K. A. Georgiev, V. M. Deundyak, Nikol'skii ideals and their application to the study of algebras of singular integral operators,
Algebra i Analiz, 1999, Volume 11, Issue 2, 88–108

https://www.mathnet.ru/eng/aa1049

Алгебра и анализ
Том 11 (1999), вып. 2

ИДЕАЛЫ НИКОЛЬСКОГО И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ АЛГЕБР СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© К. А. Георгиев, В. М. Деундяк

В пространстве $L_p(\mathbb{T})$, где $\mathbb{T}$ — единичная окружность и $1 < p < \infty$, исследуется замкнутая алгебра $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$, порожденная сингулярным интегральным оператором Коши S_p и операторами умножения на функции из произвольной замкнутой подалгебры Ω банаховой алгебры $L_\infty(\mathbb{T})$. Построен предсимвол $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$, т. е. эпиморфизм $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ на $\Omega \dot{+} \Omega$, ядро которого — коммутаторный идеал $\operatorname{Com}\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$, и в терминах предсимвола сформулированы необходимые условия фредгольмовости операторов из $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$. Основным инструментом при построении предсимвола является набор односторонних идеалов $\mathfrak{I}_{\mathbb{A}}$ алгебры $\operatorname{End} L_p(\mathbb{T})$, которые определяются по произвольной алгебре Дугласа $\mathbb{A}$ аналогично определению одного специального идеала, введенного Н. К. Никольским в ходе изучения алгебры тёплицевых операторов в пространстве Харди H_2. Изучены свойства идеалов, которые позволяют также описать идеал $\operatorname{Com}\mathfrak{A}(S_p, \mathbb{A} \cap \overline{\mathbb{A}})$ и получить оценки норм некоторых сингулярных интегральных операторов в фактор-пространстве $\operatorname{End} L_p(\mathbb{T})/\mathfrak{I}_{\mathbb{A}}$.

Введение

Рассмотрим на единичной окружности $\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$ стандартную нормированную меру Лебега m и пространство всех суммируемых с p-й степенью функций $L_p = L_p(\mathbb{T}, m)$, где $p \in (1, \infty)$. Пусть $\operatorname{End} L_p$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве L_p; $\operatorname{Comp} L_p$ — идеал компактных операторов; Ω — некоторая замкнутая подалгебра банаховой алгебры всех существенно ограниченных на $\mathbb{T}$ функций $L_\infty = L_\infty(\mathbb{T}, m)$; $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ — замкнутая подалгебра алгебры $\operatorname{End} L_p$, порожденная сингулярным оператором Коши S_p

$$(S_p f)(t) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{f(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \tag{0.1}$$

Ключевые слова: сингулярные операторы, фредгольмовость, алгебры Дугласа, идеалы Никольского.

Работа поддержана РФФИ (грант № 95-01-00403).

и операторами умножения на функции из Ω; $\mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ — коммутаторный идеал банаховой алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$, т. е. замкнутый двусторонний идеал этой алгебры, порожденный всеми коммутаторами $AB - BA$, где $A, B \in \mathfrak{A}(S_p, \Omega)$.

Важным методом исследования разрешимости сингулярных интегральных уравнений является построение символического исчисления, которое описывает фактор-алгебру банаховой алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ по идеалу $\mathrm{Comp}\, L_p$. Идея построения символического исчисления и первые работы в этой области принадлежат С. Г. Михлину (см. [1]). Им, в частности, показано, что $\mathrm{Comp}\, L_p$ — коммутаторный идеал алгебры $\mathfrak{A}(S_p, C(\mathbb{T}))$, где $C(\mathbb{T})$ — банахова алгебра всех непрерывных функций на $\mathbb{T}$, и для произвольного оператора F из $\mathfrak{A}(S_p, C(\mathbb{T}))$ справедливо каноническое представление

$$F = \varphi P_p^+ + \psi P_p^- + K, \tag{0.2}$$

где $\varphi, \psi \in C(\mathbb{T})$, $K \in \mathrm{Comp}\, L_p$,

$$P_p^{\pm} = I_p \pm S_p \tag{0.3}$$

— пара взаимно дополнительных проекторов, I_p — единичный оператор алгебры $\mathrm{End}\, L_p$. Сопоставление $F \mapsto (\varphi, \psi)$ определяет символ алгебры $\mathfrak{A}(S_p, C(\mathbb{T}))$, а оператор $\mathbf{F}$ фредгольмов в том и только в том случае, когда $\varphi(t) \neq 0$ и $\psi(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{T}$. Построение символического исчисления для алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ затрудняется, если в качестве Ω рассматривать алгебру более широкую, чем $C(\mathbb{T})$. Однако для получения эффективно проверяемых необходимых условий фредгольмовости оказывается полезной конструкция предсимвола алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$, т. е. эпиморфизма этой алгебры на фактор-алгебру $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)/\mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ по ее коммутаторному идеалу $\mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$, более обширному, вообще говоря, чем $\mathrm{Comp}\, L_p$. Современное состояние интенсивно развивающейся теории разрешимости сингулярных интегральных уравнений отражено в ряде монографий и обзоров (см., например, [2–12]).

В данной работе построен предсимвол для алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$, где $p \in (1, \infty)$, Ω — произвольная замкнутая подалгебра банаховой алгебры L_∞. Именно в теореме 4.1 описан эпиморфизм банаховой алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ на функциональную алгебру $\Omega \dotplus \Omega$ с ядром $\mathrm{Com}\,(\mathfrak{A}(S_p, \Omega))$ и получен аналог канонического представления (0.2), где $\varphi, \psi \in \Omega$, $K \in \mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$. (Здесь и далее $A \dotplus B$ обозначает прямую сумму банаховых пространств A и B). В случае конкретных алгебр Ω эти результаты нашли применение при изучении сингулярных интегральных операторов в весовых пространствах [13–15].

Основным инструментом при построении предсимвола является некоторый набор односторонних идеалов алгебры $\mathrm{End}\, L_p$, представляющих, на наш взгляд, и самостоятельный интерес. В ходе изучения банаховой алгебры тёплицевых операторов в пространстве Харди H_2 Н. К. Никольский ввел специальный односторонний идеал γ^0 алгебры $\mathrm{End}\, H_2$ (см. [3, с. 13] и [4, п. 4]). В настоящей работе при построении предсимвола алгебры $\mathfrak{A}(S_p,\Omega)$ используется естественный аналог этого идеала — односторонний идеал $\mathfrak{J}$ алгебры $\operatorname{End} L_p$. Наряду с $\mathfrak{J}$ вводятся односторонние идеалы $\mathfrak{J}^-(\mathbb{A})$, $\mathfrak{J}^+(\mathbb{A})$, $\mathfrak{J}(\mathbb{A})$, $\mathfrak{Q}^-(\mathbb{A})$, $\mathfrak{Q}^+(\mathbb{A})$, $\mathfrak{Q}(\mathbb{A})$, связанные с произвольной алгеброй Дугласа $\mathbb{A}$, причем $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(L_\infty)$. Поскольку определение и применение этих идеалов в значительной степени используют идеи Н. К. Никольского, связанные с γ^0, то эти идеалы далее называются идеалами Никольского. Один из главных результатов нашей работы — исследование свойств этих идеалов. В частности, были получены оценки норм некоторых сингулярных интегральных операторов в фактор-пространстве $\operatorname{End} L_p/\mathfrak{J}(\mathbb{A})$, которые сыграли важную роль в построении предсимвола (например, теорема 3.1 обобщает теорему Адамяна–Арова–Крейна [16]).

План работы: в §1 излагаются необходимые предварительные сведения; в §2 определяются идеалы Никольского и исследуются их свойства; §3 содержит оценки для фактор-норм оператора Ганкеля и некоторых сингулярных интегральных операторов; в §4 для произвольной алгебры коэффициентов Ω строится предсимвол алгебры $\mathfrak{A}(S_p,\Omega)$, который применяется затем для получения необходимых условий фредгольмовости операторов из $\mathfrak{A}(S_p,\Omega)$; в §5 с помощью идеалов Никольского описывается ядро предсимвола — коммутаторный идеал алгебры $\mathfrak{A}(S_p,\Omega)$.

Основные результаты работы частично анонсированы в [15, 17].

§1. Предварительные сведения

В этом параграфе приводятся необходимые в дальнейшем известные факты о пространствах Харди (1°), алгебрах Дугласа (2°) и о сингулярных интегральных операторах, операторах Тёплица и Ганкеля (3°).

1°. Пространства Харди. Пусть $L_p = L_p(\mathbb{T}, m)$, где $p \in [1,\infty)$ — банахово пространство функций на $\mathbb{T}$ с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int |f(t)|^p \, dm(t)\right)^{1/p},$$

L_∞ — банахова алгебра существенно ограниченных функций на $\mathbb{T}$ с нормой $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)| : t \in \mathbb{T}\}$.

Для $1 < p \leqslant \infty$ мы будем рассматривать пространства Харди $H_p^\pm$. Напомним определение „внутреннего“ пространства Харди H_p^+ [18, с. 63]:

$$H_p^+ = \{f \in L_p : \int f(t)t^n \, dm(t) = 0, \ n = 1, 2, \dots\}.$$

Аналогично определяется „внешнее“ пространство Харди H_p^-:

$$H_p^- = \{f \in L_p : \int f(t)t^n \, dm(t) = 0, \ n = 0, -1, \dots\}.$$

Отметим, что функции из „внутреннего" („внешнего") пространства Харди допускают аналитическое продолжение на внутренность (внешность) окружности $\mathbb{T}$. Пространства Харди H_p^+, H_p^- являются замкнутыми подпространствами пространства L_p, причем $H_p^+ \cap H_p^- = 0$ и для $p \in (1, \infty)$ $H_p^+ \dotplus H_p^- = L_p$. Отметим также, что $fg \in H_p^+$ ($fg \in H_p^-$), если $f \in H_\infty^+$, $g \in H_p^+$ ($f \in H_\infty^-$, $g \in H_p^-$). Далее, иногда мы будем использовать для H_p^+ сокращенное и более традиционное обозначение H_p.

2°. Алгебры Дугласа. Если $\mathfrak{X}$ — банахова алгебра (C^*-алгебра) и $M \subset \mathfrak{X}$, то через $\operatorname{alg}(M)$ ($\operatorname{alg}_*(M)$) будем обозначать замкнутую подалгебру (C^*-подалгебру) алгебры $\mathfrak{X}$, порожденную множеством M. В дальнейшем будем использовать также следующие обозначения: $\mathfrak{B} = \{b \in H_\infty : |b(t)| = 1$ для почти всех $t \in \mathbb{T}\}$; если $\varphi \in L_\infty$, то $\overline{\varphi}$ — комплексно-сопряженная функция; если $M \subset L_\infty$, то $\overline{M} = \{\overline{\varphi} : \varphi \in M\}$.

Напомним [19], что алгеброй Дугласа называется алгебра $\operatorname{alg}(H_\infty \cup \overline{M})$, где $M \subset \mathfrak{B}$. Пусть $\mathbb{A}$ — алгебра Дугласа, $\mathfrak{B}_\mathbb{A} = \{b \in \mathfrak{B} : \overline{b} \in \mathbb{A}\}$. Алгебры $Q_\mathbb{A} = \mathbb{A} \cap \overline{\mathbb{A}}$ и $C_\mathbb{A} = \operatorname{alg}_*(\mathfrak{B}_\mathbb{A})$ называют, следуя [3], алгебрами Сарасона (см. [20]). Из определения алгебр Дугласа легко выводится их характеристическое свойство (см. [21, с. 388]):

Лемма 1.1. *Функция $f (\in L_\infty)$ принадлежит алгебре Дугласа $\mathbb{A}$ в том и только в том случае, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists h \in H_\infty \ \exists b \in \mathfrak{B}_\mathbb{A} \colon \|f - h\overline{b}\|_\infty < \varepsilon.$$

Согласно известной теореме Чанг–Маршалла [22, 23] любая замкнутая подалгебра банаховой алгебры L_∞, содержащая H_∞, является алгеброй Дугласа.

Пример 1.1. Рассмотрим алгебры Дугласа L_∞, H_∞ и $H_\infty + C$, где $C = C(\mathbb{T})$ — алгебра всех непрерывных на $\mathbb{T}$ функций. Соответствующие множества $\mathfrak{B}_\mathbb{A}$ и алгебры Сарасона $C_\mathbb{A}$ и $Q_\mathbb{A}$ имеют следующий вид: (а) если $\mathbb{A} = L_\infty$, то $\mathfrak{B}_\mathbb{A} = \mathfrak{B}, C_\mathbb{A} = Q_\mathbb{A} = L_\infty$; (б) если $\mathbb{A} = H_\infty$, то $\mathfrak{B}_\mathbb{A}$ состоит из всех комплексных констант, равных по модулю 1, а $C_\mathbb{A} = Q_\mathbb{A} = \mathbb{C}$; (в) если $\mathbb{A} = H_\infty + C$, то $\mathfrak{B}_\mathbb{A}$ состоит из всех конечных произведений Бляшке, $C_\mathbb{A} = C$ и $Q_\mathbb{A} = QC$ — алгебра всех квазинепрерывных функций (относительно квазинепрерывных функций см. [21, с. 374]).

Для того чтобы было удобнее формулировать симметричные относительно операции комплексного сопряжения утверждения, связанные с алгеброй Дугласа $\mathbb{A}$, в дальнейшем будут использоваться обозначения

$$\mathbb{A}^+ = \mathbb{A}, \qquad \mathbb{A}^- = \overline{\mathbb{A}}.$$

3°. Сингулярные интегральные операторы, операторы Тёплица и Ганкеля. Пусть $1 < p < \infty$. Напомним, что проекторы $P_p^{\pm}$ из (0.3) обладают следующими свойствами: $P_p^{\pm}(L_p) = H_p^{\pm}$ и ограничение $P_p^{\pm}$ на $H_p^{\pm}$ — тождественный оператор. (Здесь и далее утверждение, в формулировке которого содержатся символы $\pm$ и(или) $\mp$, является краткой записью двух утверждений, одно из которых соответствует верхним знакам, а второе — нижним). Отметим, что

$$(P_p^+ f)(t) = \overline{t\, P_p^- (\overline{tf})(t)}, \quad f \in L_p.$$

Так как и оператор умножения на t, и оператор комплексного сопряжения — изометрии на L_p, то из последнего равенства следует, что $\|P_p^+\| = \|P_p^-\|$. Примем для краткости обозначение:

$$\gamma_p = \|P_p^+\| = \|P_p^-\|. \tag{1.1}$$

Хорошо известно, что $\gamma_2 = 1$; оценки для γ_p в случае произвольного $p \in (1, \infty)$ содержатся в [6, с. 317]. Для $F \in \operatorname{End} L_p$ через F^* будем обозначать оператор из $\operatorname{End} L_q$, где $q = p/(p-1)$, сопряженный оператору F относительно полуторалинейной формы

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int \varphi(t)\overline{\psi(t)}\, dm(t), \quad \varphi \in L_p, \psi \in L_q.$$

Как показано, например, в [6, с. 40],

$$(S_p)^* = S_q, \qquad (P_p^{\pm})^* = P_q^{\pm}. \tag{1.2}$$

Пусть M_φ, когда $\varphi \in L_\infty$, — оператор умножения на φ, а $\mathrm{H}_\varphi^+ = P_p^- M_\varphi P_p^+$ и $\mathrm{T}_\varphi^+ = P_p^+ M_\varphi P_p^+$ — соответственно операторы Ганкеля и Тёплица, действующие в пространстве L_p. В обозначения операторов M_φ, H_φ^+ и T_φ^+ не входит p, но в каждом конкретном случае будет ясно, в каком из L_p-пространств действуют эти операторы. Наряду с H_φ^+ и T_φ^+ далее рассматриваются операторы

$$\mathrm{H}_\varphi^- = P_p^+ M_\varphi P_p^-, \qquad \mathrm{T}_\varphi^- = P_p^- M_\varphi P_p^-.$$

Пусть $\mathfrak{L}$ — замкнутое подпространство пространства $\operatorname{End} L_p$. Фактор-норму оператора $F \in \operatorname{End} L_p$ относительно $\mathfrak{L}$, т. е. норму его образа в фактор-пространстве $\operatorname{End} L_p/\mathfrak{L}$ будем обозначать через $|\!|\!| F |\!|\!|_{\mathfrak{L}}$; иначе говоря,

$$|\!|\!| F |\!|\!|_{\mathfrak{L}} = \inf_{K \in \mathfrak{L}} \|F - K\|.$$

В случае, когда $\mathfrak{L} = \operatorname{Comp} L_p$, фактор-норма F называется существенной нормой и обозначается $|\!|\!| F |\!|\!|$ (см. [8, с. 24]).

Теорема 1.1. *Для* $p = 2$ *и* $\varphi \in L_\infty$

$$\|\mathbf{H}_\varphi^\pm\| = \inf_{\psi \in (H_\infty + C)^\pm} \|\varphi - \psi\|_\infty.$$

Для оператора $\mathbf{H}_\varphi^+$ эта теорема доказана В. М. Адамяном, Д. З. Аровым и М. Г. Крейном в [16], а для $\mathbf{H}_\varphi^-$ доказательство легко сводится к случаю $\mathbf{H}_\varphi^+$.

Хорошо известны следующие утверждения об оценке норм операторов Ганкеля и Тёплица.

Теорема 1.2. *Для* $p \in (1, \infty)$ *и* $\varphi \in L_\infty$

$$\|\mathbf{H}_\varphi^\pm\| = \inf_{\psi \in (H_\infty)^\pm} \|\varphi - \psi\|_\infty.$$

Теорема 1.3. *Для* $p \in (1, \infty)$ *и* $\varphi \in L_\infty$

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant \|\mathbf{T}_\varphi^\pm\| \leqslant (\gamma_p)^2 \|\varphi\|_\infty.$$

Если $p = 2$, *то* $\|\mathbf{T}_\varphi^\pm\| = \|\varphi\|_\infty$.

Замечание 1.1. Для $\mathbf{H}_\varphi^+ \in \operatorname{End} L_2$ теорема 1.2 доказана З. Нехари в [24], для $\mathbf{T}_\varphi^+ \in \operatorname{End} L_2$ теорема 1.3 доказана А. Брауном и П. Халмошом в [25]; соответствующие доказательства содержатся также в [5, с. 61–62, 66]. Доказательства теорем 1.2 и 1.3 для $\mathbf{H}_\varphi^+$ и $\mathbf{T}_\varphi^+$ в случае произвольного p требуют лишь небольшой модификации рассуждений из [5], и поэтому здесь не приводятся. Для $\mathbf{H}_\varphi^-$, $\mathbf{T}_\varphi^-$ утверждения теорем легко сводятся к случаю $\mathbf{H}_\varphi^+$, $\mathbf{T}_\varphi^+$.

§2. Идеалы Никольского, связанные с алгебрами Дугласа

1°. Определение идеалов $\mathfrak{I}^\pm(\mathbb{A})$, $\mathfrak{I}(\mathbb{A})$. Пусть $\mathbb{A}$ — произвольная алгебра Дугласа, $p \in (1, \infty)$. С алгеброй $\mathbb{A}$ свяжем следующие подмножества алгебры $\operatorname{End} L_p$:

$$\mathfrak{I}_p^-(\mathbb{A}) = \{F \in \operatorname{End} L_p : \inf_{b \in \mathfrak{B}_\mathbb{A}} \|(P_p^- M_b) F\| = 0\},$$
$$\mathfrak{I}_p^+(\mathbb{A}) = \{F \in \operatorname{End} L_p : \inf_{b \in \mathfrak{B}_\mathbb{A}} \|(P_p^+ M_{\bar{b}}) F\| = 0\},$$
$$\mathfrak{I}_p(\mathbb{A}) = \mathfrak{I}_p^-(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{I}_p^+(\mathbb{A}).$$

Замечание 2.1. Если $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ — алгебры Дугласа и $\mathbb{A}_1 \subset \mathbb{A}_2$, то, как легко видеть, $\mathfrak{I}_p^\pm(\mathbb{A}_1) \subset \mathfrak{I}_p^\pm(\mathbb{A}_2)$, $\mathfrak{I}_p(\mathbb{A}_1) \subset \mathfrak{I}_p(\mathbb{A}_2)$.

Лемма 2.1. *Множества* $\mathfrak{I}_p^-(\mathbb{A})$, $\mathfrak{I}_p^+(\mathbb{A})$, $\mathfrak{I}_p(\mathbb{A})$ *являются замкнутыми правыми идеалами банаховой алгебры* $\operatorname{End} L_p$.

Доказательство. Проверим, что $\mathfrak{I}_p^-(\mathbb{A})$ — правый идеал: если $F_1 \in \mathfrak{I}_p^-(\mathbb{A})$ и $F_2 \in \operatorname{End}(L_p)$, то

$$\inf_{b\in\mathfrak{B}_\mathbb{A}} \|(P_p^- M_b)(F_1F_2)\| \leqslant \inf_{b\in\mathfrak{B}_\mathbb{A}} (\|P_p^- M_b F_1\| \, \|F_2\|) = 0$$

и, следовательно, $F_1F_2 \in \mathfrak{I}_p^-(\mathbb{A})$.

Докажем замкнутость $\mathfrak{I}_p^-(\mathbb{A})$. Пусть $F \in \operatorname{End} L_p$, а $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность операторов из $\mathfrak{I}_p^-(\mathbb{A})$, сходящаяся к F. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем такое число N, что $\|F - F_n\| < \varepsilon/(2\|P_p^-\|)$ для всех $n > N$. Если $m > N$ и $\|P_p^- M_b F_m\| < \varepsilon/2$ для некоторого $b \in \mathfrak{B}_\mathbb{A}$, то

$$\begin{aligned}\|P_p^- M_b F\| &\leqslant \|P_p^- M_b(F - F_m)\| + \|P_p^- M_b F_m\| \\ &\leqslant \|P_p^-\| \, \|F - F_m\| + \|P_p^- M_b F_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Итак, $F \in \mathfrak{I}_p^-(\mathbb{A})$, и, следовательно, $\mathfrak{I}_p^-(\mathbb{A})$ — замкнутый правый идеал алгебры $\operatorname{End} L_p$. Аналогично $\mathfrak{I}_p^-(\mathbb{A})$ рассматривается $\mathfrak{I}_p^+(\mathbb{A})$. Но тогда и $\mathfrak{I}_p(\mathbb{A}) = \mathfrak{I}_p^+(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{I}_p^-(\mathbb{A})$ — замкнутый правый идеал. •

По аналогии с $\mathfrak{I}_p^\pm(\mathbb{A})$, $\mathfrak{I}_p(\mathbb{A})$ вводятся замкнутые левые идеалы алгебры $\operatorname{End} L_p$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_p^+(\mathbb{A}) &= \{F \in \operatorname{End} L_p : \inf_{b\in\mathfrak{B}_\mathbb{A}} \|F(M_b P_p^+)\| = 0\}, \\ \mathfrak{Q}_p^-(\mathbb{A}) &= \{F \in \operatorname{End} L_p : \inf_{b\in\mathfrak{B}_\mathbb{A}} \|F(M_{\bar b} P_p^-)\| = 0\}, \\ \mathfrak{Q}_p(\mathbb{A}) &= \mathfrak{Q}_p^-(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{Q}_p^+(\mathbb{A}).\end{aligned}$$

Из определений идеалов и равенств (1.2) вытекает

Лемма 2.2. *Пусть* $p \in (1, \infty)$, $q = p/(p-1)$, $\mathbb{A}$ — *произвольная алгебра Дугласа. Тогда*

$$\mathfrak{Q}_q^\pm(\mathbb{A}) = (\mathfrak{I}_p^\pm(\mathbb{A}))^*, \qquad \mathfrak{Q}_q(\mathbb{A}) = (\mathfrak{I}_p(\mathbb{A}))^*.$$

Замечание 2.2. Пусть $\widetilde{\mathrm{T}}_\varphi$ — ограничение оператора $\mathrm{T}_\varphi^+ \in \operatorname{End} L_2$ на пространство Харди H_2. Для произвольной замкнутой подалгебры Ω банаховой алгебры L_∞ обозначим через $\widetilde{\mathrm{T}}_\Omega$ множество всех операторов вида $\widetilde{\mathrm{T}}_\varphi$, где $\varphi \in \Omega$. В работе [3, п. 106–128] (см. также [4, п. 4]) Н. К. Никольский исследовал структуру банаховой алгебры $\operatorname{alg}(\widetilde{\mathrm{T}}_\Omega)$ с помощью замкнутого левого идеала алгебры $\operatorname{End} H_2$

$$\gamma^0 = \{F \in \operatorname{End} H_2 : \forall f \in H_2 \ \lim_{n\to\infty} \|F(z^n f)\| = 0\}.$$

Как отмечалось ранее, введенные выше идеалы являются естественными аналогами γ^0 и далее называются идеалами Никольского.

Ниже мы, как правило, рассматриваем только правые идеалы, но соответствующие утверждения можно получить и для левых (например, с помощью леммы 2.2). Для идеалов $\mathfrak{J}_p^{\pm}(L_\infty)$, $\mathfrak{J}_p(L_\infty)$, $\mathfrak{Q}_p^{\pm}(L_\infty)$, $\mathfrak{Q}_p(L_\infty)$, которые в дальнейшем часто используются, примем обозначения $\mathfrak{J}_p^{\pm}$, $\mathfrak{J}_p$, $\mathfrak{Q}_p^{\pm}$, $\mathfrak{Q}_p$ соответственно. Поскольку далее, как правило, все рассуждения проводятся при фиксированном p, мы будем опускать индекс p в обозначениях идеалов.

Замечание 2.3. Пусть $\mathfrak{B}_{\rm int}$ — полугруппа, порожденная всеми интерполяционными произведениями Бляшке (см. [21, с. 332]). Фактически Чанг и Маршалл доказали в [22, 23], что произвольная алгебра Дугласа $\mathbb{A}$ представима в виде

$$\mathbb{A} = \operatorname{alg}(H_\infty \cup \overline{\mathfrak{B}_{\mathbb{A}} \cap \mathfrak{B}_{\rm int}}).$$

Учитывая этот факт, можно заменить $\mathfrak{B}_{\mathbb{A}}$ в лемме 1.1 и определении идеалов $\mathfrak{J}^{\pm}(\mathbb{A})$, $\mathfrak{Q}^{\pm}(\mathbb{A})$ более узким множеством $\mathfrak{B}_{\mathbb{A}} \cap \mathfrak{B}_{\rm int}$.

2°. Свойства идеалов $\mathfrak{J}^{\pm}(\mathbb{A})$, $\mathfrak{J}(\mathbb{A})$. Так как $\mathfrak{B}_{\mathbb{A}} \subset H_\infty^+$ и $\overline{\mathfrak{B}_{\mathbb{A}}} \subset H_\infty^-$, то очевидны равенства

$$(P_p^+ M_{\bar b})(P_p^- F) = 0, \quad (P_p^- M_b)(P_p^+ F) = 0, \quad b \in \mathfrak{B}_{\mathbb{A}}, F \in \operatorname{End} L_p. \tag{2.1}$$

Из (2.1) и определения идеалов $\mathfrak{J}^{\pm}(\mathbb{A})$, $\mathfrak{J}(\mathbb{A})$ легко выводится

Лемма 2.3. *Пусть* $\mathbb{A}$ — *алгебра Дугласа,* $F \in \operatorname{End} L_p$. *Справедливы следующие утверждения*:

(а) $P_p^{\mp} F \in \mathfrak{J}^{\pm}(\mathbb{A})$;

(б) $F \in \mathfrak{J}^{\pm}(\mathbb{A})$ *тогда и только тогда, когда* $P_p^{\pm} F \in \mathfrak{J}^{\pm}(\mathbb{A})$;

(в) $F \in \mathfrak{J}(\mathbb{A})$ *тогда и только тогда, когда* $P_p^+ F \in \mathfrak{J}(\mathbb{A})$ *и* $P_p^- F \in \mathfrak{J}(\mathbb{A})$;

(г) *если* $F \in \mathfrak{J}(\mathbb{A})$, *то* $S_p F \in \mathfrak{J}(\mathbb{A})$.

Пример 2.1. Пусть $\varphi \in L_\infty$. Из леммы 2.3 (а) вытекает, что $\mathbf{H}_\varphi^{\pm}, \mathbf{T}_\varphi^{\mp} \in \mathfrak{J}^{\pm}(\mathbb{A})$. С другой стороны, $\mathbf{T}_\varphi^{\pm} \notin \mathfrak{J}^{\pm}(\mathbb{A})$ для любой функции $\varphi \in L_\infty$, отличной от нуля на множестве положительной меры (см. замечание 3.2).

В следующей лемме вычисляются идеалы $\mathfrak{J}(\mathbb{A})$ в случае простейших алгебр Дугласа $\mathbb{A}$.

Лемма 2.4. *Справедливы равенства*

$$\mathfrak{J}(H_\infty) = \{0\}, \qquad \mathfrak{J}(H_\infty + C) = \operatorname{Comp} L_p.$$

Доказательство. Так как в $\mathfrak{B}_{H_\infty}$ входят только константы, то

$$\mathfrak{J}^{\pm}(H_\infty) = \{F \in \operatorname{End} L_p : P_p^{\pm} F = 0\}.$$

Поэтому $F = P_p^- F + P_p^+ F = 0$ для $F \in \mathfrak{J}(H_\infty) = \mathfrak{J}^-(H_\infty) \cap \mathfrak{J}^+(H_\infty)$.

Для доказательства второго равенства проверим сначала справедливость вложения

$$\mathfrak{J}(H_\infty + C) \subset \operatorname{Comp} L_p. \tag{2.2}$$

Пусть $F \in \mathfrak{J}(H_\infty + C)$. Покажем, что $P_p^- F \in \operatorname{Comp} L_p$. По лемме 2.3(в) $P_p^- F \in \mathfrak{J}(H_\infty + C) \subset \mathfrak{J}^-(H_\infty + C)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем конечное произведение Бляшке b, для которого $\|(P_p^- M_b)(P_p^- F)\| < \varepsilon$ (см. пример 1.1(в)). Тогда

$$\begin{aligned} \|P_p^- F - M_{\bar b} \mathrm{H}_b^- F\| &= \|P_p^- F - M_{\bar b} P_p^+ M_b P_p^- F\| \\ &= \|M_{\bar b}(M_b P_p^- F - P_p^+ M_b P_p^- F)\| = \|M_{\bar b}(P_p^- M_b P_p^- F)\| \\ &\leqslant \|M_{\bar b}\| \, \|P_p^- M_b (P_p^- F)\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. операторы вида $M_{\bar b} \mathrm{H}_b^- F$ аппроксимируют $P_p^- F$. Так как конечное произведение Бляшке непрерывно на $\mathbb{T}$ ([19, с. 15]), то по теореме 1.1 $\mathrm{H}_b^- \in \operatorname{Comp} L_p$ и, следовательно, $M_{\bar b} \mathrm{H}_b^- F \in \operatorname{Comp} L_p$. Таким образом, $P_p^- F \in \operatorname{Comp} L_p$.

Аналогично показывается, что $P_p^+ F \in \operatorname{Comp} L_p$. Итак, $F = P_p^- F + P_p^+ F \in \operatorname{Comp} L_p$, и вложение (2.2) доказано.

Для доказательства обратного вложения достаточно показать, что $\mathfrak{J}(H_\infty + C)$ содержит все операторы ранга 1. Каждому такому оператору из $\operatorname{End} L_p$ можно поставить в соответствие пару функций $h \in L_p, g \in L_q$ (здесь $q = p/(p-1)$) и записать его в виде

$$Q_{h,g} f = \langle f, g \rangle h, \quad f \in L_p.$$

Поскольку множество тригонометрических полиномов $\mathcal{F}$ плотно в L_p, оператор $Q_{h,g}$ можно аппроксимировать операторами вида $Q_{\zeta,g}$, где $\zeta \in \mathcal{F}$. Пусть для определенности $\zeta(t) = \sum_{k=-m}^{n} a_k t^k$, где $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда $P_p^-(t^m \zeta(t)) = 0$ и, следовательно, $P_p^- M_{t^m} Q_{\zeta,q} = 0$. Аналогично получаем, что $P_p^+ M_{\bar t^{n+1}} Q_{\zeta,q} = 0$. Так как $t^m, t^{n+1} \in \mathfrak{B}_{H_\infty + C}$, то последние равенства означают

$$Q_{\zeta,q} \in \mathfrak{J}^-(H_\infty + C) \cap \mathfrak{J}^+(H_\infty + C) = \mathfrak{J}(H_\infty + C),$$

и в силу замкнутости $\mathfrak{J}(H_\infty + C)$ получаем $F \in \mathfrak{J}(H_\infty + C)$. Таким образом, вложение, обратное вложению (2.2), доказано. •

Теорема 2.1. *Пусть $p \in (1, \infty)$, Ω — замкнутая подалгебра L_∞, $\mathbb{A}$ — алгебра Дугласа. Если $\Omega \subset Q_{\mathbb{A}}$, то $\mathfrak{A}(S_p, \Omega) \cap \mathfrak{J}(\mathbb{A})$ — замкнутый двусторонний идеал алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$.*

Доказательство проведем в несколько шагов.

1) Пусть $F \in \mathfrak{J}^-(\mathbb{A})$, $f \in H_\infty$. Покажем, что $M_f F \in \mathfrak{J}^-(\mathbb{A})$. Если $f = 0$ почти всюду на $\mathbb{T}$, то утверждение очевидно выполняется. Рассмотрим случай, когда

$\|f\|_\infty \neq 0$. Так как $F \in \mathfrak{I}^-(\mathbb{A})$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $b \in \mathfrak{B}_\mathbb{A}$, что $\|P_p^- M_b F\| < \varepsilon/(\|P_p^-\| \, \|f\|_\infty)$. Тогда, учитывая, что $f \in H_\infty$, получаем

$$\|(P_p^- M_b)(M_f F)\| = \|(P_p^- M_f)(P_p^- + P_p^+)M_b F\| = \|(P_p^- M_f)(P_p^- M_b)F\|$$
$$\leqslant \|P_p^-\| \, \|M_f\| \, \|(P_p^- M_b)F\| < \|P_p^-\| \, \|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{\|P_p^-\| \, \|f\|_\infty} = \varepsilon,$$

откуда в силу произвольности ε вытекает, что $M_f F \in \mathfrak{I}^-(\mathbb{A})$.

2) Пусть $F \in \mathfrak{I}^-(\mathbb{A})$, $f^- \in \mathfrak{B}_\mathbb{A}$. Покажем, что $M_f F \in \mathfrak{I}^-(\mathbb{A})$. Так как $F \in \mathfrak{I}^-(\mathbb{A})$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $b \in \mathfrak{B}_\mathbb{A}$, что $\|P_p^- M_b F\| < \varepsilon$. Тогда

$$\|(P_p^- M_{b\overline{f}})(M_f F)\| = \|(P_p^- M_b)F\| < \varepsilon,$$

что дает искомое утверждение в силу того, что $b\overline{f} \in \mathfrak{B}_\mathbb{A}$.

3) Покажем, что если $f \in \mathbb{A}^\pm$ и $F \in \mathfrak{I}^\mp(\mathbb{A})$, то $M_f F \in \mathfrak{I}^\mp(\mathbb{A})$. Пусть $F \in \mathfrak{I}^-(\mathbb{A})$, $f \in \mathbb{A}^+$. В силу леммы 1.1 оператор $M_f F$ аппроксимируется операторами вида $M_{\overline{b}h} F$, где $b \in \mathfrak{B}_\mathbb{A}, h \in H_\infty$. Но из 1)–2) следует, что эти операторы лежат в $\mathfrak{I}^-(\mathbb{A})$, откуда вытекает искомое утверждение для верхних знаков. Для нижних знаков утверждение доказывается аналогично.

4) Докажем, что множество $\mathfrak{A}(S_p, Q_\mathbb{A}) \cap \mathfrak{I}(\mathbb{A})$ является замкнутым двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{A}(S_p, Q_\mathbb{A})$ для любой алгебры Дугласа $\mathbb{A}$. Непосредственно из определений следует, что $\mathfrak{A}(S_p, Q_\mathbb{A}) \cap \mathfrak{I}(\mathbb{A})$ — замкнутый правый идеал алгебры $\mathfrak{A}(S_p, Q_\mathbb{A})$. Поскольку банахова алгебра $\mathfrak{A}(S_p, Q_\mathbb{A})$ порождается операторами S_p и $M_f (f \in Q_\mathbb{A})$, то для доказательства того, что $\mathfrak{A}(S_p, Q_\mathbb{A}) \cap \mathfrak{I}(\mathbb{A})$ — левый идеал алгебры $\mathfrak{A}(S_p, Q_\mathbb{A})$, достаточно установить два факта: а) если $F \in \mathfrak{I}(\mathbb{A})$, то $S_p F \in \mathfrak{I}(\mathbb{A})$, б) если $f \in Q_\mathbb{A}$ и $F \in \mathfrak{I}(\mathbb{A})$, то $M_f F \in \mathfrak{I}(\mathbb{A})$. Утверждение а) содержится в лемме 2.3, а утверждение б) вытекает из 3).

5) Завершим доказательство теоремы. Пусть $\Omega \subset Q_\mathbb{A}$. Множество $\mathfrak{A}(S_p, \Omega) \cap \mathfrak{I}(\mathbb{A})$ является, очевидно, замкнутым правым идеалом алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$. Для доказательства того, что это множество является левым идеалом, возьмем произвольные $F_1 \in \mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ и $F_2 \in \mathfrak{A}(S_p, \Omega) \cap \mathfrak{I}(\mathbb{A})$. Тогда, с одной стороны, $F_1 F_2 \in \mathfrak{A}(S_p, \Omega)$, а, с другой стороны, в силу 4) получаем $F_1 F_2 \in \mathfrak{A}(S_p, Q_\mathbb{A}) \cap \mathfrak{I}(\mathbb{A})$. Следовательно,

$$F_1 F_2 \in \mathfrak{A}(S_p, \Omega) \cap (\mathfrak{A}(S_p, Q_\mathbb{A}) \cap \mathfrak{I}(\mathbb{A})) = \mathfrak{A}(S_p, \Omega) \cap \mathfrak{I}(\mathbb{A}). \quad \bullet$$

Следствие 2.1. *Для любой замкнутой подалгебры Ω банаховой алгебры L_∞ множество $\mathfrak{A}(S_p, \Omega) \cap \mathfrak{I}$ является замкнутым двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$.*

§3. Оценки фактор-норм операторов Ганкеля и некоторых сингулярных интегральных операторов

Прежде всего установим достаточные условия принадлежности операторов Ганкеля идеалу $\mathfrak{J}(\mathbb{A})$. Из оценок теоремы 3.1 будет следовать необходимость этих условий.

Лемма 3.1. *Пусть* $p \in (1, \infty)$, $\mathbb{A}$ — *алгебра Дугласа. Тогда*

(а) *если* $\varphi \in \mathbb{A}^{\pm}$, *то* $\mathbf{H}_{\varphi}^{\pm} \in \mathfrak{J}(\mathbb{A})$;

(б) *если* $\varphi \in Q_{\mathbb{A}}$, *то* $\mathbf{H}_{\varphi}^{+}, \mathbf{H}_{\varphi}^{-} \in \mathfrak{J}(\mathbb{A})$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathbb{A} = \mathbb{A}^{+}$. В силу леммы 1.1 для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $h \in H_{\infty}$ и $b \in \mathfrak{B}_{\mathbb{A}}$, что $\|\varphi - h\bar{b}\|_{\infty} < \varepsilon$. Тогда из теоремы 1.2 получаем

$$
\begin{aligned}
\|(P_p^- M_b)\mathbf{H}_{\varphi}^{+}\| &= \|P_p^- M_b P_p^- M_{\varphi} P_p^{+}\| = \|P_p^- M_{b\varphi} P_p^{+}\| = \|\mathbf{H}_{b\varphi}^{+}\| \\
&= \inf_{\psi \in H_{\infty}} \|b\varphi - \psi\|_{\infty} = \inf_{\psi \in H_{\infty}} \|\varphi - \bar{b}\psi\|_{\infty} < \|\varphi - h\bar{b}\|_{\infty} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}
$$

откуда вытекает, что $\mathbf{H}_{\varphi}^{+} \in \mathfrak{J}^{-}(\mathbb{A})$. Следовательно, $\mathbf{H}_{\varphi}^{+} \in \mathfrak{J}(\mathbb{A})$, поскольку $\mathbf{H}_{\varphi}^{+} \in \mathfrak{J}^{+}(\mathbb{A})$ (см. пример 2.1). Итак, утверждение (а) для $\mathbb{A}^{+}$ доказано. Аналогично доказывается это утверждение для $\mathbb{A}^{-}$. Второе утверждение леммы — прямое следствие первого. •

Следствие 3.1. $M_{\varphi} P_p^{\mp} \in \mathfrak{J}^{\pm}$ *для любой функции* $\varphi \in L_{\infty}$.

Доказательство. В представлении $M_{\varphi} P_p^{\mp} = \mathbf{T}_{\varphi}^{\mp} + \mathbf{H}_{\varphi}^{\mp}$ каждое слагаемое правой части принадлежит $\mathfrak{J}^{\pm}$: $\mathbf{T}_{\varphi}^{\mp} \in \mathfrak{J}^{\pm}$ по определению идеала $\mathfrak{J}^{\pm}$ (см. пример 2.1), $\mathbf{H}_{\varphi}^{\mp} \in \mathfrak{J}$ в силу леммы 3.1. •

Напомним, что $\gamma_p = \|P_p^{\pm}\|$ (см. (1.1)).

Теорема 3.1. *Пусть* $p \in (1, \infty)$, $\varphi \in L_{\infty}$, $\mathbb{A}$ — *алгебра Дугласа. Тогда*

$$
\frac{1}{\gamma_p} \inf_{\psi \in \mathbb{A}^{\pm}} \|\varphi - \psi\|_{\infty} \leqslant |||\mathbf{H}_{\varphi}^{\pm}|||_{\mathfrak{J}^{\mp}(\mathbb{A})} \leqslant |||\mathbf{H}_{\varphi}^{\pm}|||_{\mathfrak{J}(\mathbb{A})} \leqslant \inf_{\psi \in \mathbb{A}^{\pm}} \|\varphi - \psi\|_{\infty}.
$$

В случае $p = 2$

$$
|||\mathbf{H}_{\varphi}^{\pm}|||_{\mathfrak{J}^{\mp}(\mathbb{A})} = |||\mathbf{H}_{\varphi}^{\pm}|||_{\mathfrak{J}(\mathbb{A})} = \inf_{\psi \in \mathbb{A}^{\pm}} \|\varphi - \psi\|_{\infty}.
$$

Доказательство. Неравенство

$$
|||\mathbf{H}_{\varphi}^{\pm}|||_{\mathfrak{J}^{\mp}(\mathbb{A})} \leqslant |||\mathbf{H}_{\varphi}^{\pm}|||_{\mathfrak{J}(\mathbb{A})} \tag{3.1}
$$

очевидно. Остальные неравенства докажем только для верхних индексов, поскольку для нижних они доказываются аналогично.

Из леммы 3.1 (а) и неравенства $\|\mathbf{H}^+_\nu\| \leqslant \|\nu\|_\infty$, справедливого в силу теоремы 1.2 для произвольного ν из L_∞, вытекает

$$|\!|\!|\mathbf{H}^+_\varphi|\!|\!|_{\mathfrak{I}(\mathbb{A})} \leqslant \inf_{\psi\in\mathbb{A}} \|\mathbf{H}^+_\varphi - \mathbf{H}^+_\psi\| = \inf_{\psi\in\mathbb{A}} \|\mathbf{H}^+_{\varphi-\psi}\| \leqslant \inf_{\psi\in\mathbb{A}} \|\varphi-\psi\|_\infty. \tag{3.2}$$

Докажем теперь неравенство

$$\inf_{\psi\in\mathbb{A}} \|\varphi-\psi\|_\infty \leqslant \gamma_p\, |\!|\!|\mathbf{H}^+_\varphi|\!|\!|_{\mathfrak{I}^-(\mathbb{A})}. \tag{3.3}$$

Для любых $F \in \mathfrak{I}^-(\mathbb{A})$ и $b \in \mathfrak{B}_\mathbb{A}$ с учетом теоремы 1.2 получаем

$$\begin{aligned} \|P_p^-\|\, \|\mathbf{H}^+_\varphi - F\| &\geqslant \|(P_p^- M_b)(\mathbf{H}^+_\varphi - F)\| = \|\mathbf{H}^+_{b\varphi} - P_p^- M_b F\| \\ &\geqslant \|\mathbf{H}^+_{b\varphi}\| - \|P_p^- M_b F\| = \inf_{\psi\in H_\infty} \|\varphi - \bar b\psi\|_\infty - \|P_p^- M_b F\| \\ &\geqslant \inf_{\psi\in\mathbb{A}} \|\varphi-\psi\|_\infty - \|P_p^- M_b F\| \end{aligned}$$

или

$$\inf_{\psi\in\mathbb{A}} \|\varphi-\psi\|_\infty \leqslant \|P_p^-\|\, \|\mathbf{H}^+_\varphi - F\| + \|P_p^- M_b F\|.$$

Отсюда с учетом того, что $\inf\{\|P_p^- M_b F\| : b \in \mathfrak{B}_\mathbb{A}\} = 0$ для любого F из $\mathfrak{I}^-(\mathbb{A})$, вытекает

$$\begin{aligned} &\inf_{\psi\in\mathbb{A}} \|\varphi-\psi\|_\infty \\ &\quad\leqslant \inf_{F\in\mathfrak{I}^-(\mathbb{A})} \Big(\inf_{b\in\mathfrak{B}_\mathbb{A}} (\|P_p^-\|\, \|\mathbf{H}^+_\varphi - F\| + \|P_p^- M_b F\|)\Big) \\ &\quad= \inf_{F\in\mathfrak{I}^-(\mathbb{A})} \|P_p^-\|\, \|\mathbf{H}^+_\varphi - F\| + \inf_{F\in\mathfrak{I}^-(\mathbb{A})} \inf_{b\in\mathfrak{B}_\mathbb{A}} \|P_p^- M_b F\| \\ &\quad= \|P_p^-\|\, |\!|\!|\mathbf{H}^+_\varphi|\!|\!|_{\mathfrak{I}^-(\mathbb{A})}. \end{aligned}$$

Итак, неравенство (3.3) доказано. Из (3.1)–(3.3) вытекает первое утверждение теоремы для $\mathbf{H}^+_\varphi$. Второе утверждение вытекает из первого и равенства $\gamma_2 = 1$. •

Замечание 3.1. В силу леммы 2.4 теорема 3.1 совпадает с теоремой 1.1 при $p = 2$ и $\mathbb{A} = H_\infty + C$.

Теорема 3.2. *Пусть* $p \in (1, \infty)$, $\varphi, \psi \in L_\infty$. *Тогда*

$$|\!|\!|M_\varphi P_p^+ + M_\psi P_p^-|\!|\!|_{\mathfrak{I}} \geqslant \frac{1}{\gamma_p} \max\{\|\varphi\|_\infty; \|\psi\|_\infty\}.$$

Доказательство. Докажем сначала, что для любого $\varphi \in L_\infty$

$$\|M_\varphi P_p^+\|_{\mathfrak{J}^\pm} \geqslant \frac{1}{\gamma_p}\|\varphi\|_\infty. \tag{3.4}$$

Для произвольных $F \in \mathfrak{J}^+$ и $b \in \mathfrak{B}_{\mathbb{A}}$ из теоремы 1.3 получаем

$$\begin{aligned}
\|P_p^+\|\,\|M_\varphi P_p^+ - F\| &\geqslant \|(P_p^+ M_{\bar{b}})(M_\varphi P_p^+ - F)\| \\
&\geqslant \|P_p^+ M_{\bar{b}} M_\varphi P_p^+\| - \|P_p^+ M_{\bar{b}} F\| = \|\mathbf{T}^+_{\bar{b}\varphi}\| - \|P_p^+ M_{\bar{b}} F\| \\
&\geqslant \|\bar{b}\varphi\|_\infty - \|P_p^+ M_{\bar{b}} F\| = \|\varphi\|_\infty - \|P_p^+ M_{\bar{b}} F\|
\end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{\|P_p^+\|}\|\varphi\|_\infty \leqslant \|M_\varphi P_p^+ - F\| + \frac{1}{\|P_p^+\|}\|(P_p^+ M_{\bar{b}})F\|.$$

Отсюда с учетом того, что $\inf\{\|(P_p^+ M_{\bar{b}})F\| : b \in \mathfrak{B}_{\mathbb{A}}\} = 0$ для любого F из $\mathfrak{J}^+(\mathbb{A})$, вытекает

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|P_p^+\|}\|\varphi\|_\infty &\leqslant \inf_{F\in\mathfrak{J}^+}\left(\inf_{b\in\mathfrak{B}}\left(\|M_\varphi P_p^+ - F\| + \frac{1}{\|P_p^+\|}\|(P_p^+ M_{\bar{b}})F\|\right)\right) \\
&= \|M_\varphi P_p^+\|_{\mathfrak{J}^+},
\end{aligned}$$

и неравенство (3.4) доказано. Из (3.4) и следствия 3.1 получаем

$$\|M_\varphi P_p^+ + M_\psi P_p^-\|_{\mathfrak{J}} \geqslant \|M_\varphi P_p^+ + M_\psi P_p^-\|_{\mathfrak{J}^+} = \|M_\varphi P_p^+\|_{\mathfrak{J}^+} \geqslant \frac{1}{\gamma_p}\|\varphi\|_\infty.$$

Аналогично можно показать, что

$$\|M_\varphi P_p^+ + M_\psi P_p^-\|_{\mathfrak{J}} \geqslant \frac{1}{\gamma_p}\|\psi\|_\infty.$$

Отсюда вытекает искомая оценка. •

Следствие 3.2. *Пусть* $p \in (1,\infty)$, $\varphi \in L_\infty$. *Тогда*

$$\gamma_p{}^2\|\varphi\|_\infty \geqslant \|\mathbf{T}^\pm_\varphi\|_{\mathfrak{J}} \geqslant \frac{1}{\gamma_p}\|\varphi\|_\infty. \tag{3.5}$$

Если $p = 2$, *то* $\|\mathbf{T}^\pm_\varphi\|_{\mathfrak{J}^\pm} = \|\varphi\|_\infty$.

Доказательство. Первое неравенство (3.5) вытекает из теоремы 1.3. Второе является следствием леммы 3.1 и неравенства (3.4):

$$\|\mathbf{T}^\pm_\varphi\|_{\mathfrak{J}} = \|M_\varphi P_p^\pm - \mathbf{H}^\pm_\varphi\|_{\mathfrak{J}} = \|M_\varphi P_p^\pm\|_{\mathfrak{J}} \geqslant \|M_\varphi P_p^\pm\|_{\mathfrak{J}^\pm} \geqslant \frac{1}{\gamma_p}\|\varphi\|_\infty. \quad \bullet$$

Замечание 3.2. Из (3.5) следует, что $\mathbf{T}_\varphi^\pm \notin \mathfrak{I}$ для любой функции $\varphi \in L_\infty$, отличной от нуля на множестве положительной меры.

Замечание 3.3. Пусть $q = p/(p-1)$. Из леммы 2.2 вытекает

$$|||\mathbf{T}_\varphi^\pm|||_{\mathfrak{L}_p} = |||(\mathbf{T}_\varphi^\pm)^*|||_{\mathfrak{I}_q}.$$

Это равенство и равенство (1.2) позволяют вывести из оценки (3.5) ее аналог для идеала $\mathfrak{L}_p$:

$$\gamma_p{}^2\|\varphi\|_\infty \geqslant |||\mathbf{T}_\varphi^\pm|||_{\mathfrak{L}_p} = |||\mathbf{T}_{\overline{\varphi}}^\mp|||_{\mathfrak{I}_q} \geqslant \frac{1}{\gamma_q}\|\overline{\varphi}\|_\infty = \frac{1}{\gamma_p}\|\varphi\|_\infty.$$

Разумеется, и все остальные утверждения этого параграфа можно сформулировать и доказать, заменив правые идеалы $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}^\pm$ на соотвествующие левые $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}^\pm$.

§4. Предсимвол алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$

1°. Построение предсимвола. Пусть везде в этом параграфе $p \in (1, \infty)$, $\gamma_p = \|P_p^\pm\|$, Ω — замкнутая подалгебра банаховой алгебры L_∞, $\Omega \dot{+} \Omega$ — прямая сумма банаховых алгебр с нормой $\|(\varphi;\psi)\| = \max\{\|\varphi\|; \|\psi\|\}$, $G(\Omega \dot{+} \Omega) = G(\Omega) \dot{+} G(\Omega)$ — группа обратимых элементов банаховой алгебры $\Omega \dot{+} \Omega$. В следующей теореме определяется предсимвол μ_Ω алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$.

Теорема 4.1. *Любой оператор F из $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ единственным образом представим в виде*

$$F = M_\varphi P_p^+ + M_\psi P_p^- + K, \tag{4.1}$$

где $\varphi, \psi \in \Omega$ и $K \in \operatorname{Com}\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$. Сопоставление $F \mapsto (\varphi, \psi)$ определяет эпиморфизм банаховых алгебр

$$\mu_\Omega : \mathfrak{A}(S_p, \Omega) \longrightarrow \Omega \dot{+} \Omega,$$

ядро которого $\ker(\mu_\Omega)$ равно $\operatorname{Com}\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ и $\|\mu_\Omega\| \leqslant (\gamma_p)^{-1}$.

Замечание 4.1. Для тёплицевых операторов, действующих в гильбертовом пространстве Харди H_2, похожие результаты содержатся в [3, 4]. Именно в [3, п. 106–128] описан эпиморфизм ν_Ω банаховой алгебры $\operatorname{alg}(\widetilde{\mathbf{T}}_\Omega)$ на алгебру коэффициентов Ω (см. замечание 2.2), причем отображение $\eta : \Omega \longrightarrow \operatorname{alg}(\widetilde{\mathbf{T}}_\Omega)$, где $\eta(\varphi) = \widetilde{\mathbf{T}}_\varphi$, является правым обратным для ν_Ω, а алгебра $\operatorname{alg}(\widetilde{\mathbf{T}}_\Omega)$ представима в виде прямой суммы $\mathbf{T}_\Omega$ и ядра этого эпиморфизма $\operatorname{alg}(\widetilde{\mathbf{T}}_\Omega) = \widetilde{\mathbf{T}}_\Omega \dot{+} \ker(\nu_\Omega)$. (Близкие результаты в более общем контексте можно найти в книге [10, п. 3.38–3.57]). В отличие от эпиморфизма μ_Ω из теоремы 4.1, для которого $\ker(\mu_\Omega) = \operatorname{Com}\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$, идеал $\ker(\nu_\Omega)$, вообще говоря, шире, чем $\operatorname{Com}\operatorname{alg}(\widetilde{\mathbf{T}}_\Omega)$

[3, с. 13–15]. Если же $\Omega = Q_{\mathbb{A}}$ — алгебра Сарасона, то справедлив прямой аналог теоремы 4.1 (см. [3, с. 27]), т. е. в этом случае $\ker(\nu_\Omega) = \mathrm{Com}\,\mathrm{alg}\,(\widetilde{\mathbf{T}}_\Omega)$ и

$$\mathrm{alg}\,(\widetilde{\mathbf{T}}_\Omega) = \widetilde{\mathbf{T}}_\Omega \dotplus \mathrm{Com}\ \mathrm{alg}\,(\widetilde{\mathbf{T}}_\Omega).$$

Сформулируем также результаты, полученные С. Пауэром для C^*-алгебры тёплицево-ганкелевых операторов, действующих в H_2 [26]. Пусть $J : L_2 \longrightarrow L_2$ — оператор, действующий по формуле $(Jf)(t) = \bar{t}f(\bar{t})$; $\widetilde{\mathbf{H}}_\varphi$ — ограничение на H_2 оператора $J\mathbf{H}^+_\varphi$; $\widetilde{\mathbf{H}}_\Omega$ — множество всех операторов вида $\widetilde{\mathbf{H}}_\varphi$, где $\varphi \in \Omega \subset L_\infty$. В [26, с. 54] фактически показано, что

$$\mathrm{alg}_*(\widetilde{\mathbf{T}}_{Q_{\mathbb{A}}} \cup \widetilde{\mathbf{H}}_{Q_{\mathbb{A}}}) = \widetilde{\mathbf{T}}_{Q_{\mathbb{A}}} \dotplus \mathrm{alg}_*(\widetilde{\mathbf{H}}_{Q_{\mathbb{A}}}).$$

Для доказательства теоремы 4.1 понадобятся следующие леммы.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathfrak{L}$ — замкнутый двусторонний идеал алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$, порожденный всеми ганкелевыми операторами $\mathbf{H}^+_\varphi$ и $\mathbf{H}^-_\psi$, где $\varphi, \psi \in \Omega$. Тогда* $\mathfrak{L} = \mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$.

Доказательство. Вложение $\mathfrak{L} \subset \mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ следует из соотношений

$$\mathbf{H}^\pm_\varphi = \pm\frac{1}{2}(M_\varphi S_p - S_p M_\varphi)P^\pm_p,$$

вытекающих из очевидного равенства

$$M_\varphi S_p - S_p M_\varphi = 2\mathbf{H}^+_\varphi - 2\mathbf{H}^-_\varphi.$$

В силу последнего равенства коммутаторы образующих алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ содержатся в $\mathfrak{L}$. Отсюда нетрудно вывести вложение $\mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p, \Omega) \subset \mathfrak{L}$. •

Лемма 4.2. $\mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p, \Omega) \subset \mathfrak{J} \cap \mathfrak{A}(S_p, \Omega)$.

Доказательство. Так как множество $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ является замкнутым двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ (следствие 2.1) и содержит все операторы вида $\mathbf{H}^+_\varphi$ и $\mathbf{H}^-_\psi$, где $\varphi, \psi \in \Omega$ (лемма 3.1(б)), то искомое утверждение вытекает из леммы 4.1. •

Из леммы 4.2 и теоремы 3.2 следует

Лемма 4.3. *Для любых $\varphi, \psi \in \Omega$*

$$|\!|\!| M_\varphi P^+_p + M_\psi P^-_p |\!|\!|_{\mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p,\Omega)} \geqslant \frac{1}{\gamma_p} \max\{\|\varphi\|_\infty; \|\psi\|_\infty\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{A}$ линеал банаховой алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$, состоящий из всех операторов вида (4.1).

Лемма 4.4. *$\mathfrak{A}$ является замкнутой подалгеброй банаховой алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$.*

Доказательство. Рассмотрим в $\mathfrak{A}$ два произвольных оператора

$$F_1 = M_a P_p^+ + M_b P_p^- + K_1, \qquad F_2 = M_c P_p^+ + M_d P_p^- + K_2,$$

где $a, b, c, d \in \Omega$ и $K_1, K_2 \in \mathrm{Com}\,(\mathfrak{A}(S_p, \Omega))$. Тогда в силу леммы 4.1

$$F_1 F_2 = M_{ac} P_p^+ + M_{bd} P_p^- + K, \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned} K &= (M_a P_p^+ + M_b P_p^-) K_2 + K_1 (M_c P_p^+ + M_d P_p^-) \\ &\quad + K_1 K_2 + M_a (\mathbf{H}_d^- - \mathbf{H}_c^+) + M_b (\mathbf{H}_c^+ - \mathbf{H}_d^-) \in \mathrm{Com}\,(\mathfrak{A}(S_p, \Omega)). \end{aligned}$$

Таким образом, $F_1 F_2 \in \mathfrak{A}$ и, следовательно, линеал $\mathfrak{A}$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$.

Покажем теперь, что алгебра $\mathfrak{A}$ замкнута в $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$. Предположим, что последовательность $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$F_n = M_{\varphi_n} P_p^+ + M_{\psi_n} P_p^- + K_n, \quad K_n \in \mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p, \Omega), \ \varphi_n, \psi_n \in \Omega,$$

сходится к $F \in \mathfrak{A}(S_p, \Omega)$. В силу леммы 4.3 для любых m и n

$$\begin{aligned} \|F_m - F_n\| &\geqslant \| M_{\varphi_m - \varphi_n} P_p^+ + M_{\psi_m - \psi_n} P_p^- \|_{\mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p, \Omega)} \\ &\geqslant \frac{1}{\gamma_p} \max\{\|\varphi_m - \varphi_n\|_\infty; \|\psi_m - \psi_n\|_\infty\}. \end{aligned}$$

Из этих оценок вытекает фундаментальность последовательностей $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в L_∞. Пусть $K = F - (M_\varphi P_p^+ + M_\psi P_p^-)$, где φ и ψ — пределы этих последовательностей. Тогда

$$K = \lim_{n \to 0} (F_n - (M_{\varphi_n} P_p^+ + M_{\psi_n} P_p^-)) = \lim_{n \to 0} K_n \in \mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$$

и, следовательно, $F = M_\varphi P_p^+ + M_\psi P_p^- + K \in \mathfrak{A}$, что означает замкнутость алгебры $\mathfrak{A}$. •

Доказательство теоремы 4.1 Так как образующие алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ лежат в $\mathfrak{A}$, то в силу леммы 4.4 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ и, следовательно, для любого оператора F из $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ существует представление (4.1). Единственность такого представления следует из леммы 4.3. Тот факт, что μ_Ω — эпиморфизм с ядром $\mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$, вытекает из первого утверждения теоремы и равенства (4.2). Для доказательства оценки $\|\mu_\Omega\| \leqslant (\gamma_p)^{-1}$ теперь достаточно воспользоваться леммой 4.3. •

Очевидно, что если $\Omega \subset \Gamma$, где Γ — замкнутая подалгебра банаховой алгебры L_∞, и $F \in \mathfrak{A}(S_p, \Omega)$, то $F \in \mathfrak{A}(S_p, \Gamma)$ и $\mu_\Gamma(F) = \mu_\Omega(F)$. Если $\Gamma = L_\infty$, то вместо μ_Γ будем писать μ.

2°. Необходимые условия фредгольмовости операторов из $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$. Обозначим через π фактор-эпиморфизм банаховой алгебры $\operatorname{End} L_p$ на банахову алгебру $\operatorname{End} L_p/\operatorname{Comp} L_p$. Известно, что фредгольмовость оператора $F \in \operatorname{End} L_p$ равносильна обратимости его образа $\pi(F)$ в $\operatorname{End} L_p/\operatorname{Comp} L_p$ и тем самым существованию такого оператора $R \in \operatorname{End} L_p$, называемого регуляризатором оператора F, что

$$RF - I_p \in \operatorname{Comp} L_p, \qquad FR - I_p \in \operatorname{Comp} L_p$$

(см., например, [6, гл. 4]). Напомним также, что подалгебра $\mathfrak{A}$ алгебры $\mathfrak{M}$ называется наполненной в $\mathfrak{M}$, если из обратимости ее элемента в $\mathfrak{M}$ вытекает его обратимость в $\mathfrak{A}$ [7, с. 55]. Понятие наполненности используется при исследовании вопросов обратимости в операторных и функциональных алгебрах (см., например, [7, 8, 27]).

Теорема 4.2. *Пусть $F \in \mathfrak{A}(S_p, L_\infty)$. Если оператор F фредгольмов, то $\mu(F) \in G(L_\infty \dotplus L_\infty)$. Если, кроме того, $F \in \mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ и алгебра Ω наполнена в L_∞, то $\mu_\Omega(F) \in G(\Omega \dotplus \Omega)$.*

Доказательство. Поскольку из наполненности Ω в L_∞ вытекает наполненность $\Omega \dotplus \Omega$ в $L_\infty \dotplus L_\infty$, второе утверждение теоремы непосредственно следует из первого.

Предположим, что первое утверждение теоремы неверно, т. е. существует фредгольмов оператор F, предсимвол которого $\mu(F) = (\varphi; \psi)$ необратим в $L_\infty \dotplus L_\infty$. Тогда справедливо по крайней мере одно из равенств

$$\operatorname{ess\,inf} |\varphi| = 0, \qquad \operatorname{ess\,inf} |\psi| = 0.$$

Пусть для определенности выполняется первое из них. Тогда в $\mathbb{T}$ существует подмножество положительной меры, характеристическая функция χ которого обладает свойством

$$\|\chi\varphi\|_\infty < \frac{1}{(\gamma_p)^3 \|R\|}, \tag{4.3}$$

где R — регуляризатор оператора F. В силу определения регуляризатора

$$FR = I_p + K_1,$$

где $K_1 \in \operatorname{Comp} L_p$. Воспользуемся теоремой 4.1 и заменим в последнем равенстве оператор F его представлением $M_\varphi P_p^+ + M_\psi P_p^- + K_2$, где $\varphi, \psi \in L_\infty$ и $K_2 \in \operatorname{Com} \mathfrak{A}(S_p, L_\infty)$. Умножим обе части полученного равенства слева на $P_p^+ M_\chi$:

$$P_p^+ M_\chi (M_\varphi P_p^+ + M_\psi P_p^- + K_2) R = P_p^+ M_\chi + P_p^+ M_\chi K_1.$$

Это равенство преобразуется к виду

$$\mathbf{T}^{+}_{\chi\varphi}R = M_\chi P^{+}_p + K, \qquad (4.4)$$
$$K = P^{+}_p M_\chi K_1 - P^{+}_p M_\chi K_2 R - \mathbf{H}^{-}_{\chi\psi}R + (P^{+}_p M_\chi - M_\chi P^{+}_p).$$

Так как операторы $P^{+}_p M_\chi K_1$, $P^{+}_p M_\chi K_2$, $\mathbf{H}^{-}_{\chi\psi}$ и $P^{+}_p M_\chi - M_\chi P^{+}_p$ принадлежат $\operatorname{Com}\mathfrak{A}(S_p, L_\infty) \subset \mathfrak{J}$, а $\mathfrak{J}$ — правый идеал алгебры $\operatorname{End} L_p$, то $K \in \mathfrak{J}$. Поэтому с учетом теоремы 3.2 получаем

$$\|M_\chi P^{+}_p + K\| \geqslant |\!|\!| M_\chi P^{+}_p |\!|\!|_{\mathfrak{J}} \geqslant \frac{1}{\gamma_p}\|\chi\|_\infty = \frac{1}{\gamma_p}.$$

С другой стороны, в силу (4.3), (4.4) и теоремы 1.3

$$\|M_\chi P^{+}_p + K\| = \|\mathbf{T}^{+}_{\chi\varphi}R\| \leqslant \|\mathbf{T}^{+}_{\chi\varphi}\|\|R\| \leqslant (\gamma_p)^2\|\chi\varphi\|_\infty\|R\| < \frac{1}{\gamma_p}.$$

Таким образом, предположение о необратимости $(\varphi;\psi)$ в $L_\infty \dotplus L_\infty$ привело к противоречию. Следовательно, $(\varphi;\psi) \in G(L_\infty \dotplus L_\infty)$. •

Замечание 4.2. Доказательство теоремы 4.2, справедливое для любого $p \in (1,\infty)$, опирается на свойства идеалов $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{G}$. В частном случае $p = 2$ теорему можно легко доказать, используя свойства C^*-алгебр. Действительно, алгебра $\mathfrak{A}(S_2, L_\infty)/\operatorname{Comp} L_2$ является C^*-подалгеброй C^*-алгебры $\operatorname{End} L_2/\operatorname{Comp} L_2$, и поэтому наполнена в ней. Следовательно, из фредгольмовости оператора F вытекает обратимость $\pi(F)$ в $\mathfrak{A}(S_2, L_\infty)/\operatorname{Comp} L_2$, откуда в силу теоремы 4.1 и соотношения $\operatorname{Comp} L_2 \subset \operatorname{Com}\mathfrak{A}(S_2, L_\infty)$ получаем обратимость предсимвола $\mu(F)$ в алгебре $L_\infty \dotplus L_\infty$.

§5. Коммутаторный идеал алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$

В этом параграфе с помощью идеалов Никольского получено некоторое описание ядра предсимвола μ_Ω — коммутаторного идеала алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$.

Теорема 5.1. *Пусть $p \in (1,\infty)$, Ω — замкнутая подалгебра банаховой алгебры L_∞. Для любой алгебры Дугласа $\mathbb{A}$ следующие три условия равносильны:*

(а) $\Omega \subset Q_{\mathbb{A}}$,

(б) $\mathfrak{J}(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{A}(S_p, \Omega) = \operatorname{Com}\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$,

(в) $\mathfrak{Q}(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{A}(S_p, \Omega) = \operatorname{Com}\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$.

Доказательство. Предположим, что выполняется (а). В силу теоремы 2.1 множество $\mathfrak{J}(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ является замкнутым двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$. Кроме того, по лемме 3.1 (б) этот идеал содержит все операторы вида $\mathbf{H}^{+}_\varphi$ и $\mathbf{H}^{-}_\psi$, где $\varphi, \psi \in \Omega$. Но в силу леммы 4.1 наименьшим замкнутым двусторонним идеалом алгебры $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$, содержащим все такие операторы, является

$\mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p,\Omega)$. Следовательно, $\mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p,\Omega) \subset \mathfrak{I}(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{A}(S_p,\Omega)$. Для доказательства обратного вложения возьмем произвольный оператор F из $\mathfrak{I}(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{A}(S_p,\Omega)$. По теореме 4.1 $F = M_\varphi P_p^+ + M_\psi P_p^- + K$, где $K \in \mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p,\Omega)$, $\varphi,\psi \in \Omega$. В силу леммы 4.2

$$M_\varphi P_p^+ + M_\psi P_p^- = F - K \in \mathfrak{I} \cap \mathfrak{A}(S_p,\Omega),$$

откуда с учетом леммы 4.3 вытекает, что $\varphi = \psi = 0$ почти всюду на $\mathbb{T}$. Значит, $F = K \in \mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p,\Omega)$ и $\mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p,\Omega) \supset \mathfrak{I}(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{A}(S_p,\Omega)$. Таким образом, из (а) следует (б).

Пусть теперь выполняется (б). Рассмотрим $\varphi \in \Omega$. Из (б) и леммы 4.1 следует, что $\mathbf{H}_\varphi^\pm \in \mathfrak{I}(\mathbb{A}) = \mathfrak{I}_p^-(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{I}_p^+(\mathbb{A})$. В силу теоремы 3.1 отсюда получаем $\varphi \in \mathbb{A}^+ \cap \mathbb{A}^- = Q_\mathbb{A}$. Итак, из (б) вытекает (а).

Эквивалентность условий (а) и (б) доказана. Эквивалентность условий (а) и (в) доказывается аналогично. •

Следствие 5.1. *Пусть* $p \in (1,\infty)$, Ω — *замкнутая подалгебра банаховой алгебры* L_∞, $\mathbb{A}$ — *алгебра Дугласа. Если* $\Omega \subset Q_\mathbb{A}$, *то*

$$\mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p,\Omega) = \mathfrak{A}(S_p,\Omega) \cap \mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p,Q_\mathbb{A}).$$

Доказательство. По теореме 5.1 из условия $\Omega \subset Q_\mathbb{A}$ вытекает

$$\mathfrak{I}(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{A}(S_p,Q_\mathbb{A}) = \mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p,Q_\mathbb{A}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p,\Omega) &= \mathfrak{I}(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{A}(S_p,\Omega) = \mathfrak{I}(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{A}(S_p,Q_\mathbb{A}) \cap \mathfrak{A}(S_p,\Omega)) \\ &= (\mathfrak{I}(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{A}(S_p,Q_\mathbb{A})) \cap \mathfrak{A}(S_p,\Omega) = \mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p,Q_\mathbb{A}) \cap \mathfrak{A}(S_p,\Omega). \quad \bullet\end{aligned}$$

Для произвольной подалгебры Ω алгебры L_∞ через $\mathbb{D}(\Omega)$ обозначим пересечение всех таких алгебр Дугласа $\mathbb{A}$, для которых $\Omega \subset Q_\mathbb{A}$. Легко видеть, что $\mathbb{D}(\Omega)$ — алгебра Дугласа и $\mathbb{D}(Q_\mathbb{A}) = \mathbb{A}$ для любой алгебры Дугласа $\mathbb{A}$. Формулировки теоремы 5.1 и следствия 5.1 можно усилить, заменив алгебру $\mathbb{A}$ алгеброй $\mathbb{D}(\Omega)$. Отметим также, что, используя определения идеалов $\mathfrak{I}(\mathbb{A})$ и $\mathfrak{Q}(\mathbb{A})$, можно найти с помощью теоремы 5.1 необходимые и достаточные условия принадлежности оператора из $\mathfrak{A}(S_p,\Omega)$ идеалу $\mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p,\Omega)$. (Для случая $\Omega = Q_\mathbb{A}$ аналогичное описание $\mathrm{Com}\,\mathrm{alg}\,(\widetilde{\mathbf{T}}_\Omega)$ при помощи идеала γ^0 содержится в [3, с. 28] и [4].) В результате получаем следующую теорему.

Теорема 5.2. *Пусть* $p \in (1, \infty)$, Ω *— замкнутая подалгебра банаховой алгебры* L_∞. *Если* $F \in \mathfrak{A}(S_p, \Omega)$, *то равносильны следующие три условия:*

а) $F \in \mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$;

б) $\inf\limits_{b \in \mathfrak{B}_{\mathbb{D}(\Omega)}} \|(P_p^- M_b)F\| = 0, \quad \inf\limits_{b \in \mathfrak{B}_{\mathbb{D}(\Omega)}} \|(P_p^+ M_{\bar{b}})F\| = 0;$

в) $\inf\limits_{b \in \mathfrak{B}_{\mathbb{D}(\Omega)}} \|F(M_b P_p^+)\| = 0, \quad \inf\limits_{b \in \mathfrak{B}_{\mathbb{D}(\Omega)}} \|F(M_{\bar{b}} P_p^-)\| = 0.$

Замечание 5.1. Следствие 5.1 показывает, что п. (б) и (в) теоремы 5.2 фактически описывают принадлежность оператора F из $\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$ идеалу $\mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p, Q_{\mathbb{D}(\Omega)})$. Поэтому описание $\mathrm{Com}\,\mathfrak{A}(S_p, \Omega)$, которое дано в этой теореме, оказывается настолько „грубым“, насколько Ω „меньше“ $Q_{\mathbb{D}(\Omega)}$.

Замечание 5.2. С учетом замечания 2.3 в п. (б) и (в) теоремы 5.2 множество $\mathfrak{B}_{\mathbb{D}(\Omega)}$ можно заменить на более узкое множество $\mathfrak{B}_{\mathbb{D}(\Omega)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{int}}$.

Авторы выражают глубокую признательность профессору И. Б. Симоненко за полезное обсуждение результатов работы, позволившее, в частности, уточнить теоремы из §3.

Список литературы

[1] Михлин С. Г., *Сингулярные интегральные уравнения,* Успехи мат. наук 3 (1948), № 3, 29–112.

[2] Никольский Н. К., *Операторы Ганкеля и Тёплица. Спектральная теория,* Препринт ЛОМИ № Р-1-82, ЛОМИ, Л., 1982.

[3] Никольский Н. К., *Операторы Ганкеля и Тёплица. Алгебраический подход,* Препринт ЛОМИ № Р-2-82, ЛОМИ, Л., 1982.

[4] Никольский Н. К., *Лекции об операторе сдвига,* Наука, М., 1980; Пер. на англ. яз., Grundlehren Math. Wiss., Bd. 273, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1986.

[5] Пеллер В. В., Хрущев С. В., *Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы,* Успехи мат. наук 37 (1982), № 1, 53–124.

[6] Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я., *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов,* Штиинца, Кишинев, 1973.

[7] Крупник Н. Я., *Банаховы алгебры с символом и сингулярные интегральные операторы,* Штиинца, Кишинев, 1984.

[8] Симоненко И. Б., Чинь Нгок Минь, *Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Нетеровость,* Рост. ун-т, Ростов н/Д, 1986.

[9] Пламеневский Б. А., *Алгебры псевдодифференциальных операторов,* Наука, М., 1986.

[10] Böttcher A., Silbermann B., *Analysis of Toeplitz operators,* Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[11] Roch S., Silbermann B., *Algebras of convolution operators and their image in the Calkin algebra,* Rep. MATH no. 90-05, Akad. Wiss. DDR, Karl-Weierstrass-Inst. Math., Berlin, 1990.

[12] Böttcher A., Grudskiĭ S. M., *Toeplitz operators with discontinuous symbols: phenomena beyond piecewise continuity,* Singular Integral Operators and Related Topics (Tel Aviv, 1995), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 90, Birkhäuser, Basel, 1996, pp. 55–118.

[13] Георгиев К. А., Деундяк В. М., *О некоторых свойствах алгебр сингулярных интегральных операторов в весовых пространствах,* Модели и дискретные структуры, Элиста, 1993, сс.70–77.

[14] Георгиев К. А., Деундяк В. М., *Структура алгебр сингулярных интегральных операторов в весовых L_p-пространствах на окружности,* Изв. вузов. Мат. **1993**, № 2, 84–87.

[15] Георгиев К. А., Деундяк В. М., *Критерий принадлежности взвешенного сингулярного оператора Коши алгебре сингулярных интегральных операторов с коэффициентами из алгебры Сарасона,* Функц. анал. и его прил. **28** (1994), № 4, 80–82.

[16] Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г., *Аналитические свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура-Такаги,* Мат. сб. **86(128)** (1971), № 1, 34–75.

[17] Георгиев К. А., Деундяк В. М., *Предсимвол алгебры сингулярных интегральных операторов,* Международная геометрическая школа-семинар памяти Н. В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 27 сент.–4 окт. 1996 г.): Тез. докл., Рост. ун-т, Ростов н/Д, 1996, сс.104–105.

[18] Гофман К., *Банаховы пространства аналитических функций,* ИЛ, М., 1963.

[19] Douglas R. G., *On the spectrum of Toeplitz and Wiener-Hopf operators,* Abstract Spaces and Approximation (Proc. Conf., Oberwolfach, 1968), Birkhäuser, Basel, 1969, pp. 53–66.

[20] Sarason D. E., *Algebras between L^∞ and H^∞,* Spaces of Analytic Functions (Sem. Functional Anal. and Function Theory, Kristiansand, 1975), Lecture Notes in Math., vol. 512, Springer, Berlin, 1976, pp. 117–130.

[21] Гарнетт Дж., *Ограниченные аналитические функции,* Мир, М., 1984.

[22] Chang S.-Y., *A characterization of Douglas subalgebras,* Acta Math. **137** (1976), 81–89.

[23] Marshall D. E., *Subalgebras of L^∞ containing H^∞*, Acta Math. **137** (1976), 91–98.

[24] Nehari Z., *On bounded bilinear forms,* Ann. of Math. (2) **65** (1957), no. 1, 153–162.

[25] Brown A., Halmos P., *Algebraic properties of Toeplitz operators,* J. Reine Angew. Math. **213** (1963), no. 1/2, 89–102.

[26] Power S. C., *C^*-algebras generated by Hankel operators and Toeplitz operators,* J. Funct. Anal. **31** (1979), 52–68.

[27] Толоконников В. А., *Карлесоновы произведения Бляшке и алгебры Дугласа,* Алгебра и анализ **3** (1991), № 4, 186–197.

Донской государственный
технический университет
кафедра „Программное обеспечение
вычислительной техники и
автоматизированных систем“
344010, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

Поступило 3 декабря 1997 г.