МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ КРИПТОГРАФИИ
2023 Т. 14 № 1 С. 45–63

УДК 519.212.2+519.115 DOI https://doi.org/10.4213/mvk430

Свойства структуры случайных разбиений конечного множества в параметрической модели

Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев

Академия криптографии Российской Федерации, *Москва*

Получено 12.V.2022

Аннотация. Изучается структура случайных разбиений конечного n-множества на блоки в неравновероятной модели, когда на множестве всех разбиений задается некоторая параметрическая вероятностная мера. Проводится анализ асимптотических (при $n \to \infty$) свойств различных характеристик структуры: наборов чисел блоков заданных размеров, чисел малых и больших блоков, числа блоков средней зоны структуры, экстремальных и связанных с ними характеристик структуры.

Ключевые слова: разбиения конечных множеств, структура разбиения, параметрическая модель, структурные характеристики, предельные теоремы

Properties of the structure of random partitions of a finite set in parametric model

G. I. Ivchenko, Yu. I. Medvedev

Academy of Cryptography of the Russian Federation, *Moscow*

Abstract. Some structural properties of random partitions of a finite n-element set are investigated when a parametric probabilistic measure on the set of all partitions is defined. Asymptotic behavior of several structural characteristics (as $n \to \infty$) is studied: sets of numbers of blocks with given sizes, numbers of small and large blocks, numbers of blocks with medium sizes, extremal and related characteristics of structure.

Keywords: partitions of finite sets, structure of partition, parametric model, structural characteristics, limit theorems

Citation: Matematicheskie Voprosy Kriptografii, 2023, v. 14, № 1, pp. 45–63 (Russian)
© Академия криптографии Российской Федерации, 2023 г.

1. Введение

Настоящая работа является продолжением нашей статьи [3], в которой рассматривалась структура случайных разбиений n-множества $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ в следующей параметрической модели. На множестве $\mathbf{K}_n = \{K_n\}$ всех разбиений n-множества задается вероятностная мера $\mathbf{P}_\theta$, согласно которой любому разбиению с k блоками приписывается вероятность, пропорциональная θ^k, где $\theta > 0$ — параметр меры. Это один из вариантов неравномерной меры, часто встречающейся в литературе под названием меры Эвенса и впервые использованной при анализе случайных подстановок в [9] (случай $\theta = 1$ соответствует равномерному распределению).

Далее будем использовать традиционное обозначение для структуры разбиений $\kappa_n = (\kappa_n(1), \kappa_n(2), \ldots, \kappa_n(n))$, где $\kappa_n(j)$ — число блоков размера j в случайном разбиении n-множества. Тогда совместное распределение вероятностей величин $\kappa_n(1), \ldots, \kappa_n(n)$ может быть представлено как условное распределение [2]:

$$\mathcal{L}\left(\kappa_n(j),\ j = 1, \ldots, n\right) = \mathcal{L}\left(Z_1, \ldots, Z_n \,|T_n = n\right),$$
$$T_n = \sum_{j=1}^{n} j Z_j, \tag{1.1}$$

где случайные величины $Z_1, \ldots, Z_n$ независимы в совокупности и имеют пуассоновские распределения с параметрами соответственно $\lambda_j = \frac{\theta x^j}{j!}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Здесь $x > 0$ является свободным параметром, выбором которого можно распорядиться в зависимости от цели исследования.

При этом производящая функция совместного распределения любого набора случайных величин $\kappa_n(i_l)$, $l = 1, 2, \ldots, k$, $k \geqslant 1$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, может быть представлена в виде

$$\mathbf{E}_\theta \prod_{l=1}^{k} t_{i_l}^{\kappa_n(i_l)} = n!\,[z^n] \exp\left\{\theta\left(\sum_{l=1}^{k}(t_{i_l} - 1)\frac{z^{i_l}}{i_l!} + e^z - 1\right)\right\} \Big/ B_n(\theta), \tag{1.2}$$

где $B_n(\theta) = n![z^n]\exp\{\theta(e^z - 1)\}$ есть полином Белла [8] (здесь и далее используется обозначение $[z^n]f(z) = \mathrm{coef}_{z^n} f(z)$).

Замечание 1. Пусть задано некоторое подмножество $A \subset X_n$. Введем такую характеристику структуры разбиения множества X_n, как $\xi_A(n) = \sum_{j \in A} \kappa_n(j)$ — число ее блоков, размеры которых являются элементами A (такие блоки называются *A-блоками*).

Для производящей функции этой характеристики и ее факториальных моментов имеют место представления

$$\mathbf{E}_\theta t^{\xi_A(n)} = n!\,[z^n]\exp\left\{\theta\left(e^z - 1 + (t-1)E_A(z)\right)\right\}\big/B_n(\theta),$$
$$\mathbf{E}_\theta\left(\xi_A(n)\right)_k = n!\,[z^n]\left(\theta E_A(z)\right)^k\exp\left\{\theta\left(e^z-1\right)\right\}\big/B_n(\theta), \quad k=1,2,\ldots,$$

где

$$E_A(z) = \sum_{j\in A}\frac{z^j}{j!}.$$

В [3] исследовано распределение общего числа блоков случайного разбиения K_n, $\xi(n) = \sum\limits_{j=1}^{n}\kappa_n(j)$, и, в частности, показано, что при произвольном фиксированном значении параметра $\theta > 0$

$$\mathbf{E}_\theta\xi(n) = \frac{n}{\ln n}\left(1 + \frac{\ln\ln n}{\ln n} + \frac{\ln\theta}{\ln n} + O\left(\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)^2\right)\right),$$
$$\mathbf{D}_\theta\xi(n) = \frac{n}{(\ln n)^2}\left(1 + 2\,\frac{\ln\ln n}{\ln n} + 2\,\frac{\ln\theta}{\ln n} + O\left(\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)^2\right)\right),$$

а распределение $\xi(n)$ является асимптотически нормальным с параметрами $\left(\frac{n}{\ln n},\ \frac{n}{(\ln n)^2}\right)$ $(n\to\infty)$, как и в равновероятной модели (при $\theta = 1$).

В настоящей работе мы продолжаем исследование особенностей асимптотического строения структуры $\kappa_n = (\kappa_n(1), \kappa_n(2), \ldots, \kappa_n(n))$ случайного разбиения в рассматриваемой параметрической модели. В разделе 2 проведен анализ крайних зон («хвостов») структуры,

$$\kappa^{(1)} = \left\{\kappa_n(j)\right\}_{j\leqslant j_1}, \quad \kappa^{(2)} = \left\{\kappa_n(j)\right\}_{j\geqslant j_2}, \tag{1.3}$$

и на основе этих результатов в разделе 3 исследованы ее экстремальные порядковые статистики. Раздел 4 посвящен исследованию распределения характеристики $\xi_{j_1,j_2}(n) = \sum\limits_{j_1\leqslant j\leqslant j_2}\kappa_n(j)$ — числа блоков в средней зоне структуры при соответствующем задании границ j_1 и j_2. Результаты работы являются новыми для случайных разбиений, в том числе (в некоторых аспектах) и для равновероятной модели.

В случае равновероятных разбиений (когда $\theta = 1$) аналогичные вопросы уже были предметом обсуждения. В. Н. Сачков ([5, 6]) исследовал распределение многомерной случайной характеристики $\kappa^{(1)} = \left\{\kappa_n(j)\right\}_{j\leqslant j_1}$. Он показал, что для любого фиксированного j_1 эта

характеристика асимптотически распределена так же, как и совокупность независимых пуассоновских случайных величин $Z^{(1)} = \{Z_j\}_{j \leqslant j_1}$ с параметрами соответственно $\lambda_j = r^j/j!$, $j = 1, 2, \ldots$ Здесь $r = r_n > 0$ — единственное решение уравнения $re^r = n$, для которого справедливо асимптотическое представление ([1, с. 37])

$$r = \ln n - \ln\ln n + O(\ln\ln n/\ln n) \quad (n \to \infty).$$

Отсюда также следует, что для любого $m < \infty$ случайное разбиение с вероятностью, близкой к единице при больших значениях n, имеет блоки всех размеров вплоть до m. В частности,

$$\mathbf{E}\kappa_n(j) = \frac{r^j}{j!}(1 + o(1)) \to \infty, \quad j = 1, 2, \ldots$$

В последующем этот результат модифицировался и обобщался в различных направлениях. Так, DeLaurentis и Pittel [10] рассматривали случайный процесс $Y_n(t)$, $t \in [0, 1]$, где $Y_n(t)$ есть число блоков разбиения, величины которых не превосходят некоторой функции $m_n(t)$, определяемой следующим образом:

$$m_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 0, \\ r + y(t)\sqrt{r}, & \text{если } 0 < t < 1, \\ n, & \text{если } t = 1, \end{cases}$$

а $y(t)$ есть квантиль уровня t стандартного нормального распределения. Показано, что нормированный процесс

$$Z_n(t) = \left(Y_n(t) - \sum\nolimits_{j=0}^{m_n(t)} \lambda_j\right) \Big/ \sqrt{\sum\nolimits_{j=0}^{n} \lambda_j}, \quad t \in [0, 1],$$

слабо сходится (в смысле сходимости конечномерных распределений) к гауссовскому процессу с нулевым средним и ковариационной функцией $F(s, t) = \min\{s, t\} - st$.

Pittel [13] исследовал распределение величин $\kappa_n(j)$ также и в случае, когда размер блока j может неограниченно возрастать с возрастанием n. Именно, пусть, по аналогии с (1.3),

$$Z^{(1)} = \{Z_j\}_{j \leqslant j_1}, \quad Z^{(2)} = \{Z_j\}_{j \geqslant j_2} \tag{1.4}$$

и пусть выполнены условия

$$j_1 \leqslant r \leqslant j_2, \quad j_i/r \to 1, \quad i = 1, 2, \quad n \to \infty. \tag{1.5}$$

Доказано, что при $n \to \infty$

$$d_{TV}\left(\kappa^{(i)},\ Z^{(i)}\right) \to 0, \quad i = 1, 2,$$

тогда и только тогда, когда выполняется соответствующее условие

$$\frac{r - j_1}{\sqrt{\ln n}} \to \infty, \quad \frac{j_2 - r}{\sqrt{\ln n}} \to \infty. \tag{1.6}$$

Здесь и далее $d_{TV}(u, v)$ — расстояние по вариации между распределениями случайных величин u и v.

Таким образом, в равновероятной модели при выполнении условий (1.5) и (1.6) «хвосты» (1.3) структуры разбиения асимптотически распределены так же, как и соответствующие совокупности (1.4) независимых пуассоновских случайных величин с параметрами соответственно $\lambda_j = r^j/j!$, $j = 1, 2, \ldots$

Отметим следующий факт. Пусть X обозначает пуассоновскую случайную величину с параметром r и

$$T_{n1} = \sum_{j \leqslant j_1} jZ_j, \quad T_{n2} = \sum_{j \geqslant j_2} jZ_j, \tag{1.7}$$

тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(T_{n1} + T_{n2}\right) &= \sum_{j \leqslant j_1} jr^j/j! + \sum_{j \geqslant j_2} jr^j/j! \\ &= re^r \left(e^{-r} \sum_{j \leqslant j_1 - 1} r^j/j! + e^{-r} \sum_{j \geqslant j_2} r^j/j!\right) \\ &= n\left(\mathbf{P}\left\{X \leqslant j_1 - 1\right\} + \mathbf{P}\left\{X \geqslant j_2 - 1\right\}\right) \end{aligned} \tag{1.8}$$

(здесь учтено, что $re^r = n$).

Применение центральной предельной теоремы к X дает в условиях (1.6) соотношение $\mathbf{E}(T_{n1} + T_{n2}) = o(n)$. Это означает, что асимптотическое значение суммарного числа элементов множества $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, содержащихся в рассматриваемых «хвостах» (1.3) структуры разбиения, есть величина $o(n)$. Тем самым подавляющее число элементов множества X_n содержится в блоках, размеры которых лежат в небольшой окрестности величины $r \sim \ln n$, именно в окрестности вида

$$j_1 = r - \alpha\sqrt{r}, \quad j_2 = r + \beta\sqrt{r}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Эти, в частности, особенности структуры случайных разбиений для равновероятной модели обобщаются далее на случай параметрической $\mathbf{P}_\theta$-меры.

2. Крайние зоны структуры в параметрической модели

Пусть $u = u_n(\theta)$ обозначает решение уравнения $\theta z e^z = n$. Это уравнение имеет единственный положительный корень, для которого при $n \to \infty$ и фиксированном значении параметра $\theta > 0$ справедливо асимптотическое представление [4]

$$u = \ln n - \ln\ln n - \ln\theta + \frac{\ln\ln n}{\ln n} + O\left(\frac{1}{\ln n}\right). \tag{2.1}$$

Обобщение приведенного выше результата В. Н. Сачкова на случай неравновероятных $\mathbf{P}_\theta$-разбиений (при фиксированном значении параметра $\theta > 0$) формулируется следующим образом.

Теорема 1. *При выполнении условий* (1.5) *и* (1.6), *в которых* r *заменено на* $u = u_n(\theta)$, *любые конечные наборы элементов совокупностей* $\kappa^{(1)} = \{\kappa_n(j)\}_{j\leqslant j_1}$, $\kappa^{(2)} = \{\kappa_n(j)\}_{j\geqslant j_2}$ *асимптотически распределены так же, как и соответствующие наборы элементов совокупностей* $Z^{(1)} = \{Z_j\}_{j\leqslant j_1}$, $Z^{(2)} = \{Z_j\}_{j\geqslant j_2}$, *где случайные величины* $\{Z_j\}$ *независимы и имеют пуассоновские распределения с параметрами соответственно* $\lambda_j = \lambda_j(\theta, n) = \theta u^j/j!$, $j = 1, 2, \ldots$

Доказательство этой теоремы может быть получено непосредственным анализом (с использованием метода перевала) производящей функции (1.2). Именно, можно показать, что в условиях теоремы выполняется соотношение

$$\mathbf{E}_\theta \prod_{l=1}^{k} t_{i_l}^{\kappa_n(i_l)} = \exp\left\{\theta \sum_{l=1}^{k} (t_{i_l} - 1)\frac{u^{i_l}}{i_l}\right\}(1 + o(1)), \tag{2.2}$$

которое можно также трактовать как утверждение об асимптотической независимости и асимптотической нормальности с параметрами соответственно $(\lambda_j,\ \lambda_j)$, $j = 1, 2, \ldots k$, рассматриваемых характеристик (как это и сформулировано в [6]).

Мы не будем доказывать теорему 1, а получим ее как следствие формулируемой ниже теоремы о сходимости по вариации распределений совокупностей $\kappa^{(i)}$ и $Z^{(i)}$, $i = 1, 2$.

Теорема 2. *Пусть $n \to \infty$, уровни j_1, j_2 в (1.3) удовлетворяют условиям*

$$j_1 \leqslant u \leqslant j_2, \quad j_i/u \to 1, \quad i = 1, 2, \tag{2.3}$$

где $u = u_n(\theta)$ есть решение уравнения $\theta z e^z = n$. Сходимость расстояний по вариации

$$d_{TV}\left(\kappa^{(i)},\ Z^{(i)}\right) \to 0, \quad i = 1, 2 \quad (n \to \infty),$$

где случайные величины $\{Z^{(i)}\}$ те же, что в теореме 1, имеет место тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\frac{u - j_1}{\sqrt{u}} \to \infty, \quad \frac{j_2 - u}{\sqrt{u}} \to \infty. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть, дополнительно к обозначениям (1.1) и (1.7), $T^c_{ni} = T_n - T_{ni}$. Тогда для расстояния по вариации имеет место представление [7]

$$d_{TV}\left(\kappa^{(i)},\ Z^{(i)}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{P}\left\{T_{ni} > n\right\} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}\{T_{ni} = j\}\left|\frac{\mathbf{P}\left\{T^c_{nj} = n - j\right\}}{\mathbf{P}\left\{T_n = n\right\}} - 1\right|. \tag{2.5}$$

Далее рассматриваем лишь случай $i = 1$, для случая $i = 2$ рассуждения аналогичны.

Чтобы оценить правую часть (2.5) и показать, что в условиях теоремы это расстояние есть величина бесконечно малая, надо находить асимптотики присутствующих в формуле локальных и интегральных вероятностей для линейных комбинаций независимых пуассоновских случайных величин. При этом свободный параметр x в (1.1) мы выберем так, чтобы выполнялось условие

$$n = \mathbf{E}_\theta T_n = \theta \sum_j \frac{j x^j}{j!} = \theta x e^x \Rightarrow x = u = u_n(\theta). \tag{2.6}$$

При таком выборе параметра x в (1.1) мы имеем дело с указанными в теореме величинами $\{Z_j\}$.

Поскольку параметры пуассоновских величин $\{Z_j\}$, равные $\theta u^j/j!$, $j = 1, 2, \ldots$, неограниченно возрастают с возрастанием n (см. (2.1)), то мы имеем дело с асимптотически нормальными случайными величинами, и таковыми же являются их линейные комбинации

$$T_n = \sum_j j Z_j, \quad T_{n1} = \sum_{j \leqslant j_1} j Z_j, \quad T^c_{n1} = T_n - T_{n1} = \sum_{j > j_1} j Z_j.$$

Пусть далее X обозначает пуассоновскую случайную величину с параметром u. Первые и вторые моменты указанных комбинаций вычисляются непосредственно (см. (1.8) и (2.6)):

$$\mu = \mathbf{E}_\theta T_n = n, \quad \mu_1 = \mathbf{E}_\theta T_{n1} = n\mathbf{P}\left\{X < j_1\right\}, \quad \mu_c = \mathbf{E}_\theta T_{n1}^c = n\mathbf{P}\{X \geqslant j_1\},$$

$$\sigma^2 = \mathbf{D}_\theta T_n = \theta \sum_j \frac{j^2 u^j}{j!} = \theta u^2 e^u + \theta u e^u = n(1+u),$$

$$\sigma_1^2 = \mathbf{D}_\theta T_{n1} = \theta \sum_{j \leqslant j_1} \frac{j^2 u^j}{j!} = \theta u^2 e^u \mathbf{P}\{X \leqslant j_1 - 2\} + \theta u e^u \mathbf{P}\{X \leqslant j_1 - 1\}$$
$$= nu\mathbf{P}\{X \leqslant j_1\}(1 + o(1)),$$
$$\sigma_c^2 = \mathbf{D}_\theta T_{n1}^c = \sigma^2 - \sigma_1^2.$$

Чтобы первое слагаемое в (2.5) было асимптотически бесконечно малой величиной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие «больших уклонений»

$$(n - \mu_1)/\sigma_1 \sim \sqrt{\frac{n}{u}}\mathbf{P}\{X \geqslant j_1\}/\sqrt{\mathbf{P}\{X \leqslant j_1\}} \to \infty.$$

Но это, очевидно, выполняется, так как при условии (2.4)

$$\mathbf{P}\{X \leqslant j_1\} = \mathbf{P}\left\{\frac{X-u}{\sqrt{u}} \leqslant \frac{j_1 - u}{\sqrt{u}}\right\} \to 0.$$

Далее, для вероятностей $\mathbf{P}\{T_{n1}^c = m\}$ (так же, как в [13] для равновероятной схемы) можно получить следующую оценку:

$$\mathbf{P}\{T_{n1}^c = m\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_c} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma_c^2}} + O\left(|\Delta| n^{-3/2} u^{-1/2} + n^{-3/2} u^{1/2}\right), \ \Delta = m - \mu_c, \tag{2.7}$$

откуда также следует и оценка

$$\mathbf{P}\left\{T_n = n\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} + O\left(n^{-3/2} u^{1/2}\right). \tag{2.8}$$

Учитывая, что $n = \mu_1 + \mu_c$, из (2.7) и (2.8) получаем соотношение

$$\left|\frac{\mathbf{P}\left\{T_{n1}^c = n - j\right\}}{\mathbf{P}\left\{T_n = n\right\}} - 1\right| = \left|\frac{\sigma}{\sigma_c} \exp\left\{-\frac{(j-\mu_1)^2}{2\sigma_c^2}\right\} - 1\right| + O(|j - \mu_1| n^{-1} + n^{-1} u).$$

Так как $\mathbf{E}|T_{n1}-\mu_1| \leqslant \sigma_1$ и $\sigma_1^2 = \sigma^2 - \sigma_c^2$, то, обозначив $T_{n1}^* = \frac{T_{n1}-\mu_1}{\sigma_1}$, имеем

$$\sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}\{T_{n1}=j\} \left| \frac{\mathbf{P}\{T_{n1}^c = n-j\}}{\mathbf{P}\{T_n = n\}} - 1 \right|$$

$$= \mathbf{E} \left| \frac{\sigma}{\sigma_c} \exp\left\{ -\frac{(T_{n1}^*)^2}{2} \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_c^2} - 1 \right) \right\} - 1 \right| + o(1).$$

Поскольку $\frac{\sigma}{\sigma_c} \to 1$ при условии (2.4), то

$$\mathbf{E} \left| \frac{\sigma}{\sigma_c} \exp\left\{ -\frac{(T_{n1}^*)}{2} \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_c^2} - 1 \right) \right\} - 1 \right| \to 0,$$

что завершает доказательство теоремы. □

Из теоремы 2 вытекают как утверждение теоремы 1, так и следующие утверждения.

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 числа блоков крайних зон случайного разбиения*

$$C_{1,r}(n) = \sum_{j \leqslant r} \kappa_n(j) \text{ и } C_{2,s}(n) = \sum_{j \geqslant s} \kappa_n(j), \quad r \leqslant j_1 < j_2 \leqslant s, \tag{2.9}$$

распределены асимптотически по законам Пуассона с параметрами соответственно

$$\Lambda_{1,r} = \Lambda_{1,r}(n,\theta) = \theta \sum_{j \leqslant r} \frac{u^j}{j!} \quad \text{и} \quad \Lambda_{2,s} = \Lambda_{2,s}(n,\theta) = \theta \sum_{j \geqslant s} \frac{u^j}{j!}\,. \tag{2.10}$$

Следствие 2. *В условиях теоремы 2 числа* $\eta_1(n) = \sum_{j \leqslant j_1} j\kappa_n(j)$ *и* $\eta_2(n) = \sum_{j \geqslant j_2} j\kappa_n(j)$ *элементов, содержащихся в «хвостах» (1.3), асимптотически распределены так же, как величины* T_{n1} *и* T_{n2} *соответственно, т. е. асимптотически нормально с параметрами*

$$(n\mathbf{P}\{X \leqslant j_1\},\ nu\,\mathbf{P}\{X \leqslant j_1\}) \text{ и } (n\mathbf{P}\{X \geqslant j_2\},\ nu\mathbf{P}\{X \geqslant j_2\})$$

соответственно.

Отметим еще следующий важный факт. Сумма всех величин $\{Z_j\}$ имеет дисперсию (см. (2.1))

$$\mathbf{D}_\theta \sum_{j \geqslant 1} Z_j = \theta \sum_{j \geqslant 1} u^j/j! = \theta\,(e^u - 1) = \frac{n}{u} - \theta \sim \frac{n}{\ln n},$$

в то время как асимптотическая дисперсия числа всех блоков разбиения, как отмечено выше, имеет вид

$$\mathbf{D}_\theta \xi(n) \sim \frac{n}{(\ln n)^2},$$

т. е. асимптотические распределения этих характеристик различаются.

Таким образом, методика, основанная на использовании расстояния по вариации, также имеет свои пределы, указанные в теореме 2: она эффективна лишь для исследования «хвостовых» характеристик структуры. В следующем разделе ее эффективность будет продемонстрирована еще и при исследовании экстремальных характеристик структуры (типа размера максимального блока).

3. Экстремальные и связанные с ними характеристики структуры

Рассмотрим сначала размер максимального блока

$$\mu_n = \max\{j : \kappa_n(j) > 0\}.$$

В классической модели (т. е. при $\theta = 1$) для среднего значения величины максимального блока $\mu_n = \mu_n(1)$ в случайном разбиении n-множества при $n \to \infty$ имеет место асимптотика ([6, с. 160–161])

$$\mathbf{E}\mu_n = er - \ln\sqrt{r} + O(1),$$

где $re^r = n$ (т. е. это среднее имеет порядок $e \ln n$), а асимптотическое распределение μ_n там же описывается в терминах случайной величины

$$\tilde{\mu}_n = \mu_n - m_n, \quad m_n = \left[er - \ln\sqrt{2\pi er} - \ln(e-1)\right], \tag{3.1}$$

где $[a]$ — целая часть числа a: равномерно по любой ограниченной области значений x

$$\mathbf{P}\{\tilde{\mu} < x\} - \exp\{-e^{-[x]+\delta}\} \to 0,$$

где $\delta = \{er - \ln\sqrt{2\pi er} - \ln(e-1)\}$ — дробная часть указанного числа.

Таким образом, при больших значениях n распределение μ_n сосредоточено в окрестности точки m_n и имеет характер, близкий к дважды экспоненциальному типу.

Аналог этого для параметрической модели формулируется следующим образом.

Теорема 3. *Пусть* $n \to \infty$. *Тогда для любого фиксированного* $d = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\mathbf{P}_\theta \left\{\mu_n(\theta) \leqslant [m_n(\theta)] + d\right\} = \exp\left\{-\frac{\theta}{e-1} f\left(\{m_n(\theta)\} - d\right)\right\}(1 + o(1)),$$

где $m_n(\theta) = eu - \frac{1}{2}\ln u$ *и* $f(x) = e^x/\sqrt{2\pi e}$, *а также*

$$\mathbf{P}_\theta \left\{\mu_n(\theta) = [m_n(\theta)] + d\right\} = \left(1 - \exp\left\{-\theta f\left(\{m_n(\theta)\} - d\right)\right\}\right) \times \exp\left\{-\frac{\theta}{e-1} f\left(\{m_n(\theta)\} - d\right)\right\}(1 + o(1)).$$

Доказательство. Для распределения рассматриваемой характеристики можно записать следующую цепочку соотношений (см. (2.9)–(2.10)):

$$\mathbf{P}_\theta\{\mu_n(\theta) < s\} = \mathbf{P}_\theta\{C_{2,s}(n) = 0\} \sim \exp\{-\Lambda_{2,s}\}. \tag{3.2}$$

Положим в (3.2)

$$s = [m_n(\theta)] + d, \quad d \text{ — фиксированное целое число}, \tag{3.3}$$

тогда условие (2.4) выполняется, и по формуле Стирлинга

$$\frac{u^s}{s!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} e^{\{m_n(\theta)\} - d}(1 + o(1)) = f\left(\{m_n(\theta)\} - d\right)(1 + o(1)). \tag{3.4}$$

Поскольку

$$\Lambda_{2,s} = \theta \sum_{j \geqslant s} \frac{u^j}{j!} = \theta \frac{u^s}{s!}\left(1 + \frac{u}{s+1} + \frac{u^2}{(s+1)(s+2)} + \cdots\right),$$

то при указанном выборе s получаем соотношение

$$\Lambda_{2,s} = \frac{\theta e}{e-1} f\left(\{m_n(\theta)\} - d\right)(1 + o(1)). \tag{3.5}$$

Это позволяет установить вид указанной в формулировке теоремы предельной функции распределения для объема максимального блока в рассматриваемой модели.

Аналогично, исходя из соотношения

$$\mathbf{P}_\theta \left\{\mu_n(\theta) = s\right\} = \mathbf{P}_\theta \left\{\kappa_n(s) > 0,\ C_{2,s+1}(n) = 0\right\},$$

получаем указанную в теореме асимптотику для локальной вероятности.

Тем же способом можно исследовать и другие экстремальные характеристики структуры $\kappa_n = (\kappa_n(1), \kappa_n(2), \ldots, \kappa_n(n))$. $\square$

Если расположить размеры блоков структуры в неубывающем порядке, то получим соответствующий *вариационный ряд*, длина которого случайна и равна общему числу блоков разбиения:

$$l_1(n) \leqslant l_2(n) \leqslant \ldots \leqslant l_{\xi(n)}(n). \tag{3.6}$$

Распределения максимальных членов этого ряда

$$\mu_{n,m}(\theta) = l_{\xi(n)-m+1}(n), \quad m = 1, 2, \ldots \quad \left(\mu_{n,1}(\theta) = l_{\xi(n)}(n) = \mu_n(\theta)\right),$$

описываются следующей теоремой.

Теорема 4. *Пусть $n \to \infty$ и s имеет вид* (3.3). *Тогда*

$$\mathbf{P}_\theta \left\{\mu_{n,m}(\theta) < x\right\} = \mathbf{P}_\theta \left\{C_{2,s}(n) \leqslant m-1\right\} \sim \exp\left\{-\Lambda_{2,s}\right\} \sum_{l \leqslant m-1} \frac{\left(\Lambda_{2,s}\right)^l}{l!}.$$

Отметим также, что число блоков размера s вида (3.3) асимптотически является пуассоновской величиной с конечным параметром (см. (3.4))

$$\lambda_s = \theta \frac{u^s}{s!} = \theta f\left(\{m_n(\theta)\} - d\right), \tag{3.7}$$

а число «хвостовых» блоков $C_{2,s}(n) = \sum\limits_{j \geqslant s} \kappa_n(j)$ случайного разбиения при s вида (3.3) асимптотически распределено по закону Пуассона с параметром $\Lambda_{2,s}$, указанным в (3.5).

В итоге можно сказать, что максимальные размеры блоков структуры случайного разбиения имеют порядок $eu \sim e \ln n$, а числа блоков таких размеров асимптотически являются усеченными в нуле (значение 0 запрещено) пуассоновскими случайными величинами с конечными параметрами вида (3.7); при этом с увеличением d (с ростом s) эти параметры убывают к нулю.

Что же касается начальных членов ряда (3.6), то с вероятностью, близкой к единице при больших значениях n, они представляют собой серии последовательных натуральных чисел $1, 2, \ldots$, при этом для длины j-й серии $\kappa_n(j)$ имеет место асимптотика

$$\mathbf{E}_\theta \kappa_n(j) = \theta \frac{u^j}{j!}(1 + o(1)) \sim \frac{\theta}{j!}(\ln n)^j, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{3.8}$$

Рассмотрим, наконец, число различных блоковых размеров разбиения

$$L_{\theta n} = \sum_j I\left(\kappa_n(j) > 0\right), \quad I(A) \text{ — индикатор события } A,$$

или, что то же, число серий в вариационном ряду (3.6).

Ясно, что $L_n(\theta) \leqslant \mu_n(\theta)$ и разность $\mu_n(\theta) - L_n(\theta)$ есть конечная величина, поскольку блоки, размеры которых близки к значению $\mu_n(\theta)$, могут отсутствовать, но число отсутствующих блоков не может быть «слишком большим», поскольку количества блоков заданных размеров являются асимптотически пуассоновскими случайными величинами с конечными параметрами (см. (3.7)) и принимают нулевые значения с положительными вероятностями.

Более того, из теоремы 2 следует, что случайная величина $L_n(\theta)$ асимптотически устроена так же, как и сумма независимых индикаторов

$$\tilde{L}_n(\theta) = \sum_j I\left(Z_j > 0\right).$$

Для последней же непосредственно устанавливается, что

$$\mathbf{E}_\theta \tilde{L}_n(\theta) = \sum_j \mathbf{P}_\theta\left(Z_j > 0\right) = \sum_j \left(1 - e^{-\lambda_i}\right) = m_n(\theta) + O(1) \quad (n \to \infty),$$

а для характеристической функции выполняется соотношение

$$\mathbf{E}_\theta \exp\left\{it\left(\tilde{L}_n(\theta) - \mathbf{E}_\theta \tilde{L}_n(\theta)\right)\right\} = \prod_j e^{ite^{-\lambda_j}}\left(1 + e^{-\lambda_j}\left(e^{-it} - 1\right)\right)$$
$$= \prod_d \exp\left\{ite^{-\theta f(\{m_n(\theta)\}-d)}\right\}\left(1 + e^{-\theta f(\{m_n(\theta)\}-d)}\left(e^{-it} - 1\right)\right)(1 + o(1))$$
$$(n \to \infty).$$

Таким образом, число различных блоковых размеров разбиения в $\mathbf{P}_\theta$-модели в среднем асимптотически имеет тот же порядок, что и максимальный размер блока, т. е. (см. (3.3)) порядок $eu \sim e \ln n$. Более того, все размеры $j = 1, 2, \ldots$ вплоть до максимального размера за исключением, возможно, небольшого их числа, присутствуют в вариационном ряду (3.6), повторяясь при этом довольно много раз (образуя серии довольно большой длины вида (3.8)). В частности, вероятность события $\{L_n(\theta) = \mu_n(\theta)\}$, означающего, что все размеры

вплоть до максимального присутствуют в вариационном ряду (3.6), асимптотически совпадает с вероятностью события $\left\{\tilde{L}_n(\theta) = \tilde{\mu}_n(\theta)\right\}$, где $\tilde{\mu}_n(\theta) = \max\{j : \ Z_j > 0\}$. Последняя же вероятность вычисляется так:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left\{\tilde{L}_n(\theta) = \tilde{\mu}(\theta)\right\} = \mathbf{P}\left\{Z_j > 0,\ j < \tilde{\mu}_n(\theta)\right\} \\
&= \mathbf{E} \prod_{j<\tilde{\mu}_n(\theta)} \left(1 - e^{-\lambda_j}\right) = \sum_s \mathbf{P}\left\{\tilde{\mu}_n(\theta) = s\right\} \prod_{j<s} \left(1 - e^{-\lambda_j}\right) \\
&= \sum_s \mathbf{P}\left\{Z_s > 0,\ Z_j = 0,\ j > s\right\} \prod_{j<s} \left(1 - e^{-\lambda_j}\right) \\
&= \sum_s e^{-\sum\limits_{j>s} \lambda_j} \prod_{j\leqslant s} \left(1 - e^{-\lambda_j}\right),
\end{aligned}$$

что в обозначениях теоремы 3 принимает вид

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}\left\{\tilde{L}_n(\theta) = \tilde{\mu}_n(\theta)\right\} \\
\sim \sum_d \exp\left\{-\frac{\theta}{e-1} f\left(\{m_n(\theta)\} - d\right)\right\} \prod_{d'\leqslant d} \left(1 - \exp\left\{-\theta f\left(\{m_n(\theta)\} - d'\right)\right\}\right).
\end{gathered} \tag{3.9}$$

Численное значение этой вероятности в случае равновероятных разбиений приводится в работе [11]: оно находится между границами $0.70398\ldots$ и $0.70427\ldots$ Таким образом, в равновероятном разбиении n-множества при больших значениях n с вероятностью, приблизительно равной 0.7, присутствуют блоки всех размеров вплоть до максимального размера.

Замечание 2. Для модели равновероятных разбиений (при $\theta = 1$) в [7] установлено, что $L_n(1)/\ln n \to e$ в среднем любого конечного порядка, а в [13] доказано, что разность $\mu_n(1) - L_n(1)$ (размера максимального блока и числа различных блоковых размеров случайного разбиения) асимптотически ведет себя как неотрицательная целочисленная случайная величина с конечным средним, и получен явный вид производящей функции этой предельной величины G_x, когда $n \to \infty$ по такой подпоследовательности $n(k)$, что $\{m_{n(k)}(1)\} \to x \in [0, 1]$. В частности, ее среднее значение равно

$$\mathbf{E}G_x = \sum_d \left(1 - \exp\left\{-f(x-d)/(e-1)\right\}\right) \exp\{-f(x-d)\},$$

при этом

$$\min_x \mathbf{E}G_x = 0.45847\ldots, \quad \max_x \mathbf{E}G_x = 0.45888\ldots$$

4. Средняя область структуры

Как уже отмечалось выше (см. замечание 1), имеется существенное различие между асимптотическими распределениями полных последовательностей $\{\kappa_n(j)\}$ и $\{Z_j\}$ и их соответствующих «хвостовых» областей (1.3) и (1.4). Здесь мы рассмотрим этот вопрос более детально на примере такой характеристики структуры, как $\xi_{j_1,\,j_2}(n) = \sum_{j_1 \leqslant j \leqslant j_2} \kappa_n(j)$ — числа ее блоков, размеры которых лежат в «небольшой» окрестности величины $u \sim \ln n$, именно в окрестности вида

$$j_1 = u - \alpha\sqrt{u}, \quad j_2 = u + \beta\sqrt{u},\ \alpha, \beta > 0. \tag{4.1}$$

Для производящей функции этой характеристики из (1.2) следует представление

$$\begin{gathered}\mathbf{E}_\theta t^{\xi_{j_1,j_2}(n)} = n!\,[z^n] \exp\left\{\theta\left(e^z - 1 + (t-1)E(z)\right)\right\} \big/ B_n(\theta), \\ E(z) = E_{j_1,j_2}(z) = \sum_{j_1 \leqslant j \leqslant j_2} \frac{z^j}{j!},\end{gathered} \tag{4.2}$$

из которого также следуют и представления для факториальных моментов:

$$\mathbf{E}_\theta \left(\xi_{j_1,j_2}(n)\right)_k = n!\,[z^n] \left(\theta E(z)\right)^k \exp\left\{\theta\left(e^z - 1\right)\right\} \big/ B_n(\theta),\ k = 1, 2, \ldots \tag{4.3}$$

Дальнейший асимптотический анализ (при $n \to \infty$) этих соотношений основывается на стандартном алгоритме с использованием интегральной формулы Коши и метода перевала. Отметим предварительно, что при условии (4.1) имеет место следующая асимптотическая оценка функции $E(z)$ в (4.2) и ее производных $E^{(i)}(z)$ в точке $z = u$ (напомним, что X есть пуассоновская случайная величина с параметром $u \to \infty$):

$$\begin{gathered}E^{(i)}(u) = e^u \mathbf{P}\left\{j_1 - i \leqslant X \leqslant j_2 - i\right\} \\ = e^u \mathbf{P}\left\{-\alpha - \frac{i}{\sqrt{u}} \leqslant \frac{X-u}{\sqrt{u}} \leqslant \beta - \frac{i}{\sqrt{u}}\right\} = \gamma e^u (1 + o(1)),\ i = 0, 1, 2, \ldots,\end{gathered} \tag{4.4}$$

где $\gamma = \Phi(\beta) - \Phi(-\alpha)$, $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

Опуская стандартные технические детали метода перевала (см., например, [12]), приведем его конечный результат.

Обозначим $\psi(z) = \theta(e^z + xE(z))$, $x = t - 1$, и пусть $\hat{u} = \hat{u}(x)$ есть решение уравнения $z\psi'(z) = n$. Тогда

$$[z^n]\exp\{\psi(z)\} = \frac{\exp\{\psi(\hat{u})\}\,\hat{u}^{-n}}{\sqrt{2\pi\,(\hat{u}^2\psi''(\hat{u}) + n)}}(1 + o(1)) \quad (n \to \infty). \tag{4.5}$$

Отметим, что при $t = 1$ (при $x = 0$) имеет место равенство $\hat{u}(0) = u$ (см. (2.1)), и из (4.5) следует асимптотика для полиномов Белла:

$$\frac{B_n(\theta)}{n!} = [z^n]\exp\{\theta(e^z - 1)\} = \frac{\exp\{\theta\,(e^u - 1)\}\,u^{-n}}{\sqrt{2\pi n(u+1)}}(1 + o(1)) \quad (n \to \infty).$$

В свою очередь, из (4.2) и (4.5) следует асимптотическое представление

$$\mathbf{E}_\theta t^{\xi_{j_1,j_2}(n)} = \exp\left\{\psi(\hat{u}) - \theta e^u - n\ln\frac{\hat{u}}{u}\right\}(1 + o(1)) \quad (n \to \infty),$$

что, с учетом соотношений

$$\hat{u}\psi'(\hat{u}) = n = \theta u e^u, \quad \psi(\hat{u}) = \psi'(\hat{u}) + x\theta\,(E(\hat{u}) - E'(\hat{u}))\,,$$

можно записать в виде

$$\mathbf{E}_\theta t^{\xi_{j_1,j_2}(n)} = \exp\left\{\frac{n}{\hat{u}} - \frac{n}{u} + x\theta\,(E(\hat{u}) - E'(\hat{u})) - n\ln\frac{\hat{u}}{u}\right\}(1 + o(1)). \tag{4.6}$$

Также из (4.3) и (4.4) следует и асимптотика факториальных моментов:

$$\mathbf{E}_\theta\,(\xi_{j_1,j_2}(n))_k = (\gamma n/u)^k(1 + o(1)), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.7}$$

Теорема 5. *Пусть $n \to \infty$, параметр θ фиксирован, параметры j_1, j_2 удовлетворяют условиям (4.1) и $u = u(\theta)$ — решение уравнения $\theta z e^z = n$. Тогда случайная величина $\xi_{j_1,j_2}(n)$ асимптотически нормальна с параметрами $(\mu_n,\ \sigma_n^2)$, где*

$$\mu_n = \frac{n}{u}\left(\gamma + \frac{e^{-\beta^2/2} - e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{2\pi u}} + O\left(\frac{1}{u}\right)\right),$$

$$\sigma_n^2 = \frac{n}{u}\left(\gamma(1-\gamma) + \frac{e^{-\beta^2/2} - e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{2\pi u}} + \frac{\gamma^2}{u}(1 + o(1))\right).$$

Доказательство. Для производящей функции моментов величины $\xi_{j_1,j_2}(n)\sigma_n^{-1}$ из (4.6) следует асимптотическое представление (далее $x = e^{\tau/\sigma_n} - 1$)

$$\mathbf{E}_\theta e^{\tau\xi_{j_1,j_2}(n)\sigma_n^{-1}} = \exp\left\{-\frac{n\Delta_n}{\hat{u}} - n\ln(1+\Delta_n) + x\theta\left(\frac{\hat{u}^{j_2}}{j_2!} - \frac{\hat{u}^{j_1-1}}{(j_1-1)!}\right)\right\}(1+o(1)),$$

где

$$\Delta_n = \Delta_n(x) = \frac{\hat{u}-u}{u} = o(1).$$

Тогда

$$\ln \mathbf{E}_\theta e^{\tau\xi_{j_1,j_2}(n)\sigma_n^{-1}} = -n\Delta_n\frac{\hat{u}+1}{\hat{u}} + \frac{1}{2}n\Delta_n^2 + x\theta\left(\frac{\hat{u}^{j_2}}{j_2!} - \frac{\hat{u}^{j_1-1}}{(j_1-1)!}\right) + O\left(n\Delta_n^3\right) + o(1). \tag{4.8}$$

Здесь по формуле Стирлинга

$$\theta\left(\frac{\hat{u}^{j_2}}{j_2!} - \frac{\hat{u}^{j_1-1}}{(j_1-1)!}\right) = \frac{n\left(e^{-\beta^2/2} - e^{-\alpha^2/2}\right)}{\sqrt{2\pi}u^{3/2}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)\right), \tag{4.9}$$

и дальнейший анализ сводится к исследованию асимптотики величины Δ_n. В свою очередь, для этого надо рассмотреть разложение при малых значениях x функции $\hat{u} = \hat{u}(x)$. По формуле Тейлора имеем:

$$\hat{u}(x) = u + x\hat{u}'(0) + \frac{x^2}{2}\hat{u}''(0) + O\left(x^3\hat{u}'''(0)\right). \tag{4.10}$$

Производные функции $\hat{u}(x)$ находятся дифференцированием тождества $\hat{u}(x)\left(e^{\hat{u}(x)} + xE'\left(\hat{u}(x)\right)\right) \equiv n/\theta$. Так, из тождества

$$\hat{u}'(x)\left(e^{\hat{u}(x)} + xE'\left(\hat{u}(x)\right)\right) + \hat{u}(x)\left(\hat{u}'(x)e^{\hat{u}(x)} + E'\left(\hat{u}(x)\right) + x\hat{u}'(x)E''\left(\hat{u}(x)\right)\right) \equiv 0$$

при $x = 0$ с учетом (4.4) находим (напомним, что $\hat{u}(0) = u$):

$$A_n \equiv \hat{u}'(0) = -\frac{u}{u+1}e^{-u}E'(u) = -\gamma + O\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right). \tag{4.11}$$

Аналогично для второй производной в нуле получаем соотношение

$$B_n \equiv \hat{u}''(0) = -\frac{u}{u+1}\left(\left(\hat{u}'(0)\right)^2 + 2\hat{u}'(0)e^{-u}E''(u) + O\left(\frac{1}{u}\right)\right) = \gamma^2 + o(1). \tag{4.12}$$

Из равенств (4.11), (4.12) следует, что первые две производные функции $\hat{u}(x)$ в нуле имеют порядок $O(1)$, когда $n \to \infty$. Такое же заключение справедливо и для производных более высоких порядков этой функции.

Подставляя теперь в (4.10) $x = e^{\tau/\sigma_n} - 1 = \frac{\tau}{\sigma_n} + \frac{\tau^2}{2\sigma_n^2} + O\left(\frac{1}{\sigma_n^3}\right)$, получаем для величины Δ_n асимптотическое представление

$$\Delta_n = \frac{\tau}{\sigma_n}\,\frac{A_n}{u} + \frac{\tau^2}{2\sigma_n^2}\,\frac{A_n + B_n}{u}(1 + o(1)). \tag{4.13}$$

Наконец, из (4.8), с учетом (4.9)–(4.13), получаем

$$\ln \mathbf{E}_\theta e^{\tau\xi_{j_1,j_2}(n)\sigma_n^{-1}} = \frac{n\tau}{\sigma_n u}\left(\gamma + \frac{e^{-\beta^2/2} - e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{2\pi u}} + O\left(\frac{1}{u}\right)\right)$$
$$+ \frac{n\tau^2}{2\sigma_n^2 u}\left(\gamma(1-\gamma) + \frac{e^{-\beta^2/2} - e^{-\alpha^2/2}}{\sqrt{2\pi u}} + \frac{\gamma^2}{u}(1 + o(1))\right) = \tau\frac{\mu_n}{\sigma_n} + \frac{\tau^2}{2},$$

что в итоге дает нужный результат: $\mathbf{E}_\theta \exp\left\{\tau\frac{\xi_{j_1,j_2}(n) - \mu_n}{\sigma_n}\right\} \to e^{\frac{\tau^2}{2}}$.

Теорема доказана. □

Замечание 3. Поскольку из сходимости производящей функции моментов следует также и сходимость всех моментов, то указанные в формулировке теоремы параметры являются асимптотическими значениями соответственно среднего и дисперсии случайной величины $\xi_{j_1,j_2}(n)$.

Подчеркнем, что асимптотика дисперсии имеет принципиально иной характер в сравнении с дисперсией для общего числа блоков: $\mathbf{D}_\theta \xi(n) \sim n/(\ln n)^2$.

Таким образом, полученный результат является новым и для классической модели равновероятных разбиений. В частности, формула для σ_n^2 показывает, как меняется характер поведения дисперсии, когда $\gamma \to 1$, т. е. когда в (4.1) $\alpha, \beta \to \infty$: в пределе дисперсия принимает указанный выше «классический» вид.

Замечание 4. Соответствующая сумма $S_{j_1,j_2}(n) = \sum\limits_{j_1 \leqslant j \leqslant j_2} Z_j$ независимых пуассоновских величин имеет распределение Пуассона с параметром

$$\mathbf{E}_\theta \sum_{j_1 \leqslant j \leqslant j_2} Z_j = \mathbf{D}_\theta \sum_{j_1 \leqslant j \leqslant j_2} Z_j = \theta \sum_{j_1 \leqslant j \leqslant j_2} u^j/j! = \theta E(u) \sim \frac{\gamma n}{u} \sim \frac{\gamma n}{\ln n},$$

так что ее асимптотическое распределение отличается от распределения характеристики $\xi_{j_1,j_2}(n) = \sum\limits_{j_1 \leqslant j \leqslant j_2} \kappa_n(j)$.

Таким образом, в средней зоне (4.1) зависимостью между элементами структуры случайного разбиения (в отличие от «хвостовых» ее зон) в асимптотике пренебречь уже нельзя.

Авторы выражают признательность А. М. Зубкову за ценные замечания, способствовавшие улучшению статьи.

Список литературы

[1] де Брёйн Н.Г., *Асимптотические методы в анализе*, М.: ИЛ, 1961.

[2] Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., “Случайные комбинаторные объекты в общей параметрической модели”, *Труды по дискретной математике*, **10** (2007), 73–86.

[3] Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., “Параметрические модели случайных комбинаторных объектов экспоненциального типа и вопросы их вероятностно-статистического анализа”, *Математические вопросы криптографии*, **8**:3 (2017), 41–56.

[4] Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., “Разбиения без малых блоков и r-присоединенные полиномы Белла в параметрической модели: вероятностно-статистический анализ”, *Математические вопросы криптографии*, **10**:1 (2019), 5–18.

[5] Сачков В.Н., “Случайные разбиения множеств”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **19**:1 (1974), 178–194.

[6] Сачков В.Н., *Вероятностные методы в комбинаторном анализе*, М.: Наука, 1978.

[7] Arratia R., Tavare S., “Independent process approximations for random combinatorial structures”, *Adv. Math.*, **104** (1994), 90–154.

[8] Bell E.T., “Exponential polynomials”, *Ann. Math.*, **35**:2 (1934), 258–277.

[9] Ewens W. J., “The sampling theory of selectively neutral alleles”, *Theor. Popul. Biol.*, **3** (1972), 87–112.

[10] DeLaurentis J.M., Pittel B.G., “Counting subsets of the random partition and the “Brownian bridge” process”, *Stochast. Proc. Appl.*, **15** (1983), 155–167.

[11] Goh W.M.J., Schmutz E., “Gap-free set partitions”, *Random Structures and Algorithms*, **3** (1992), 9–18.

[12] Hayman W.K., “A generalization of Stirling’s formula”, *J. reine angew. Math.*, **196** (1956), 67–95.

[13] Pittel B., “Random set partitions: asymptotics of subset counts”, *J. Comb. Theory*, *Ser. A*, **79** (1997), 326–359.