмотрим пространство  $L_{p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)$ , состоящее из всех функций  $g(x)$ , для которых конечна величина

$$|g, L_{p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)| \equiv |g, L_p(R_n)| + |(\beta_k A_k g(x)), \Phi|, L_p(R_n)|. \quad (7)$$

В настоящей работе дается полный ответ на вопрос, поставленный П. И. Лизоркиным: дать описание следов <sup>1</sup> функций из  $L_{p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)$  на подпространстве  $R_m$ .

Показано, что при заданных  $p, \beta_k, N_{j,k}$  указанное пространство следов не зависит от выбора пространства последовательностей  $\Phi$ , подчиненного (6), и является обобщенным классом О. В. Бесова  $B_p^{(\alpha,N)}(R_m)$ .

Формулировка результата приводится в § 1, а доказательство в § 3. В § 2 содержатся некоторые вспомогательные утверждения, представляющие, возможно, и самостоятельный интерес.

Поясним определение классов  $L_{p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)$  несколькими примерами.

1. В случае  $\beta_k = 2^k, \Phi = l_p$  пространства  $L_{p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)$  совпадают с обобщенными  $B$ -классами, теоремы вложения для которых получены в [4], где имеется также описание этих классов в терминах модулей непрерывности (см. также [6]).

2. Пусть  $\mu_j(t) > \varepsilon > 0$  ( $-\infty < t < \infty$ ) — четные функции, неубывающие при  $t > 0$ , стремящиеся к  $\infty$  вместе с  $t$ , и такие, что для некоторого  $\rho > 0$  функции  $\mu_j(t) t^{-\rho}$  не возрастают при  $t > 0$ .

В работе [4] изучались пространства  $L_p^{(\mu)}(R_n)$ , состоящие из всех функций  $g(x) \in L_p(R_n)$  с конечной нормой

$$|g, L_p^{(\mu)}(R_n)| \equiv \sum_{j=1}^n |\mathcal{F}^{-1}(\mu_j v_j) \mathcal{F} g(v))(x), L_p(R_n)|. \quad (8)$$

В случае  $\mu_j(t) = (1 + t^2)^{r_j/2}$  ( $r_j > 0$ ) пространства  $L_p^{(\mu)}(R_n)$  суть анизотропные лиувиллевские классы (см. [7] и [1, гл. 9]); в частности, при целых  $r_j$  имеем соболевские пространства  $W_p^r(R_n)$ .

Пусть  $\gamma_j = \inf_{t>0} \mu_j(t)$ ; при сделанных предположениях относительно  $\mu_j(t)$  для чисел

$$N_{j,k} \equiv \max \{t \mid \mu_j(t) \leq \gamma_j \cdot 2^k\} \quad (9)$$

будет выполняться условие (4) и, следовательно, в силу теоремы Пэли — Литтлвуда (см. [1, с. 65]) норма в  $L_p^{(\mu)}(R_n)$  эквивалентна величине (см. (5))

$$\left| \left( \sum_{k=1}^{\infty} |2^k A_k g(x)|^2 \right)^{1/2}, L_p(R_n) \right|. \quad (10)$$

Таким образом, в данном случае  $L_p^{(\mu)}(R_n) = L_{p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)$ , где  $\beta_k = 2^k, \Phi = l_2$ , а  $N_{j,k}$  определяются формулой (9).

<sup>1</sup> След функции понимается в общепринятом смысле ([1, § 6. 4]).

3. В некоторых задачах появляются более сложно устроенные пространства  $\Phi$ .

Пусть  $L_p^{(\mu)}(R_n)$ ,  $N_{j,k}$  — те же, что и в предыдущем примере,  $\varphi(t) > 0$  ( $t > 0$ ) — измеримая функция такая, что

$$\psi(t) \equiv \int_0^t \varphi(\tau) d\tau < \infty; \quad 0 < t < \infty. \quad (11)$$

Рассмотрим совокупность  $L_{p,\Phi}^{(\mu)}$  функций  $f(x, t)$  ( $x \in R_n$ ,  $0 < t < \infty$ ), для которых <sup>1</sup>

$$|f, L_{p,\Phi}^{(\mu)}|^p \equiv \int_{R_n} dx \int_0^\infty \left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right|^p dt + \int_0^\infty \varphi(t) |f(x, t), L_p^{(\mu)}(R_n)|^p dt < \infty. \quad (12)$$

Известно, что если  $f \in L_{p,\Phi}^{(\mu)}$ , то (возможно после некоторого изменения на множестве меры 0 в  $R_{n+1}$ ) существует предел  $f(x, t)$  при  $t \rightarrow 0$  (при всех  $x \in R_n$  и в смысле сходимости в  $L_p(R_n)$ ).

Описание свойств предельных функций  $g(x) = f(x, 0)$ ,  $f \in L_{p,\Phi}^{(\mu)}$  дано автором в работах [5, 8]. Несколько преобразуя это описание с помощью теоремы Пэли — Литтлвуда, можно утверждать, что пространство следов на  $R_n$  функций класса  $L_{p,\Phi}^{(\mu)}$  есть  $L_{p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)$ , где  $\beta_k$  — корни уравнений

$$\beta_k^{-p} \psi(\beta_k^{-p'}) = 2^{-kp} \quad (13)$$

(ясно, что числа  $\beta_k$  возрастают), а  $\Phi$  — пространство последовательностей  $(u_k)$  с нормой

$$|(u_k), \Phi| \equiv \left( \sum_{s=1}^{\infty} \left( \sum_{k=\lambda_{s-1}}^{\lambda_s-1} |u_k|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (14)$$

Здесь  $\lambda_0 = 1$ , а  $\lambda_s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) — наименьшее  $k$ , для которого выполняются неравенства

$$\beta_k^{-p'} \leq \beta_{\lambda_{s-1}}^{-p'}/2; \quad \psi(\beta_k^{-p'}) \leq \psi(\beta_{\lambda_{s-1}}^{-p'}/2).$$

Проверка условий (6) для нормы (14) не представляет затруднений.

Располагая теоремой о следах для классов  $L_{p,\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)$ , мы можем, таким образом, описать следы функций из  $L_{p,\Phi}^{(\mu)}$  на подпространствах  $R_m$  ( $m < n$ ).

#### § 1. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть  $\mathfrak{M}_{k,p}(R_{jn})$  означает совокупность всех целых функций  $g(z_1, \dots, z_m)$  ( $z_j = x_j + it_j$ ;  $x_j, t_j \in R_1$ ) экспоненциального типа  $N_{j,k}$  по переменным  $z_j$ , принадлежащих при  $t_1 = \dots = t_m = 0$  пространству  $L_p(R_m)$  (см. [1, гл. 3]); зададим последовательность чисел  $a_k > 0$  такую, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-p'} < \infty \quad (1.1)$$

и рассмотрим совокупность  $B_p^{(a,N)}(R_m)$  всех функций  $f(w) \in L_p(R_m)$ ,

<sup>1</sup> Производная в (12) понимается в обобщенном смысле (см. [1, § 4.1]).

представимых в виде сходящегося в  $L_p(R_m)$  ряда

$$f(w) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(w), \quad f_k \in \mathfrak{M}_{k,p}(R_m), \quad (1.2)$$

для которого

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (a_k |f_k(w), L_p(R_m)|)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (1.3)$$

Из (1.1), (1.3) и неравенства Гёльдера следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(w), L_p(R_m)| < \infty, \quad (1.4)$$

т. е. ряд (1.2) со свойством (1.3) сходится абсолютно по норме  $L_p(R_m)$ .

Норму в  $B_p^{(a,N)}(R_m)$  определим как сумму  $|f, L_p(R_m)|$  и нижней грани левой части (1.3) по всем рядам (1.2).

В случае, когда  $a_k = \tau^k$  ( $\tau > 1$ ),  $N_{j,k} = \tau^{k/r_j}$  ( $r_j > 0$ ), пространства  $B_p^{(a,N)}(R_m)$  совпадают с анизотропными классами О. В. Бесова  $B_p^r(R_m)$  (при разных  $\tau > 1$  получается один и тот же класс).

Следует отметить, что при нарушении условия (1.1) введение классов  $B_p^{(a,N)}(R_m)$  становится бессодержательным, поскольку в этом случае любая функция  $f(w)$  из  $L_p(R_m)$  будет входить и в  $B_p^{(a,N)}(R_m)$ .

В самом деле, пусть  $h_k(w) \in \mathfrak{M}_{k,p}(R_m)$  сходится к  $f(w)$  в  $L_p(R_m)$  (см. [1, с. 226]). Предполагая (1.1) невыполненным, мы можем указать последовательность индексов  $n_s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) со свойствами

$$n_{s+1} > n_s \geq s, \quad \sum_{k=n_s}^{n_{s+1}-1} a_k^{-p'} \equiv B_s > 2^s \quad (n_1 = 1). \quad (1.5)$$

Для  $n_s \leq k < n_{s+1}$  обозначим ( $h_0(w) \equiv 0$ )

$$q_k(w) = B_s^{-1} a_k^{-p'} (h_s(w) - h_{s-1}(w)). \quad (1.6)$$

По построению  $q_k(w) \in \mathfrak{M}_{k,p}(R_m)$  и справедливо равенство

$$\sum_{n_s \leq k < n_{s+1}} q_k(w) = h_s(w) - h_{s-1}(w), \quad (1.7)$$

из которого явствует сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} q_k(w)$  в пространстве  $L_p(R_m)$  к функции  $f(w)$ .

Далее, из (1.6), (1.5) находим, что

$$\sum_{n_s \leq k < n_{s+1}} (a_k |q_k(w), L_p(R_m)|)^p = |(h_s - h_{s-1}), L_p(R_m)|^p B_s^{1-p} \quad (1.8)$$

и так как первый сомножитель в правой части ограничен, а второй не превосходит  $2^{-s(p-1)}$ , мы можем заключить, что величина (1.2) конечна, т. е.  $f \in B_p^{(a,N)}(R_m)$ .

После этого замечания дадим описание следов функций из пространств  $L_{p\Phi}^{(\beta,N)}(R_n)$  на  $R_m$  в терминах классов  $B_p^{(a,N)}(R_m)$ .

**Основная теорема.** В обозначениях, принятых во введении, положим для  $k = 1, 2, \dots$

$$\alpha_k = \beta_k \prod_{j=m+1}^n N_{j,k}^{-\frac{1}{p}}. \quad (1.9)$$

Условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{-p'} < \infty \quad (1.10)$$

необходимо и достаточно для существования следа на  $R_m$  у любой функции  $g(x) \in L_{p, \Phi}^{(\beta, N)}(R_n)$ .

При выполнении этого условия имеют место вложения

$$L_{p, \Phi}^{(\beta, N)}(R_n) \rightleftarrows B_p^{(\alpha, N)}(R_m). \quad (1.11)$$

Доказательство этой теоремы следует в основном рассуждениям работы [3], в которой рассмотрен случай  $\beta_k = 2^k$ ,  $\Phi = l_2$ .

Отметим, что в силу (6) справедливы вложения

$$L_{p l_1}^{(\beta, N)}(R_n) \subset L_{p, \Phi}^{(\beta, N)}(R_n) \subset L_{p l_\infty}^{(\beta, N)}(R_n) \quad (1.12)$$

и поэтому теорема будет доказана, если мы убедимся в справедливости следующих трех утверждений:

I. При нарушении условия (1.10) существует функция  $g(x) \in L_{p l_1}^{(\beta, N)}(R_n)$  не имеющая следа на подпространстве  $R_m$ .

II. Для любой функции  $f(w) \in B_p^{(\alpha, N)}(R_m)$  можно построить функцию  $g(x)$  такую, что для почти всех  $w \in R_m$  и в смысле сходимости в  $L_p(R_m)$   $\lim_{y \rightarrow 0} g(w, y) = f(w)$  и, кроме того, выполняется неравенство

$$|g(x), L_{p l_1}^{(\beta, N)}(R_n)| \leq c |f(w), B_p^{(\alpha, N)}(R_m)|, \quad (1.13)$$

где постоянная  $c$  не зависит от  $f$ .

III. Если выполнено (1.10), то любая функция  $g(x)$  из класса  $L_{p l_\infty}^{(\beta, N)}(R_n)$  может быть изменена на множестве нулевой меры в  $R_n$  таким образом, что она будет равномерно непрерывной по  $y$  при всех  $w \in R_m$ , функция  $f_y(w) \equiv g(w, y)$  принадлежит классу  $B_p^{(\alpha, N)}(R_m)$  при всех  $y \in R_{n-m}$ , является непрерывной по  $y$  как отображение из  $R_{n-m}$  в  $B_p^{(\alpha, N)}(R_m)$  и выполняются неравенства

$$\sup_{y \in R_{n-m}} |g(w, y), B_p^{(\alpha, N)}(R_m)| \leq c |g(x), L_{p l_\infty}^{(\beta, N)}(R_n)|, \quad (1.14)$$

$$\left( \int_{R_{n-m}} |g(w, y), B_p^{(\alpha, N)}(R_m)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq c |g(x), L_{p l_\infty}^{(\beta, N)}(R_n)|, \quad (1.15)$$

где  $c$  не зависит от  $g$ .

Отметим, что последнее неравенство дополняет прямое вложение  $L_{p, l_\infty}^{(\beta, N)}(R_n) \rightarrow B_p^{(\alpha, N)}(R_m)$ .

Объединяя утверждение основной теоремы с результатами работы [4], получаем

С л е д с т в и е. Пусть выполнены условия теоремы, соотношение (1.10) и существует постоянная  $\tau > 1$  такая, что  $\alpha_{k+1} \leq \tau \alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ); обозначим

$$n_k = \min \left\{ s \mid \sum_{l=s}^{\infty} \alpha_l^{-p'} \leq 2^{-k p'} \right\}, \quad (1.16)$$

$$h_{j, k} = (N_{j, n_k})^{-1} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (1.17)$$

(ясно, что  $h_{j, k}$  не возрастают при увеличении  $k$ ).

Выберем  $\rho_j > 0$  такие, что при всех  $k, l \geq 1$  и некоторой  $c^1$

$$h_{j,k+l} \leq ch_{j,k} 2^{-l\rho_j} \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (1.18)$$

Тогда и только тогда функция  $f(w) \in L_p(R_m)$  является следом на  $R_m$  некоторой функции  $g(x) \in L_{p\Phi}^{(B, N)}(R_n)$ , когда для всех  $j = 1, 2, \dots, m$  выполнено

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2^k \omega_{p, x_j}^{(s_j)}(h_{j, k}; f))^p < \infty, \quad (1.19)$$

где  $\omega_{p, x_j}^{(s_j)}(h; f)$  — модуль непрерывности порядка  $s_j > 1/\rho_j$  функции  $f$  по направлению оси  $x_j$  в метрике  $L_p(R_m)$ .

## § 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В этом параграфе устанавливаются пять лемм, которые составляют ядро доказательства теоремы.

**Л е м м а 1.** Пусть  $p, N_{j,k}$  — те же, что во введении; для последовательности неотрицательных чисел  $(u_k)$  обозначим

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \left( \prod_{j=1}^n (1 + N_{j,k} |x_j|)^{-1} \right). \quad (2.1)$$

С постоянной  $c$ , не зависящей от  $(u_k)$ , справедливо неравенство

$$\int_{R_n} H^p(x) dx \leq c \sum_{k=1}^{\infty} u_k^p \left( \prod_{j=1}^n N_{j,k}^{-1} \right). \quad (2.2)$$

Доказательство для случая  $n = 1$  приведено в работе [3], далее рассуждаем по индукции; обозначаем  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ :

$$\tilde{u}_k = u_k \prod_{j=1}^{n-1} N_{j,k}^{-\frac{1}{p}}; \quad \tilde{H}(x_n) = \left( \int_{R_{n-1}} H^p(\bar{x}, x_n) d\bar{x} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.3)$$

В силу индуктивного предположения и того факта, что норма в  $L_p$  превосходит нормы в  $L_1$ , получаем из (2.1), (2.3) для любого  $x_n$  неравенство

$$H(x_n) \leq c \left( \sum_{k=1}^{\infty} (u_k^p (1 + N_{n,k} |x_n|)^{-p} \prod_{j=1}^{n-1} N_{j,k}^{-1})^{\frac{1}{p}} \right) \leq c \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k (1 + N_{n,k} |x_n|)^{-1}. \quad (2.4)$$

Остается к  $\tilde{H}(x_n)$  вновь применить одномерный случай неравенства (2.2). Лемма доказана.

**Л е м м а 2.** Пусть  $f_k(\xi)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) — отображения метрического пространства  $Y$  в банахово пространство  $X$ , непрерывные в изолированной точке  $\zeta \in Y$  и такие, что  $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(\xi), X|$  ограничена вне любой окрестности

точки  $\zeta$ , а суммы  $\sum_{k=1}^N f_k(\zeta)$  не ограничены в  $X$ .

Тогда существует подмножество  $\Psi$  натуральных чисел такое, что ряд  $\sum_{k \in \Psi} f_k(\xi)$  (сходящийся, очевидно, абсолютно и равномерно вне любой окрестности

<sup>1</sup> Неравенство (1.18) справедливо во всяком случае при  $\rho_j = \log_{\tau}(1 + \varepsilon_j)$ , где  $\varepsilon_j$  из (4), но, возможно, и при больших  $\rho_j$ .

ти  $\zeta$ ) представляет собой функцию, неограниченную в любой окрестности точки  $\zeta$ .

**Доказательство.** Используя условия леммы, определяем рекуррентно последовательности  $n_s, m_s$  и последовательности  $\delta_s, \varepsilon_s$  положительных чисел такие, что при всех  $s = 1, 2, \dots$  выполняется:

- 1)  $n_s < m_s < n_{s+1}, \quad \delta_{s+1} < \varepsilon_s < \delta_s/2;$
- 2) в шаре  $B_{\delta_s}(\zeta)$  (радиуса  $\delta_s$  с центром  $\zeta$ ) имеет место

$$\left| \left( \sum_{k=n_s}^{m_s} f_k(\xi), X \right) \right| \geq 3 \sum_{k=1}^{n_s} |f_k(\xi), X| \geq 3^s;$$

- 3) множество  $\Delta_s \equiv B_{\delta_s}(\zeta) \setminus B_{\varepsilon_s}(\zeta)$  непусто и для  $\xi \in \Delta_s$

$$\sum_{k=n_{s+1}}^{\infty} |f_k(\xi), X| < 3^{s-1}.$$

Порядок построения:  $n_1, m_1, \delta_1, \varepsilon_1, n_2, m_2, \delta_2, \varepsilon_2$  и т. д.

Полагая  $\Psi = \bigcup_{s=1}^{\infty} \{n_s \leq k \leq m_s\}$ , будем иметь в силу условий 2) и 3) при любом  $\xi \in \Delta_s$  неравенство

$$\left| \left( \sum_{k \in \Psi} f_k(\xi), X \right) \right| \geq 3^s/6, \quad (2.5)$$

которое доказывает лемму.

**Лемма 3.** Пусть  $f(z_1, \dots, z_n)$  ( $z_j = x_j + it_j; j = 1, 2, \dots, n$ ) — целая функция экспоненциального типа  $N_j$  по переменным  $z_j$ . Имеет место неравенство

$$|f(0)| \leq c_n \sup_k (\text{mes } \Delta_k)^{-1} \int_{\Delta_k} |f(x)| dx, \quad (2.6)$$

где  $\Delta_k$  — прямоугольник в  $R_n$ :  $\{|x_j| \leq 2^k N_j^{-1}; j = 1, 2, \dots, n\}$ .

**Доказательство.** Функция  $(\sin z/z)$  целая экспоненциального типа 1, поэтому функция

$$g(z_1, \dots, z_n) \equiv f(z_1, \dots, z_n) \prod_{j=1}^n (\sin N_j z_j / N_j z_j)^{n+1} \quad (2.7)$$

есть целая экспоненциального типа  $N_j(n+2)$  по переменным  $z_j$ .

Обозначим через  $L$  supremum в правой части (2.6) и пусть  $\Gamma_k = \Delta_k \setminus \Delta_{k-1}$  ( $\Delta_0 = \emptyset$ ). Тогда по определению  $L$  для всех  $k$  выполняется

$$\int_{\Gamma_k} |f(x)| dx \leq \int_{\Delta_k} |f(x)| dx \leq L (\text{mes } \Delta_k) = L \cdot 2^{n(k+1)} \prod_{j=1}^n N_j^{-1}. \quad (2.8)$$

С другой стороны, на  $\Gamma_k$  модуль второго сомножителя в (2.7) не превосходит  $2^{(1-k)(n+1)}$  и поэтому из (2.8) следует

$$\int_{\Gamma_k} |g(x)| dx \leq 2^{-k} \cdot 2^{2n+1} \left( \prod_{j=1}^n N_j^{-1} \right) L. \quad (2.9)$$

Суммируя (2.9) по всем  $k$ , получаем

$$\int_{R_n} |g(x)| dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Gamma_k} |g(x)| dx \leq 2^{2n+1} \left( \prod_{j=1}^n N_j^{-1} \right) L. \quad (2.10)$$



Применяя к функции  $g$  неравенство разных метрик ([1, с. 150]), находим с учетом (2.7), что

$$|f(0)| = |g(0)| \leq 2^n (n+2)^n \left( \prod_{j=1}^n N_j \right) \int_{R_n} |g(x)| dx \leq 2^{3n+1} (n+2)^n L.$$

Лемма доказана, причем  $c_n$  в (2.6) не превосходит  $2^{3n+1} (n+2)^n$ . Отметим, что для случая  $n=1$  это утверждение установлено в работе [3].

Для локально суммируемой в  $R_n$  функции  $g(x)$  введем *максимальную функцию* Харди — Литтлвуда ([2, гл. 1])

$$(Mg)(x) \equiv \sup_{\substack{v_j > 0 \\ j=1, 2, \dots, n}} (\text{mes } \Delta_v(x))^{-1} \int_{\Delta_v(x)} |g(t)| dt, \quad (2.11)$$

где  $\Delta_v(x)$  — прямоугольник  $\{t \in R_n \mid |t_j - x_j| < v_j; j=1, 2, \dots, n\}$ .

**Лемма 4.** Пусть  $f(z_1, \dots, z_2)$  та же, что и в предыдущей лемме, для любых  $x, t \in R_n$  имеет место неравенство

$$|f(t)| \leq c_n \left( \prod_{j=1}^n (1 + N_j |t_j - x_j|) \right) (Mf)(x), \quad (2.12)$$

где постоянная  $c_n$  та же, что и в (2.6).

**Доказательство.** Поскольку все инвариантно относительно сдвига, мы можем считать в (2.12)  $t=0$ . Пусть  $L$  и  $\Delta_\kappa$  имеют тот же смысл, что и в доказательстве леммы 3,  $0 < \lambda < 1$ , а натуральное  $s$  выбрано таким, что (см. (2.6))

$$\int_{\Delta_s} |f(t)| dt \geq L\lambda (\text{mes } \Delta_s). \quad (2.13)$$

Рассмотрим прямоугольник (с центром в точке  $x$ )

$$\Delta = \{t \in R_n \mid |t_j - x_j| \leq |x_j| + 2^s N_j^{-1}; j=1, 2, \dots, n\}. \quad (2.14)$$

По построению  $\Delta \supset \Delta_s$  и

$$\begin{aligned} (\text{mes } \Delta) &= 2^n \prod_{j=1}^n (|x_j| + 2^s N_j^{-1}) = \\ &= (\text{mes } \Delta_s) \prod_{j=1}^n (1 + 2^{-s} N_j |x_j|) \leq (\text{mes } \Delta_s) \prod_{j=1}^n (1 + N_j |x_j|). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Отсюда в силу (2.11), (2.6), (2.13) вытекает

$$\begin{aligned} (Mf)(x) &\geq (\text{mes } \Delta)^{-1} \int_{\Delta_s} |f(t)| dt \geq L\lambda (\text{mes } \Delta)^{-1} (\text{mes } \Delta_s) \geq \\ &\geq c_n^{-1} \left( \prod_{j=1}^n (1 + N_j |x_j|) \right)^{-1} |f(0)| \lambda. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Поскольку  $\lambda < 1$  произвольно, лемма доказана.

Из (2.12) следует, что

$$|f(t)| \leq 2^n c_n (Mf)(x); \quad |t_j - x_j| < N_j^{-1} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (2.17)$$

**Л е м м а 5.** Пусть  $E_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) — последовательность измеримых множеств в  $R_n$  такая, что для чисел  $\mu_k \equiv \text{mes } E_k$  выполнено

$$\mu_{k+1} \leq \lambda \mu_k, \quad \lambda < 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

Для неотрицательной измеримой в  $R_n$  функции  $F(x)$  положим

$$F_k(x) = \inf \{F(\bar{x}) \mid \bar{x} \in E_k + x\} \quad (2.19)$$

( $E_k + x$  означает арифметическую сумму).

Имеют место неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \sup_x F_k(x) \leq c_1 \int_{R_n} F(x) dx, \quad (2.20)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \int_{R_n} F_k(x) dx \leq c_2 \int_{R_n} F(x) dx. \quad (2.21)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Выберем натуральное  $l$  таким, что  $\lambda^l \leq (1 - \lambda)/2$ , и рассмотрим множества

$$E'_k \equiv E_k \setminus \bigcup_{s>k+l} E_s. \quad (2.22)$$

По построению в силу (2.18)  $\text{mes } E'_k \geq \mu_k/2$ , и каждая точка  $x \in R_n$  принадлежит не более чем  $l$  множествам  $E'_k$ , так как  $E'_k \cap E'_s = \emptyset$  при  $|k - s| > l$ . Из (2.19) следует, что

$$F_k(x) \leq (\text{mes } E'_k)^{-1} \int_{x+E'_k} F(\bar{x}) d\bar{x}. \quad (2.23)$$

Умножая это неравенство на  $\mu_k$  и суммируя по  $k$ , получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k F_k(x) \leq 2l \int_{x+E'} F(\bar{x}) d\bar{x}, \quad E' = \bigcup_{k=1}^{\infty} E'_k. \quad (2.24)$$

Интегрируя по  $x$  и меняя порядок интегрирования в правой части, приходим к соотношению

$$\int_{R_n} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k F_k(x) \right) dx \leq 2l \left( \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \right) \int_{R_n} F(x) dx, \quad (2.25)$$

которое совпадает с (2.21).

Для доказательства (2.20) рассмотрим произвольную последовательность точек  $x^{(k)} \in R_n$ , и пусть  $\tilde{E}_k = (E_k + x^{(k)}) \setminus \bigcup_{s>k+l} (E_s + x^{(s)})$ . Как и ранее, находим, что  $\text{mes } \tilde{E}_k \geq \mu_k/2$  и каждая точка  $x \in R_n$  входит не более чем в  $l$  множеств  $\tilde{E}_k$ . Отсюда следует, что

$$\mu_k F_k(x^{(k)}) \leq 2 \int_{\tilde{E}_k} F(\bar{x}) d\bar{x}. \quad (2.26)$$

Суммируя по всем  $k$  и обозначая  $\tilde{E} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k$ , получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k F_k(x^{(k)}) \leq 2l \int_{\tilde{E}} F(x) dx \leq 2l \int_{R_n} F(x) dx, \quad (2.27)$$

и поскольку  $x^{(k)}$  совершенно произвольны, неравенство (2.20) установлено.

Приведенное рассуждение дает такие оценки для констант в (2.20), (2.21):

$$c_1 \leq 2l, \quad c_2 \leq 2l \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k; \quad l = \left[ \log_{\lambda} \frac{1-\lambda}{2} \right] + 1. \quad (2.28)$$

### § 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Мы сохраняем все обозначения введения и § 1.

Шаг 1. Прямое вложение (см. утверждение III § 1):

Пусть  $g(x) \in L_{pl_{\infty}}^{(\beta, N)}(R_n)$ , это означает, что  $g \in L_p(R_n)$  и (см. (7), (5), (2))

$$G(x) \equiv \sup_k \beta_k |A_k g(x)| \in L_p(R_n). \quad (3.1)$$

При этом  $|g, L_{pl_{\infty}}^{(\beta, N)}(R_n)| = |g, L_p(R_n)| + |G, L_p(R_n)|$ .

Обозначим через  $E$  множество (полной меры в  $R_m$ ) всех тех  $w$ , для которых

$$T(w) \equiv \int_{R_{n-m}} G^p(w, y) dy < \infty. \quad (3.2)$$

Ясно, что  $T(w)$ ,  $E$ , равно как и  $G(x)$ , суть величины, не зависящие от изменения  $g(x)$  на множестве нулевой меры в  $R_n$ .

Согласно классической теореме Харди — Литтлвуда — Винера ([2, гл. 1]) справедливо неравенство

$$\bar{T}(w) \equiv \int_{R_{n-m}} (\bar{M}G(w, y))^p dy \leq c_p T(w), \quad 1 < p < \infty, \quad (3.3)$$

где  $\bar{M}$  означает операцию взятия максимальной функции по переменным  $x_{m+1}, \dots, x_n$  при фиксированном  $w = (x_1, \dots, x_m)$  (см. (2.11)).

Функции  $A_k g(x)$  по своему определению (см. (5) и [1, § 8.10]) суть целые экспоненциального типа  $N_{j,k}$  по переменным  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), поэтому из леммы 4 вытекает соотношение (см. (2.17))

$$A_k g(w, y) \leq c \bar{M} A_k g(w, \tilde{y}) \quad (|\tilde{x}_j - x_j| \leq N_{j,k}^{-1}; \quad j = m+1, \dots, n). \quad (3.4)$$

Применение леммы 5 дает с учетом (1.9), (3.1), (3.2), (3.3) неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \alpha_k \sup_{y \in R_{n-m}} |A_k g(w, y)| \right)^p \leq c T(w), \quad (3.5)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{R_{n-m}} (\alpha_k |A_k g(w, y)|)^p dy \leq c T(w). \quad (3.6)$$

Но согласно (1.10)  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{-p'} < \infty$  и, применяя к (3.5) неравенство Гёльдера, получаем равномерную (по  $y$ ) сходимость при всех  $w \in E$  ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k g(w, y). \quad (3.7)$$

Сумма этого ряда, которую мы обозначим  $\hat{g}(w, y)$ , есть непрерывная (по  $y$ ) функция при всех  $w \in E$ . Она может отличаться от функции  $g(w, y)$

лишь на множестве меры 0 в  $R_n$ , поскольку, как хорошо известно ([1, § 8.10]) ряд (3.7) сходится к  $g(x)$  в метрике  $L_p(R_n)$ . Для определенности положим  $\hat{g}(w, y) = 0$ ,  $w \in E$ .

Из (3.5), (3.7) и условия (1.40) легко находим с помощью неравенства Гёльдера, что

$$|\hat{g}(w, y) - \hat{g}(w, \hat{y})| \leq \gamma(|y - \hat{y}|) T^{\frac{1}{p}}(w), \quad (3.8)$$

где  $\gamma(h) \rightarrow 0$  вместе с  $h$ . Также очевидно, что

$$\sum_{k=s}^{\infty} |A_k g(w, y)| \leq c T^{\frac{1}{p}}(w) \left( \sum_{k=s}^{\infty} \alpha_k^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \quad (3.9)$$

и, поскольку  $\int_{R_n} T(w) dw = |G, L_p(R_n)|^p$ , мы заключаем, что ряд (3.7), рассматриваемый как функция  $w$ , сходится (равномерно по  $y$ ) в пространстве  $L_p(R_m)$ . Из (3.5) заключаем, что при каждом  $u \in R_{n-m}$  функция  $\hat{g}(w, u)$ , являющаяся следом  $g(x)$  на гиперплоскости  $\{y = u\}$ , принадлежит пространству  $B_p^{(\alpha, N)}(R_m)$ , а соотношение (3.6) влечет (1.15). Кроме того, из (3.8) явствует, что отображение  $y \rightarrow \hat{g}(w, y)$  непрерывно из  $R_{n-m}$  в  $L_p(R_m)$ .

**Шаг 2. Теорема о продолжении** (утверждение II § 1).

Пусть  $f(w) \in B_p^{(\alpha, N)}(R_m)$ , т. е. существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(w), \quad f_k \in \mathfrak{M}_{k, p}(R_m), \quad (3.10)$$

сходящийся к  $f(w)$  в  $L_p(R_m)$  и такой, что

$$F(w) \equiv \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k |f_k(w)|)^p \right)^{1/p} \in L_p(R_m). \quad (3.11)$$

Фиксируем некоторую функцию  $q(t)$  ( $t \in R_1$ ) со свойствами:

- (i)  $q(0) = 1$ ,
- (ii)  $|q(t)| \leq c(1 + |t|)^{-1}$ ,
- (iii) преобразование Фурье функции  $q(t)$  есть финитная функция с носителем, содержащимся в  $[(1 + \varepsilon)^{-1}, 1]$ , где  $\varepsilon = \min_{m < j \leq n} \varepsilon_j$  (см. (4)).

Всеми этими свойствами обладает, например, функция

$$q(t) = (\sin t\delta/t\delta) e^{i\gamma t}, \quad \delta = 2(1 + \varepsilon^{-1}), \quad \gamma = (1 + 2^{-1}\varepsilon), \quad (1 + \varepsilon)^{-1} \quad (3.12)$$

Далее, введем обозначение

$$Q_k(y) = \prod_{j=m+1}^n q(N_{j, k} x_j) \quad (3.13)$$

и рассмотрим ряд (ср. [1, § 9.5])

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(w) Q_k(y). \quad (3.14)$$

В силу (3.13), (3.11), свойства (ii) функции  $q(t)$  и неравенства Гёльдера имеет место

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(w) Q_k(y)| \leq c F(w) \prod_{j=m+1}^n (1 + N_{j, 1} |x_j|)^{-1} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}. \quad (3.15)$$

Последний сомножитель здесь согласно (1.10) конечен, второй, очевидно, принадлежит  $L_p(R_{n-m})$ , а первый —  $L_p(R_m)$ . Следовательно, ряд (3.14) сходится абсолютно и равномерно по  $y$  при всех  $w$  таких, что  $F(w) < \infty$  (эти  $w$  образуют множество  $\tilde{E}$  полной меры в  $R_m$ ) к функции  $g(x) \in L_p(R_n)$ , и так как  $Q_k(0) = 1$ , то  $g(w, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(w)$  совпадает с  $f(w)$  при почти всех  $w \in R_m$ .

Спектр  $f_k(w)$  расположен (см. [1, § 3.1.5]) в прямоугольнике  $\omega_k = \{(v_1, \dots, v_m) \mid |v_j| \leq N_{j,k}; j = 1, \dots, m\}$  и поэтому с учетом свойства (iii) функции  $q(t)$  и соотношений (4), (5) мы можем утверждать, что для суммы ряда (3.14) выполнено

$$A_k g(x) = Q_k(y) f_k(w). \quad (3.16)$$

Из леммы 1 и определения чисел  $\alpha_k$  (см. (1.9)) вытекает неравенство (см. еще (3.11))

$$\int_{R_{n-m}} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k A_k g(w, y)| \right]^p dy \leq c F^p(w). \quad (3.17)$$

Интегрирование этого неравенства по  $w \in R_m$  показывает с учетом определений, что

$$|g, L_{p, l_i}^{(\beta, N)}(R_n)| \leq c |f, B_p^{(\alpha, N)}(R_m)|. \quad (3.18)$$

Тот факт, что  $f(w)$  является следом на  $R_m$  функции  $g(x)$  также и в смысле сходимости в  $L_p(R_m)$ , следует из рассуждений шага 1, поскольку  $L_{p, l_i}^{(\beta, N)}(R_n) \subset L_{p, l_{\infty}}^{(\beta, N)}(R_n)$ .

**Шаг 3. Необходимость условия (1.10) (см. утверждение I § 1).**

Предположим, в отличие от рассуждений первого и второго шага, что условие (1.10) нарушается, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{-p'} = \infty. \quad (3.19)$$

Обозначая через  $b_k$  наименьшее из чисел  $N_{m+1, k}, \dots, N_{n, k}$  и учитывая, что в силу (4)  $b_{k+1} \geq (1 + \epsilon) b_k$ ;  $\epsilon > 0$ , мы можем утверждать, что наряду с (3.19) при любом  $\delta > 0$  будет выполнено

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + b_k^{-\delta})^{-p'} = \infty. \quad (3.20)$$

В самом деле, (3.20) очевидно в случае, когда  $\alpha_k \leq b_k^{-\delta}$  для бесконечного множества индексов  $k$ , в противном случае  $\alpha_k > b_k^{-\delta}$  при  $k > k_0$ , и (3.20) следует из (3.19).

Пусть  $Q_k(y)$  те же, что на предыдущем шаге (см. (3.13)); непосредственно из определений явствуют неравенства

$$|Q_k(y), L_p(R_{n-m})| \leq c \prod_{j=m+1}^n N_{j, k}^{-\frac{1}{p}} \leq c b_k^{\frac{m-n}{p}}, \quad (3.21)$$

$$|Q_k(y)| \leq c \prod_{j=m+1}^n (1 + N_{j, k} |x_j|)^{-1} \leq c (1 + b_k \max_{m < j \leq n} |x_j|). \quad (3.22)$$

Согласно (3.20) для каждого  $\delta > 0$  существует последовательность чисел  $\gamma_k > 0$  такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k (a_k + b_k^{-\delta}))^p < \infty, \quad (3.23)$$

откуда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k a_k)^p < \infty, \quad \gamma_k \leq cb_k^{\delta}. \quad (3.24)$$

Поэтому если  $\delta$  выбрано меньше  $\min(1, (n-m)p^{-1})$ , то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k |Q_k(y)| \quad (3.25)$$

сходится в силу (3.24), (3.22) к ограниченной вне любой окрестности точки  $y = 0$  функции, принадлежащей  $L_p(R_{n-m})$ .

Применяя лемму 2, строим множество  $\Psi$  натуральных чисел такое, что функция

$$V(y) \equiv \sum_{k \in \Psi} \gamma_k Q_k(y) \quad (3.26)$$

не ограничена в любой окрестности нуля; с другой стороны,  $V(y)$ , очевидно, ограничена вне любой окрестности нуля и принадлежит  $L_p(R_{n-m})$ .

Теперь из первого неравенства (3.24) и рассуждений, буквально повторяющих рассуждения предыдущего шага, следует, что функция

$$g(x) \equiv Q_0(w) V(y), \quad (3.27)$$

где  $Q_0(w) \neq 0$  принадлежит  $\mathfrak{M}_{1,p}(R_m)$ , есть функция класса  $L_{p,t_1}^{(\beta,N)}(R_n)$ .

С другой стороны, величина

$$|g(w, y), L_p(R_m)| = |Q_0(w), L_p(R_m)| V(y) \quad (3.28)$$

не ограничена в окрестности  $y = 0$  и, следовательно,  $g(x)$  не имеет следа на  $R_m$ .

На этом заканчивается доказательство основной теоремы.

Отметим, что рассуждения настоящей работы применимы к более общей ситуации, а именно:

Пусть  $X(R_m)$  есть некоторое пространство измеримых функций, определенных на  $R_m$ , такое, что из  $\{|f_2(w)| \leq |f_1(w)| \text{ при почти всех } w \in R_m\}$  следует  $\{|f_2(w), X(R_m)| \leq |f_1(w), X(R_m)|\}$ .

Пусть  $\hat{X}_p(R_n)$  есть совокупность всех измеримых функций  $g(x)$ ,  $x \in R_n$  с конечной нормой

$$|g, \hat{X}_p(R_n)| \equiv \left| \left( \int_{R_{n-m}} |g(w, y)|^p dy \right)^{1/p}, X(R_m) \right|. \quad (3.29)$$

Предположим, что для любой функции из  $\hat{X}_p(R_n)$  ряд (3.7) сходится к ней по норме этого пространства (все эти условия выполнены, например, для случая  $X(R_m) = L_q(R_m)$ ,  $1 < q < \infty$ ).

Определим пространства  $L_{\hat{X}_p, \Phi}^{(\beta, N)}(R_n)$  и  $B_{p, X}^{(\alpha, N)}(R_m)$ , вводя нормы (см. (7), (5), (1.2), (1.3)).

$$|g, L_{\hat{X}_p, \Phi}^{(\beta, N)}(R_n)| \equiv |g, \hat{X}_p(R_n)| + |(\beta_k(A_k g)(x), \Phi), \hat{X}_p(R_n)|, \quad (3.30)$$

$$|f, B_{p, X}^{(\alpha, N)}(R_m)| \equiv |f, X(R_m)| + \inf \left\{ \left| \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k f_k(w)|^p \right)^{1/p}, X(R_m) \right| \right\}, \quad (3.31)$$

где  $f_k(w)$  — целые экспоненциального типа  $N_{j,k}$  по  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) и  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(w) = f(w)$  (в  $X(R_m)$ ).

Тогда при условии (1.10) имеют место вложения

$$L_{\tilde{X}_{p,\Phi}}^{(\beta, N)}(R_n) \rightarrow L_{\tilde{X}_{p,l_\infty}}^{(\beta, N)}(R_n) \rightarrow B_{p,\tilde{X}}^{(\alpha, N)}(R_m) \rightarrow L_{\tilde{X}_{p,l_1}}^{(\beta, N)}(R_n) \rightarrow L_{\tilde{X}_{p,\Phi}}^{(\beta, N)}(R_n). \quad (3.32)$$

Первое и последнее вложения здесь очевидны, второе и третье устанавливаются точно так же, как и в основном случае ( $X(R_m) = L_p(R_m)$ ).

Действительно, достаточно заменить интегрирование по  $w \in R_m$  ключевых соотношений (3.5) и (3.17) взятием нормы корней  $p$ -й степени из них в пространстве  $X(R_m)$ .

Укажем еще (это не относится к следствию из основной теоремы), что условие (4) на рост  $N_{j,k}$  использовалось лишь для  $m < j \leq n$ ; относительно остальных  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) достаточно предполагать, что  $N_{j,k}$ , не убывая, стремятся к  $\infty$  вместе с  $k$ .

Автор выражает искреннюю благодарность П. И. Лизоркину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

**З а м е ч а н и е.** После того, как данная работа была сдана в печать, автору стало известно об исследовании М. Л. Гольдмана (см. его статью «Описание следов для некоторых функциональных классов» в настоящем сборнике), в котором другими методами получены близкие результаты.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы сложения. М.: Наука, 1969.
2. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
3. *Калябин Г. А.* Пространства следов для обобщенно-лиувиллевских анизотропных классов. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1978, 42, № 2, с. 305—314.
4. *Калябин Г. А.* Теоремы вложения для обобщенных пространств Бесова и Лиувилля. — ДАН СССР, 1977, 232, № 6.
5. *Калябин Г. А.* Задача о следах для весовых анизотропных классов лиувиллевского типа. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1977, 41, № 5, с. 1138—1160.
6. *Гольдман М. Л.* Описание пространства следов для функций обобщенного гельдерова класса. — ДАН СССР, 1976, 231, с. 525—528.
7. *Лизоркин П. И.* Неизотропные бесселевы потенциалы. Теоремы вложения для пространства Соболева  $L_p^{r_1, \dots, r_n}$  с дробными производными. — ДАН СССР, 1966, 170, с. 508—511.
8. *Калябин Г. А.* Описание следов для функций из весовых классов лиувиллевского типа. — ДАН СССР, 1976, 227, № 2, с. 284—287.