Ю.Р.Агачев

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

К настоящему времени разработаны достаточно эффективные прямые методы решения дифференциальных уравнений с непрерывными, в том числе и гладкими, коэффициентами (см., например, [I - 4] и др.). Однако в случае уравнений с разрывными коэффициентами остаются еще задачи, связанные, с одной стороны, с вопросами обоснования известных методов и, с другой - с разработкой новых, более простых, прямых методов, учитывающих особенности коэффициентов уравнения. Следует отметить, что в последние годы появился ряд работ (см., например, [5 - 7]), в которых дано обоснование полиномиального и сплайнового методов подобластей решения дифференциальных уравнений в пространствах L_p, суммируемых с p-й степенью ($1 \le p < \infty$) или существенно ограниченных ($p = \infty$) функций.

В данной работе для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка предлагается прямой метод, который достаточно прост в применении и в то же время применим и к уравнениям с произвольными суммируемыми коэффициентами.

§ I. Вычислительная схема метода

Рассмотрим краевую задачу

$$R_\nu(x) = 0 \quad , \quad \nu = \overline{0, m-1} \tag{I}$$

для дифференциального уравнения

$$Kx \equiv x^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t) x^{(m-k)}(t) = y(t) \, , \quad a \le t \le b \; , \tag{2}$$

где $g_k(t)$, $k = \overline{1, m}$ и $y(t)$ - известные функции, а R_ν,

$\nu=\overline{0,m-1}$, – линейно независимые непрерывные функционалы на пространстве $C^{(m-1)}[a,b]$ непрерывно дифференцируемых $(m-1)$ раз на $[a,b]$ функций. Зададим в промежутке $[a,b]$ сетку узлов

$$\Delta_n: \ a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b \ , \tag{3}$$

удовлетворяющую условию

$$\|\Delta_n\| \equiv \max_k (t_k-t_{k-1}) \to 0 \ , \ n\to\infty \ .$$

I.I. Приближенное решение задачи (I), (2) будем искать в виде сплайна (см. [8, 9]) $x_n(t)\equiv x_{n,m}(t)$ степени m дефекта I на сетке (3). Ясно, что $x_n(t)$ имеет $(n+m)$ -неизвестных коэффициентов. Определим их из следующих условий:

$$x_n^{(m)}(t_j)+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{t_j-t_{j-1}}\int_{t_{j-1}}^{t_j} g_k(t)\,dt\cdot x_n^{(m-k)}(t_j)=\frac{1}{t_j-t_{j-1}}\int_{t_{j-1}}^{t_j} y(t)\,dt,\ j=\overline{1,n}, \tag{4}$$

$$R_\nu(x_n)=0 \ , \ \nu=\overline{0,m-1} \ . \tag{5}$$

Очевидно, метод (4), (5) представляет собой прямой метод, т.е. условия (4), (5) дают систему $(n+m)$-линейных алгебраических уравнений (кратко: СЛАУ) относительно $(n+m)$-неизвестных. Заметим, что схема метода (4), (5) имеет смысл, как и схема хорошо известного метода подобластей, и в случае лишь суммируемых коэффициентов исходного уравнения (2). С другой стороны, схема метода (4), (5), использующего усреднение коэффициентов на частичных промежутках, значительно проще схемы метода подобластей.

I.2. Теперь будем решать задачу (I), (2) приближенно с помощью сплайна $x_n(t)\equiv x_{n,m+1}(t)$ степени $m+1$ дефекта I на сетке (3), определив его неизвестные коэффициенты из СЛАУ

$$\left.\begin{aligned} & x_n^{(m)}(t_j)+\sum_{k=1}^{m}\Phi_j(g_k)\,x_n^{(m-k)}(t_j)=\Phi_j(y),\ j=\overline{0,n}\ , \\ & R_\nu(x_n)=0 \ , \ \nu=\overline{0,m-1} \ , \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где $\Phi_j(z)=\dfrac{1}{t_j-t_{j-1}}\displaystyle\int_{t_{j-1}}^{t_j} z(t)\,dt,\ j=\overline{1,n},$ – суть средние значения функции

$z(t)$ на частичных промежутках, $\varphi_0 = \varphi_1$ – в непериодическом случае и $\varphi_0 = \varphi_n$ – в периодическом.

§ 2. Обоснование метода

Относительно вычислительной схемы (4), (5) справедлива

Т е о р е м а I. Пусть функции $g_k \in L_p(a,b), k=\overline{1,m}$, и задача (I), (2) однозначно разрешима при любой правой части $y \in L_p(a,b)$, $1 \le p \le \infty$. Тогда, начиная с некоторого номера n, система (4), (5), также однозначно разрешима и соответствующие решения $x_n^*(t) \equiv x_{n,m}^*(t)$ сходятся к точному решению $x^*(t)$ задачи (I), (2) с быстротой

$$\| x^* - x_n^* \|_{W_p^{(m)}(a,b)} \equiv \sum_{k=0}^{m-1} \| x^{*(k)} - x_n^{*(k)} \|_{C[a,b]} +$$

$$+ \| x^{*(m)} - x_n^{*(m)} \|_{L_p(a,b)} = O\Big\{ E_n^0(y)_p + \sum_{k=1}^{m} E_n^0(g_k)_p + \tag{7}$$

$$+ \| \Delta_n \|^{(1-1/p)} \cdot \max_t \| g_1(t+\cdot) \|_{L_p(0,\|\Delta_n\|)} + \| \Delta_n \| \Big\}, \quad 1 \le p \le \infty ;$$

здесь $E_n^0(z)_p$ означает наилучшее приближение функции $z \in L_p(a,b)$ сплайнами нулевой степени дефекта I с узлами (3).

С л е д с т в и е. Пусть сетка Δ_n узлов (3) удовлетворяет условию

$$\| \Delta_n \| \, / \min_k \, (t_k - t_{k-1}) \le \beta < \infty \quad , \tag{8}$$

где $\beta > 0$ – абсолютная постоянная. Тогда для погрешности приближенных решений верна оценка[I]

$$\| x^* - x_n^* \|_{W_p^{(m)}(a,b)} = O\Big\{ \omega(y; \frac{1}{n})_p + \sum_{k=1}^{m} \omega(g_k; \frac{1}{n})_p + \tag{7'}$$

$$+ \max_t \| g_1(t+\cdot) \|_{L_p(0,\|\Delta_n\|)} \cdot n^{-(1-1/p)} + n^{-1} \Big\}, \quad 1 \le p \le \infty ;$$

[I] Здесь и далее $\omega(z; \delta)_p$ означает интегральный модуль непрерывности функции $z \in L_p(a, b)$, вычисленный в точке δ.

в частности, если $g_1 \in L_\infty(a,b)$, то

$$\| x^* - x_n^* \|_{W_p^{(m)}(a,b)} = O\left\{ \omega\left(y;\frac{1}{n}\right)_p + \sum_{k=1}^{m} \omega\left(g_k;\frac{1}{n}\right)_p + n^{-1} \right\}, \ 1 \le p \le \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Y пространство $L_p(a,b)$ с обычной нормой, а через X - пространство $\overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(a,b)$ функций, имеющих ($m-1$)-ю абсолютно непрерывную производную, m-ю производную из $L_p(a,b)$ и удовлетворяющих краевым условиям (I). Норму в X зададим следующим образом:

$$\| x \|_X = \sum_{k=0}^{m-1} \| x^{(k)} \|_C + \| x^{(m)} \|_{L_p} \qquad (x \in X) \ .$$

Тогда задачу (I), (2) можно записать в виде операторного уравнения

$$Kx \equiv Gx + Tx = y \ , \quad Gx \equiv x^{(m)} \ (x \in X, y \in Y) \ , \qquad (9)$$

где $T: X \to Y$ - вполне непрерывный оператор, определяемый соотношением

$$(Tx)(t) \equiv \sum_{k=1}^{m} g_k(t)\, x^{(m-k)}(t) \ , \quad x \in X \ .$$

Поскольку уравнение (9) - приводящееся к уравнению II рода с вполне непрерывным оператором, то в условиях теоремы существует линейный обратный $K^{-1}: Y \to X$, $\| K^{-1} \| < \infty$.

Запишем теперь систему (4), (5) в виде эквивалентного ей операторного уравнения. С этой целью перепишем условия (4) с помощью введенных выше функционалов φ_k , $k=\overline{1,n}$, в виде

$$x_n^{(m)}(t_j) + \sum_{k=1}^{m} \varphi_j(g_k)\, x_n^{(m-k)}(t_j) = \varphi_j(y) \ , \quad j = \overline{1,n} \ . \qquad (4')$$

Далее введем $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ - подпространства сплайнов степени m дефекта I и сплайнов нулевой степени дефекта I соответственно на сетке узлов (3). Ясно, что $\dim X_n = \dim Y_n$. Рассмотрим два оператора P_n и Q_n , действующие из Y в Y_n : оператор P_n любой функции ставит в соответствие интерполяционный сплайн нулевой степени, а Q_n - "усредненный" интерполяционный сплайн нулевой степени (см. [7]), т.е.

$$(P_n y)(t)=\sum_{i=1}^{n} y(t_i)\varphi_i(t),\quad (Q_n y)(t)=\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(y)\varphi_i(t),$$

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}1, & t_0\le t\le t_1\\ 0, & t>t_1\end{cases},\quad \varphi_i(t)=\begin{cases}1, & t_{i-1}<t\le t_i,\\ 0, & t\le t_{i-1} \text{ и } t>t_i\end{cases}\quad (i=\overline{2,n}).$$

Тогда схема (4′), (5) или, что то же, (4), (5) эквивалентна операторному уравнению

$$K_n x_n \equiv x_n^{(m)}+P_n\sum_{k=1}^{m}(Q_n g_k)x_n^{(m-k)}=Q_n y \qquad (x_n\in X_n)\ . \quad (10)$$

Действительно, так как $x_n^{(m)}\in Y_n$ и $Q_n y\in Y_n$, а оператор P_n обладает свойством $P_n^2=P_n$, то (10) можно переписать в виде

$$P_n z_n \equiv P_n\left[x_n^{(m)}+\sum_{k=1}^{m}(Q_n g_k)x_n^{(m-k)}\right]=P_n Q_n y\ .$$

Отсюда непосредственно следует равенство функций z_n и $Q_n y$ в узлах t_1, t_2, ..., t_n, т.е. (4′). Обратно, пусть выполнены (4′). Тогда верно равенство

$$\sum_{j=1}^{n}\left[x_n^{(m)}(t_j)+\sum_{k=1}^{m}\Phi_j(g_k)x_n^{(m-k)}(t_j)\right]\varphi_j(t)=\sum_{j=1}^{n}\Phi_j(y)\varphi_j(t)\ . \quad (11)$$

Ясно, что правая часть (11) есть функция $(Q_n y)(t)$. Преобразуем теперь левую часть (11). Имеем

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\left[x_n^{(m)}(t_j)+\sum_{k=1}^{m}\Phi_j(g_k)x_n^{(m-k)}(t_j)\right]\varphi_j(t)=\\ &=\sum_{j=1}^{n}x_n^{(m)}(t_j)\varphi_j(t)+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Phi_j(g_k)x_n^{(m-k)}(t_j)\varphi_j(t)=\\ &=(P_n x_n^{(m)})(t)+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{\ell=1}^{n}\Phi_\ell(g_k)\varphi_\ell(t)\Big)x_n^{(m-k)}(t_j)\varphi_j(t)=\\ &=x_n^{(m)}(t)+\sum_{k=1}^{m}(Q_n g_k)(t)(P_n x_n^{(m-k)})(t)\ ,\end{aligned}\quad (12)$$

так как $\varphi_\ell(t)\varphi_j(t)=0$, $\ell\ne j$.

Но $Q_n g_k \in Y_n$, $P_n x_n^{(m-k)} \in Y_n$, $k=1,2,\ldots,m$. Поэтому

$$(Q_n g_k) P_n x_n^{(m-k)} = P_n\left[(Q_n g_k) x_n^{(m-k)}\right] \tag{I3}$$

и, следовательно, соотношение (I2) можно переписать в виде

$$x_n^{(m)}(t) + P_n\left\{\sum_{k=1}^{m} (Q_n g_k)(t)\, x_n^{(m-k)}(t)\right\}.$$

Таким образом, из равенств (4') с учетом (5) следует (I0).

Докажем теперь, что уравнение (I0) при достаточно больших n однозначно разрешимо. Для этого достаточно по теореме 7 из гл.I [3] показать близость операторов K и K_n на подпространстве X_n. Для произвольного элемента $x_n \in X_n$, учитывая равенство (I3) и используя неравенство Минковского, имеем

$$\| K x_n - K_n x_n \|_Y = \left\| \sum_{k=1}^{m} g_k x_n^{(m-k)} - \sum_{k=1}^{m} (Q_n g_k) P_n x_n^{(m-k)} \right\|_Y \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m} \| g_k - Q_n g_k \|_Y \cdot \| x_n^{(m-k)} \|_C + \sum_{k=2}^{m} \| Q_n g_k \|_Y \cdot \| x_n^{(m-k)} - \tag{I4}$$

$$- P_n x_n^{(m-k)} \|_{L_\infty} + \| (Q_n g_1)(x_n^{(m-1)} - P_n x_n^{(m-1)}) \|_Y \equiv$$

$$\equiv J_1 + J_2 + J_3 .$$

Первое слагаемое J_1 в (I4) оценивается просто:

$$J_1 \le 2 \sum_{k=1}^{m} \overset{\circ}{E}_n (g_k)_p \, \| x_n^{(m-k)} \|_C = O\left\{ \sum_{k=1}^{m} \overset{\circ}{E}_n (g_k)_p \right\} \| x_n \|_X . \tag{I5}$$

Далее, так как $Q_n : Y \to Y$ ограничен, то $\| Q_n g_k \|_Y = O(1)$, и следовательно,

$$J_2 = O\left\{ \sum_{k=2}^{m} \| x_n^{(m-k)} - P_n x_n^{(m-k)} \|_{L_\infty} \right\} =$$

$$= O\left\{ \sum_{k=2}^{m} \omega(x_n^{(m-k)}; \| \Delta_n \|)_C \right\} = O\left\{ \| \Delta_n \| \right\} \| x_n \|_X . \tag{I6}$$

Займемся теперь оценкой в (I4) третьего слагаемого. Имеем

$$J_3^p = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |(Q_n g_1)(t)[x_n^{(m-1)}(t) - (P_n x_n^{(m-1)})(t)]|^p dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} g_1(\tau)d\tau \right|^p \int_{t_{k-1}}^{t_k} |x_n^{(m-1)}(t) - x_n^{(m-1)}(t_k)|^p dt ,$$

откуда с помощью неравенства Гельдера находим

$$J_3^p \le \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})^{p-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |g_1(\tau)|^p d\tau \int_{t_{k-1}}^{t_k} |x_n^{(m)}(\tau)|^p d\tau \le$$

$$\le \|\Delta_n\|^{(p-1)} \cdot \max_k \int_0^{t_k - t_{k-1}} |g_1(\tau + t_{k-1})|^p d\tau \, \|x_n^{(m)}\|_{L_p}^p .$$

Таким образом,

$$J_3 \le \|\Delta_n\|^{(1-1/p)} \max_t \|g_1(t+\cdot)\|_{L_p(0,\|\Delta_n\|)} \cdot \|x_n\|_X . \qquad (17)$$

Неравенства (15) - (17) позволяют продолжить оценку (14) и получить

$$\|K - K_n\|_{X_n \to Y} = O\Big\{ \sum_{k=1}^{m} \overset{o}{E}_n (g_k)_p +$$

$$+ \|\Delta_n\|^{(1-1/p)} \cdot \max_t \|g_1(t+\cdot)\|_{L_p(0,\|\Delta_n\|)} + \|\Delta_n\| \Big\} \to 0 , \quad n \to \infty .$$

Тогда утверждения теоремы непосредственно следуют из теоремы 7 главы I монографии [3].

Теперь перейдем к обоснованию вычислительной схемы (6). Для этого нам понадобится следующий результат (см., например, в [10]).

Л е м м а. Пусть $z(t)$ - произвольная функция, для которой существует производная $z' \in L_p(a,b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, $1 \le p \le \infty$. Если $\mathcal{L}_1(z,t)$ есть интерполяционный полином первой степени для $z(t)$ с узлами a и b , т.е.

$$(\mathcal{L}_1 z)(t) \equiv \mathcal{L}_1(z;t) = z(a)\frac{b-t}{b-a} + z(b)\frac{t-a}{b-a} ,$$

то

$$\int_a^b |x(t)-\mathcal{L}_1(x;t)|^p dt \le 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^{p-1}\int_0^{b-a} du \int_a^{b-u} |x'(t+u)-x'(t)|^p dt, \quad 1\le p\le\infty .$$

Для вычислительной схемы (6) верна

Т е о р е м а 2 . Пусть узлы сетки (3) удовлетворяют условию (8) и выполнены предположения теоремы I. Тогда система (6) имеет единственное решение, хотя бы при всех достаточно больших n, и соответствующие приближенные решения $x_n^*(t)$ сходятся к точному решению $x^*(t)$ со скоростью (7').

Действительно, как и при доказательстве теоремы I, обозначив через $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ подпространства сплайнов $(m+1)$-й и первой степени на сетке узлов (3) соответственно, систему (6) можно записать в виде эквивалентного ей операторного уравнения (I0). Здесь через P_n и Q_n обозначены соответственно интерполяционный и "усредненный" интерполяционный (см. [7]) сплайны первой степени на сетке (3). Однако при доказательстве близости операторов K и K_n уравнений (9) и (I0) на подпространстве X_n равенство (I3) уже не выполняется. Поэтому для произвольного $x_n \in X_n$ оценку величины $\| K x_n - K_n x_n \|_Y$ проведем следующим образом:

$$\| K x_n - K_n x_n \| \le \sum_{k=1}^{m} \| g_k x_n^{(m-k)} - (Q_n g_k) P_n x_n^{(m-k)} \|_{L_p} + \sum_{k=1}^{m} \| (Q_n g_k) P_n x_n^{(m-k)} - P_n [(Q_n g_k) x_n^{(m-k)}] \|_{L_p} \equiv J_1 + J_2 . \qquad (I8)$$

Первое слагаемое в (I8) с помощью леммы 2 [7] оценивается так же, как и при доказательстве теоремы I:

$$J_1 = O\left\{ \sum_{k=1}^{m} \omega(g_k; 1/n)_p + n^{(1/p-1)} \cdot \max_t \| g_1(t+\cdot) \|_{L_p(0,\|\Delta_n\|)} + n^{-1} \right\} \| x_n \|_X . \qquad (I9)$$

Перейдем теперь к оценке второго слагаемого J_2. Для этого прежде всего заметим, что имеют место равенства

$$P_n z_k \equiv P_n [(Q_n g_k) x_n^{(m-k)}] = P_n [(Q_n g_k) P_n x_n^{(m-k)}], \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Поэтому, используя приведенную выше лемму, J_2 можно оценить так:

$$J_2=\sum_{k=1}^{m}\|(Q_n g_k)P_n x_n^{(m-k)}-P_n[(Q_n g_k)P_n x_n^{(m-k)}]\|_{L_p}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}|(Q_n g_k)(t)(P_n x_n^{(m-k)})(t)-$$

$$-P_n[(Q_n g_k)(t)(P_n x_n^{(m-k)})(t)|^p dt\Big\}^{1/p}= \tag{20}$$

$$=O\Big\{\sum_{k=1}^{m}\Big[\sum_{i=1}^{n}\pi_i^{p-1}\int_0^{\pi_i}du\int_{t_{i-1}}^{t_i-u}|z_k'(t+u)-z_k'(t)|^p dt\Big]^{1/p}\Big\},$$

$$\pi_i\equiv t_i-t_{i-1}.$$

Рассмотрим для произвольно фиксированных i и k ($i=1,2,\ldots,n;\ k=1,2,\ldots,m$) интеграл

$$\gamma_i(z_k)=\int_0^{\pi_i}du\int_{t_{i-1}}^{t_i-u}|z_k'(t+u)-z_k'(t)|^p dt.$$

Очевидно,

$$z_k'(t)=(Q_n g_k)'(t)(P_n x_n^{(m-k)})(t)+$$

$$+(Q_n g_k)(t)(P_n x_n^{(m-k)})'(t),$$

причем функции $(Q_n g_k)'(t)$ и $(P_n x_n^{(m-k)})'(t)$ постоянны в промежутке (t_{i-1},t_i). Поэтому

$$\gamma_i(z_k)=\int_0^{\pi_i}du\Big\{\int_{t_{i-1}}^{t_i-u}|(Q_n g_k)'(t)|^p|(P_n x_n^{(m-k)})(t+u)-$$

$$-(P_n x_n^{(m-k)})(t)|^p dt+\int_{t_{i-1}}^{t_i-u}|(Q_n g_k)(t+u)-$$

$$
-(Q_n g_\kappa)(t)\Big|^p \cdot \Big|(P_n x_n^{(m-\kappa)})'(t)\Big|^p dt\Big\} = \frac{2}{\pi_i^{2p}} \Big| x_n^{(m-\kappa)}(t_i) -
$$

$$
- x_n^{(m-\kappa)}(t_{i-1})\Big|^p \cdot \int_0^{\pi_i} u^p du \int_{t_{i-1}}^{t_i - u} \Big| \Phi_i(g_\kappa) - \Phi_{i-1}(g_\kappa)\Big|^p dt . \tag{21}
$$

По неравенству Гельдера имеем

$$
\Big| x_n^{(m-\kappa)}(t_i) - x_n^{(m-\kappa)}(t_{i-1})\Big|^p = \Big| \int_{t_{i-1}}^{t_i} x_n^{(m-\kappa+1)}(\tau)\, d\tau \Big|^p \leq \pi_i^{p-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| x_n^{(m-\kappa+1)}(\tau)\Big|^p d\tau . \tag{22}
$$

Далее, вычитая и прибавляя функцию $g_\kappa(t)$, а затем ис - пользуя известное неравенство $(c+d)^p \leq 2^{p-1}(c^p + d^p), c \geq 0, d \geq 0, p \geq 1$ и неравенство Гельдера, последовательно находим

$$
\delta_i(g_\kappa) \equiv \int_{t_{i-1}}^{t_i - u} \Big| \Phi_i(g_\kappa) - \Phi_{i-1}(g_\kappa)\Big|^p dt = O\Big\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| \Phi_i(g_\kappa) -
$$

$$
- g_\kappa(t)\Big|^p dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| \Phi_{i-1}(g_\kappa) - g_\kappa(t)\Big|^p dt \Big\} =
$$

$$
= O\Big\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| \frac{1}{\pi_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [g_\kappa(\tau) - g_\kappa(t)] d\tau \Big|^p dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| \frac{1}{\pi_{i-1}} \int_{t_{i-2}}^{t_{i-1}} [g_\kappa(\tau) -
$$

$$
- g_\kappa(t)] d\tau \Big|^p dt \Big\} = O\Big\{ \frac{1}{\pi_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| g_\kappa(\tau) - g_\kappa(t)\Big|^p d\tau\, dt + \tag{23}
$$

$$
+ \frac{1}{\pi_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{i-2}}^{t_{i-1}} \Big| g_\kappa(\tau) - g_\kappa(t)\Big|^p d\tau\, dt \Big\} ;
$$

здесь нужно иметь в виду, что при $i = 1$

$$
d_i \equiv \frac{1}{\pi_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{i-2}}^{t_{i-1}} \Big| g_\kappa(\tau) - g_\kappa(t)\Big|^p d\tau\, dt = \frac{1}{\pi_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big| g_\kappa(\tau) - g_\kappa(t)\Big|^p d\tau\, dt
$$

в случае непериодическом и

$$\alpha_i = \frac{1}{\pi_n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} | g_k(\tau) - g_k(t) |^p d\tau\, dt$$

в случае периодическом. Поэтому, учитывая соотношение [II]

$$\int\limits_c^d \int\limits_c^d |f(t)-f(z)|^p dt\, dz = O\left\{ \int\limits_0^{d-c} \omega(f;\tau)_p^p d\tau \right\}, \ f \in L_p(c,d), -\infty \le c < d \le +\infty,$$

оценку (23) можно продолжить (см. также доказательство леммы 2 [7]):

$$\delta_i(g_k) = O\left\{ \frac{1}{\pi_i} \int\limits_0^{\pi_i} \omega(g_k;\tau)_p^p d\tau + \right. \tag{24}$$

$$\left. + \frac{1}{\pi_{i-1}} \int\limits_0^{\pi_{i-1}+\pi_i} \omega(g_k;\tau)_p^p d\tau \right\} = O\left\{ \omega(g_k; 1/n)_p^p \right\}.$$

Объединяя (22), (24) вместе с (2I), получим

$$\gamma_i(z_k) = O\left\{ \omega(g_k; 1/n)_p^p \right\} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} | x_n^{(m-k+1)}(\tau) |^p d\tau . \tag{25}$$

Отметим, что оценка (25) справедлива при каждом фиксированном i, $i=\overline{1,n}$, и k, $k=\overline{1,m}$. Следовательно, подстановка (25) в соотношение (20) позволяет для J_2 вывести оценку:

$$J_2 = O\left\{ n^{(1/p-1)} \cdot \sum_{k=1}^{m} \omega(g_k; 1/n)_p \right\} \| x_n \|_X .$$

Из (I8), (I9) и последней оценки в свою очередь вытекает

$$\| K - K_n \|_{X_n \to Y} = O\left\{ \sum_{k=1}^{m} \omega(g_k; 1/n)_p + \right.$$

$$\left. + n^{(1/p-1)} \cdot \max_t \| g_1(t+\cdot) \|_{L_p(0,\|\Delta_n\|)} + n^{-1} \right\} \to 0, \ n \to \infty .$$

Остальное очевидно.

З а м е ч а н и е. При $p = \infty$, в частности в случае непрерывных коэффициентов уравнения (2), на сетку (3) не нужно накладывать условие (8).

В заключение отметим, что вопросы построения по данному методу полиномиальных приближений для дифференциальных уравнений могут быть рассмотрены аналогично.

Л и т е р а т у р а

1. К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977. - 744 с.

2. М а р ч у к Г. И., А г о ш к о в В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. - М.: Наука, 1981. - 416 с.

3. Г а б д у л х а е в Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. - Казань: Изд-во Казан. ун-та,1980.- 232 с.

4. Л у ч к а А. Ю. Проекционно- итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. - Киев: Наукова думка, 1980. - 264 с.

5. К е р г е Р. М. К оценке погрешности метода подобластей // Ж.вычисл.матем. и матем физ. - 1978. - Т.18. - № 3. - С.628 - 633.

6. Е р м о л а е в а Л. Б. Аппроксимативные свойства полиномиальных операторов и решение интегральных и интегродифференциальных уравнений методом подобластей: Дисс. ... канд. физ.-мат.наук. - Казань, 1987. - 154 с.

7. А г а ч е в Ю. Р. Сходимость метода подобластей и одного "смешанного" метода для интегральных и дифференциальных уравнений. - Казань, 1986. - 49 с. - Рукопись представлена Казан. ун-том. Деп. в ВИНИТИ 22 дек. 1986, № 9039 - В86.

8. С т е ч к и н С. Б., С у б б о т и н Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. - М.: Наука, 1976. - 248 с.

9. З а в ь я л о в Ю. С., К в а с о в Б. И., М и р о ш н и ч е н к о В. Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

10. А г а ч е в Ю. Р. Сплайновые приближения решений интегральных и дифференциальных уравнений: Дисс. ... канд. физ.-мат.наук. - Казань, 1987. - 144 с.

11. У л ь я н о в П. Л. О рядах по системе Хаара // Матем. сб. - 1964. - Т. 63. - № 3. - С.356 - 391.