



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Калинина, Численное исследование обратной экстремальной задачи идентификации младшего коэффициента двумерного эллиптического уравнения, *Дальневост. матем. журн.*, 2005, том 6, номер 1, 57–70

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

17 февраля 2025 г., 16:33:50



© Е.А. Калинина*

Численное исследование обратной экстремальной задачи идентификации младшего коэффициента двумерного эллиптического уравнения

Рассматривается обратная экстремальная задача идентификации младшего коэффициента двумерного эллиптического уравнения в области Ω по дополнительным измерениям в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$. Обсуждаются основные подходы к решению этой проблемы. Развивается и обосновывается вычислительный алгоритм, основанный на двухслойном градиентном методе. Приводятся и анализируются результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: *эллиптическое уравнение, обратная экстремальная задача, идентификация младшего коэффициента, градиентный метод, распространение загрязнений*

Введение

Важнейшей задачей прикладной экологии является задача защиты окружающей среды от антропогенных загрязнений. Решение указанной задачи с помощью метода математического моделирования приводит к необходимости решения обратных задач идентификации неизвестных источников загрязнения и их параметров. Рассматриваемые обратные задачи в ряде случаев удобно формулировать как задачи управления [1–5], т. е. как задачи минимизации определенных функционалов качества на решениях исходной краевой задачи. Параметры, входящие в уравнение переноса загрязнений и граничные условия, являются важными характеристиками процесса распространения примеси, поэтому решение указанных задач играет большую роль в прикладной экологии.

Подчеркнем, что задача идентификации коэффициентов уравнения с частными производными относится к классу нелинейных задач математической физики. Это обстоятельство существенно затрудняет проблему построения вычислительных алгоритмов для приближенного решения обратных коэффициентных задач и сильно осложняет полное и строгое обоснование их сходимости.

Для численного восстановления коэффициентов дифференциальных уравнений используются различные подходы, основанные прежде всего на методах регуляризации [6]. Особого внимания заслуживают также методы параметрической идентификации, связанные с представлением искомого коэффициента в параметрическом виде и с нахождением параметров этого представления. Такой подход, в частности, осуществлен в [7, 8] для восстановления старшего коэффициента нестационарного одномерного нелинейного параболического уравнения теплопроводности. В работе [9] представлен численный алгоритм восстановления

* 692500, г. Уссурийск ул. Некрасова, 35, Уссурийский государственный педагогический институт. Электронная почта: kalinina-e@newmail.ru

коэффициента конвекции двумерного эллиптического уравнения, основанный на применении градиентного метода и алгоритма Ньютона.

Традиционный подход в решении проблем идентификации младшего коэффициента состоит в сведении обратной задачи к интегральному уравнению Вольтерра первого рода с использованием функции Грина прямой задачи. В частности, такой подход был осуществлен в [10] для определения младшего коэффициента одномерного параболического уравнения. Обратная задача определения младшего коэффициента параболического уравнения рассмотрена также в [11], где проведен сравнительный анализ применения для ее численного решения четырех различных конечно-разностных схем. Следует отметить также работы [12, 13], в которых предложены численные алгоритмы решения задачи идентификации младшего коэффициента двумерного эллиптического уравнения в ограниченной области, основанные на использовании двухслойного градиентного метода и квазиньютоновского алгоритма соответственно. В работе [14] также представлен численный алгоритм решения экстремальной задачи идентификации младшего коэффициента для эллиптического уравнения переноса примеси, основанный на подходе, впервые примененном в работе [15].

Целью настоящей работы является разработка численного алгоритма решения обратной экстремальной задачи идентификации младшего коэффициента двумерного эллиптического уравнения, рассматриваемого в ограниченной прямоугольной области Ω по дополнительным измерениям в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$. Предлагаемый численный алгоритм для приближенного решения обратной задачи основан на применении двухслойного градиентного метода, сходимость которого исследуется в работе. Данный численный алгоритм сводит решение обратной задачи к многократному решению соответствующих прямой и “сопряженной” задач на каждом итерационном шаге для рассматриваемого уравнения. В работе также приводятся и анализируются результаты проведенных вычислительных экспериментов.

1. Постановка прямой задачи

Пусть Ω -прямоугольная область: $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$. Рассмотрим в области Ω задачу нахождения концентрации φ загрязняющего вещества из соотношений

$$-\lambda \Delta \varphi + \kappa \varphi = f, \quad (1)$$

$$\varphi(x, y) |_{\Gamma} = \psi. \quad (2)$$

Здесь $\lambda = \text{const} > 0$, $\kappa \geq 0$ — величина, характеризующая распад загрязняющего вещества за счет химических реакций, f — плотность объемных источников.

При изучении краевой задачи (1), (2) и обратной экстремальной задачи для уравнения (1) будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает либо область Ω , либо границу Γ , либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$. При $s = 0$ получаем пространство $H^0(D) = L^2(D)$. Нормы в пространствах $H^s(\Omega)$, $H^s(\Gamma)$ и их векторных аналогах будем обозначать через $\|\cdot\|_{s,\Omega} \equiv \|\cdot\|_s$ и $\|\cdot\|_{s,\Gamma}$. При $s = 0$ полагаем $\|\psi\|_{0,\Omega} = \|\psi\|$, $\|\psi\|_{0,\Gamma} = \|\psi\|_{\Gamma}$. Скалярное произведение в $L^2(\Omega)$ либо в $L^2(\Gamma)$ будем обозначать через (\cdot, \cdot) либо $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$. Через $\|\cdot\|_1$ и $|\cdot|_1$ будем обозначать норму и полунорму в $H^1(\Omega)$. Отношение двойственности между пространством X и двойственным к нему X^* будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^* \times X}$ либо просто $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Положим $L_+^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : q \geq 0\}$. Через $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ обозначим оператор следа, через $R_{\gamma} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega)$ — правый обратный оператор к γ , с которым выполняется соотношение $\gamma R_{\gamma} \psi = \psi$ для всех $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Введем основное для дальнейших рассмотрений функциональное пространство $\mathcal{T} = H_0^1(\Omega) \equiv \{S \in H^1(\Omega) : S = 0 \text{ на } \Gamma\}$, являющееся гильбертовым с нормой

$\|\cdot\|_{\mathcal{T}} = \|\cdot\|_1$, эквивалентной полунорме $|\cdot|_1$ в силу неравенства Фридрикса — Пуанкаре $|\nabla S|^2 \geq \alpha_1 \|S\|_1^2 \quad \forall S \in \mathcal{T}, \alpha_1 = \text{const} > 0$. Через $\mathcal{T}^* \equiv H^{-1}(\Omega)$ обозначим пространство, двойственное к \mathcal{T} относительно пространства $L^2(\Omega)$. Введем билинейные формы $a, a_1 : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, где

$$a_1(\varphi, \eta) = \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \eta d\Omega, \quad a(\varphi, \eta) = \lambda a_1(\varphi, \eta) + (\kappa \varphi, \eta). \quad (3)$$

Предположим, что выполняются условия:

- (i) $f \in \mathcal{T}^*, \psi \in H^{1/2}(\Gamma)$;
- (ii) $\kappa \in L_+^2(\Omega)$.

Умножим уравнение (1) на функцию $S \in \mathcal{T}$ и проинтегрируем по области Ω . Используя формулу интегрирования по частям, приходим к следующей вариационной формулировке задачи (1), (2):

$$a(\varphi, S) = \langle f, S \rangle, \quad \varphi|_{\Gamma} = \psi \text{ на } \Gamma. \quad (4)$$

В дальнейшем будем ссылаться на (1), (2) как на задачу 1.

Слабым решением задачи 1 будем называть функцию $\varphi \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую соотношениям (4).

Простой анализ показывает, что билинейная форма a , определенная в (3), непрерывна на $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ и коэрцитивна на \mathcal{T} с константой $\lambda_* = \lambda \alpha_1$. Последнее означает, что $a(\eta, \eta) \geq \lambda_* \|\eta\|_1^2$ для всех $\eta \in \mathcal{T}$. В таком случае из теоремы Лакса-Мильграма [16] следует, что решение $\varphi \in H^1(\Omega)$ задачи (4) существует и единственно, причем выполняется следующая оценка:

$$\|\varphi\|_1 \leq M_{\varphi} \equiv (1/\lambda_*) [\|f\|_{\mathcal{T}^*} + C_{\gamma}(\lambda_* + \lambda + C_0 \|\kappa\|)] \|\psi\|_{1/2, \Gamma}. \quad (5)$$

Здесь $C_{\gamma} = \|R_{\gamma}\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma), H^1(\Omega))}$ — норма оператора R_{γ} , C_0 — константа, входящая в оценку

$$|(\kappa \varphi, \eta)| \leq C_0 \|\kappa\| \|\varphi\|_1 \|\eta\|_1 \quad \forall \kappa \in L^2(\Omega), (\varphi, \eta) \in H^1(\Omega)^2. \quad (6)$$

Поставим в соответствие задаче 1 оператор, представляющий собой пару

$$(A, \gamma) : X \rightarrow Y, \quad X = H^1(\Omega), \quad Y = (\mathcal{T}^*, H^{1/2}(\Gamma)), \quad (7)$$

состоящую из оператора $A : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{T}^*$, действующего по формуле

$$\langle A\varphi, \eta \rangle_{\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}} = a(\varphi, \eta) \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad \eta \in \mathcal{T}, \quad (8)$$

и оператора следа $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$. Из свойств формы a и оператора γ вытекает, что оператор $A|_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^*$ — изоморфизм, а оператор (7) линеен, непрерывен, обратим и сюръективен. В таком случае из теоремы Банаха о существовании обратного оператора [17, с. 134] следует, что оператор (7) непрерывно обратим и осуществляет изоморфизм. Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (i)–(ii). Тогда: 1) билинейная форма $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и \mathcal{T} — коэрцитивна с константой $\lambda_* = \lambda \alpha_1 > 0$; 2) для любой функции $\kappa \in L_+^2(\Omega)$ задача 1 имеет единственное слабое решение $\varphi \in H^1(\Omega)$ и справедлива оценка (5); 3) оператор (7), (8) осуществляет линейный непрерывный изоморфизм.

2. Постановка и разрешимость обратной задачи

Рассмотрим в этом разделе обратную задачу, в которой неизвестной помимо концентрации φ является и величина κ , характеризующая распад загрязняющего вещества за счет химических реакций. В качестве дополнительной информации о решении будем использовать значения φ_d концентрации φ , которые соответствуют заданию поля концентраций, создаваемого источником в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$.

Решение рассматриваемой обратной задачи можно свести к решению экстремальной задачи при соответствующем выборе функционала качества J и управления. В качестве управления выберем функцию κ , которую будем искать в некотором множестве K , причем будем предполагать, что выполняется следующее условие:

(iii) $K \subset L^2_+(\Omega)$ — непустое замкнутое выпуклое множество.

Введем функционал качества $\tilde{J} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$\tilde{J}(\varphi) = \frac{1}{2} \|\varphi - \varphi_d\|_{L^2(Q)}^2 = \frac{1}{2} \int_Q |\varphi - \varphi_d|^2 d\Omega \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} r(\varphi - \varphi_d)^2 d\Omega. \quad (9)$$

Здесь $\varphi_d \in L^2(Q)$ — заданная в подобласти $Q \subset \Omega$ функция, $r = \chi_Q$ — характеристическая функция множества Q . Положим

$$J(\varphi, \kappa) = \tilde{J}(\varphi) + \frac{\mu}{2} \|\kappa\|^2, \quad \|\kappa\| = \|\kappa\|_{L^2(\Omega)}, \quad (10)$$

где μ — неотрицательная константа. Рассматривая функционал J на слабых решениях задачи 1, запишем ограничение, имеющее вид ее слабой формулировки (4), в виде

$$F(\varphi, \kappa) = 0. \quad (11)$$

Здесь оператор $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \rightarrow Y \equiv \mathcal{T}^* \times H^{1/2}(\Gamma)$ действует по формулам

$$\langle F_1(\varphi, \kappa), S \rangle_{\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}} = \langle A\varphi, S \rangle_{\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}} - \langle f, S \rangle \equiv a(\varphi, S) - \langle f, S \rangle \quad \forall S \in \mathcal{T}, \quad F_2(\varphi, \kappa) = \gamma\varphi - \psi. \quad (12)$$

С учетом введенных обозначений перепишем сформулированную выше обратную задачу в виде следующей экстремальной задачи:

$$J(\varphi, \kappa) \rightarrow \inf, \quad F(\varphi, \kappa) = 0, \quad (\varphi, \kappa) \in H^1(\Omega) \times K. \quad (13)$$

Ясно, что функционал \tilde{J} слабо полунепрерывен снизу. Отсюда и теоремы 1 вытекает следующий результат.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (i), (iii), причем $\mu > 0$ либо $\mu \geq 0$ и K — ограниченное множество. Тогда задача (13) имеет по крайней мере одно решение $(\varphi, \kappa) \in H^1(\Omega) \times K$.

Выведем необходимые условия оптимальности для задачи (13). Для этого аналогично [1–4] воспользуемся экстремальным принципом в гладко-выпуклых задачах условной минимизации [16]. Предварительно вычислим производную Фреше F'_φ по φ от оператора F . Легко проверить, что указанная производная Фреше в каждой точке $(\hat{\varphi}, \hat{\kappa}) \in H^1(\Omega) \times K$ представляет собой линейный непрерывный оператор

$$F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{\kappa}) \equiv (F'_{1\varphi}(\hat{\varphi}, \hat{\kappa}), F'_{2\varphi}(\hat{\varphi}, \hat{\kappa})) = (\hat{A}, \gamma) : H^1(\Omega) \rightarrow Y, \quad (14)$$

где оператор $\hat{A} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{T}^*$ действует по формуле

$$\langle \hat{A}\tau, S \rangle = \hat{a}(\tau, S) \equiv \lambda a_1(\tau, S) + \langle \hat{\kappa}\tau, S \rangle, \quad \forall \tau \in H^1(\Omega), S \in \mathcal{T}. \quad (15)$$

Обозначим через $Y^* = \mathcal{T} \times H^{-1/2}(\Gamma)$, где $H^{-1/2}(\Gamma) = H^{1/2}(\Gamma)^*$, двойственное пространство к пространству Y . Положим $\mathbb{R}^+ = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 0\}$. В соответствии с общей теорией экстремальных задач [16] введем в рассмотрение множитель Лагранжа (λ_0, y^*) , где $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$, $y^* = (\eta, \zeta) \in Y^*$, причем элемент $\eta \in \mathcal{T}$ имеет смысл “сопряженной” концентрации, и лагранжиан $\mathcal{L} : H^1(\Omega) \times K \times \mathbb{R}^+ \times Y^* \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$\mathcal{L}(\varphi, \kappa, \lambda_0, \eta, \zeta) \equiv \lambda_0 J(\varphi, \kappa) + \langle F_1(\varphi, \kappa), \eta \rangle_{\mathcal{T}^* \times \mathcal{T}} + \langle \zeta, F_2(\varphi, \kappa) \rangle_{\Gamma}. \quad (16)$$

Поскольку множество $F(\varphi, K)$ является выпуклым подмножеством пространства Y , а оператор $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{\kappa}) \equiv (\hat{A}, \gamma) : X \rightarrow Y$ является изоморфизмом в силу теоремы 1, то из [16, с. 79] вытекает нижеследующая теорема.

Теорема 3. Пусть при выполнении условий (i), (iii) пара $(\hat{\varphi}, \hat{\kappa}) \in H^1(\Omega) \times K$ является элементом, на котором достигается локальный минимум в задаче (13). Тогда существует ненулевой множитель Лагранжа $(\lambda_0, y^*) = (\lambda_0, \hat{\eta}, \hat{\zeta}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{T} \times H^{-1/2}(\Gamma)$ такой, что справедливо уравнение Эйлера – Лагранжа

$$F'^*_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{\kappa})y^* + \lambda_0 J'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{\kappa}) = 0 \quad \text{в } X^*, \quad (17)$$

и выполняется принцип минимума

$$\mathcal{L}(\hat{\varphi}, \hat{\kappa}, \lambda_0, y^*) \leq \mathcal{L}(\hat{\varphi}, \kappa, \lambda_0, y^*) \quad \forall \kappa \in K. \quad (18)$$

Из изоморфизма оператора $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{\kappa})$ и (17) вытекает, что $\lambda_0 \neq 0$. В таком случае можно считать, что $\lambda_0 = 1$, а соотношения (17) и (18) можно переписать в виде

$$\lambda a(\tau, \hat{\eta}) + \langle \hat{\kappa}\tau, \hat{\eta} \rangle + \langle \hat{\zeta}, \tau \rangle_{\Gamma} = -\langle r(\hat{\varphi} - \varphi_d), \tau \rangle \quad \forall \tau \in X, \quad (19)$$

$$(\hat{\kappa} - \kappa, \hat{\varphi}\eta + \frac{\mu}{2}(\kappa + \hat{\kappa})) \equiv \int_{\Omega} (\hat{\kappa} - \kappa)[\hat{\varphi}\eta + \frac{\mu}{2}(\kappa + \hat{\kappa})]d\Omega \leq 0 \quad \forall \kappa \in K. \quad (20)$$

Ниже на (19) формально будем ссылаться как на “сопряженную” задачу. Подчеркнем, что прямая задача (4), сопряженная задача (19) и неравенство (20) представляют собой систему оптимальности, описывающую необходимые условия оптимальности для задачи управления (13).

Отметим, что функционал J в (10), зависящий от двух переменных φ и κ , можно переписать с учетом зависимости $F(\varphi, k) = 0$ между φ и k в виде функционала I , зависящего только от функции κ и определяемого формулой

$$I(\kappa) \equiv J(\varphi_\kappa, \kappa) = \frac{1}{2} \|r(\varphi(\kappa) - \varphi_d)\|^2 + \frac{\mu}{2} \|\kappa\|^2. \quad (21)$$

Здесь $\varphi_\kappa = \varphi(\kappa)$ обозначает единственное решение исходной задачи (4), отвечающее функции $\kappa \in K$. Ясно, что задача (13) эквивалентна задаче минимизации функционала $I(\kappa)$ на множестве K , т. е. задаче

$$I(\kappa) \rightarrow \inf, \quad \kappa \in K. \quad (22)$$

Ниже нам потребуется выражение разности $I(k) - I(\hat{\kappa})$ значений функционала I для произвольной пары $\kappa, \hat{\kappa} \in K$. Для вывода этого выражения обозначим через $\hat{\varphi} = \varphi(\hat{\kappa}) \in H^1(\Omega)$ и $\hat{\eta} = \eta(\hat{\kappa}) \equiv \eta(\hat{\kappa}, \hat{\varphi}) \in \mathcal{T}$, $\hat{\zeta} = \zeta(\hat{\kappa}) \equiv \zeta(\hat{\kappa}, \hat{\varphi}) \in H^{-1/2}(\Gamma)$ решения следующих прямой и сопряженной задач:

$$\lambda(\nabla \hat{\varphi}, \nabla S) + \langle \hat{\kappa}\hat{\varphi}, S \rangle = \langle f, S \rangle \quad \forall S \in \mathcal{T}, \quad \hat{\varphi}|_{\Gamma} = \psi, \quad (23)$$

$$\lambda(\nabla\hat{\eta}, \nabla\tau) + (\hat{\kappa}\hat{\eta}, \tau) + \langle \hat{\zeta}, \tau \rangle_{\Gamma} = -(r(\hat{\varphi} - \varphi_d), \tau) \quad \forall \tau \in H^1(\Omega), \quad \hat{\eta}|_{\Gamma} = 0. \quad (24)$$

Из (23) и (4) следует, что разность $\varphi - \hat{\varphi} \equiv \varphi(\kappa) - \varphi(\hat{\kappa})$ удовлетворяет соотношению

$$\lambda(\nabla(\varphi - \hat{\varphi}), \nabla S) + (\kappa\varphi - \hat{\kappa}\hat{\varphi}, S) = 0 \quad \forall S \in \mathcal{T}, \quad (25)$$

которое перепишем с учетом равенства $\kappa\varphi - \hat{\kappa}\hat{\varphi} = \hat{\kappa}(\varphi - \hat{\varphi}) + (\kappa - \hat{\kappa})\varphi$ в виде

$$\lambda(\nabla(\varphi - \hat{\varphi}), \nabla S) + (\hat{\kappa}(\varphi - \hat{\varphi}), S) = -((\kappa - \hat{\kappa})\varphi, S) \quad \forall S \in \mathcal{T}. \quad (26)$$

В частности, при $S = \hat{\eta}$ соотношение (26) принимает вид

$$\lambda(\nabla(\varphi - \hat{\varphi}), \nabla\hat{\eta}) + (\hat{\kappa}(\varphi - \hat{\varphi}), \hat{\eta}) = -((\kappa - \hat{\kappa})\varphi, \hat{\eta}). \quad (27)$$

Положим далее в (24) $\tau = (\varphi - \hat{\varphi}) \in \mathcal{T}$. Получим

$$\lambda(\nabla\hat{\eta}, \nabla(\varphi - \hat{\varphi})) + (\hat{\kappa}\hat{\eta}, \varphi - \hat{\varphi}) = -(r(\hat{\varphi} - \varphi_d), \varphi - \hat{\varphi}). \quad (28)$$

Сравнивая (27) и (28), выводим, что

$$(r(\hat{\varphi} - \varphi_d), \varphi - \hat{\varphi}) = ((\kappa - \hat{\kappa})\varphi, \hat{\eta}). \quad (29)$$

С помощью равенства (29) легко доказывается следующая лемма:

Лемма 1. *Для любой пары $\kappa, \hat{\kappa} \in K$ выполняется соотношение*

$$I(\kappa) - I(\hat{\kappa}) = \frac{\mu}{2}\|\kappa - \hat{\kappa}\|^2 + \frac{1}{2}\|r(\varphi(\kappa) - \varphi(\hat{\kappa}))\|^2 + \mu(\hat{\kappa}, \kappa - \hat{\kappa}) + ((\kappa - \hat{\kappa})\varphi(\kappa), \eta(\hat{\kappa}, \hat{\varphi})). \quad (30)$$

Доказательство. Учитывая (21), легко выводим, что

$$\begin{aligned} I(\kappa) - I(\hat{\kappa}) &= \frac{\mu}{2}(\|\kappa\|^2 - \|\hat{\kappa}\|^2) + \frac{1}{2}(\|r(\varphi - \varphi_d)\|^2 - \|r(\hat{\varphi} - \varphi_d)\|^2) = \\ &= \frac{\mu}{2}\|\kappa - \hat{\kappa}\|^2 + \mu(\hat{\kappa}, \kappa - \hat{\kappa}) + \frac{1}{2}\|r(\varphi - \hat{\varphi})\|^2 + (r(\hat{\varphi} - \varphi_d), \varphi - \hat{\varphi}), \quad \varphi = \varphi(\kappa), \hat{\varphi} = \varphi(\hat{\kappa}). \end{aligned} \quad (31)$$

Используя (29), отсюда приходим к (30).

Положим далее в (26) $S = \varphi - \hat{\varphi}$. Используя оценку (6) и неравенство Фридрихса-Пуанкаре, выводим, что

$$\lambda_*\|\varphi - \hat{\varphi}\|_1^2 \leq \lambda\|\nabla(\varphi - \hat{\varphi})\|^2 \leq C_0\|\kappa - \hat{\kappa}\|\|\varphi\|_1\|\varphi - \hat{\varphi}\|_1.$$

Отсюда и теоремы 1, согласно которой $\|\varphi\|_1 \leq M_\varphi$, вытекает оценка

$$\|\varphi - \hat{\varphi}\|_1 \leq C_1\|\kappa - \hat{\kappa}\|, \quad C_1 = C_0M_\varphi/\lambda_*. \quad (32)$$

Точно так же, полагая в (24) $\tau = \hat{\eta}$ и используя неравенство Фридрихса-Пуанкаре и ту же теорему 1, в силу которой $\|\hat{\varphi}\|_1 \leq M_\varphi$, выводим, что

$$\lambda_*\|\hat{\eta}\|_1^2 \leq \|\varphi - \varphi_d\|\|\hat{\eta}\| \leq (M_\varphi + \|\varphi_d\|_{L^2(Q)})\|\hat{\eta}\|_1.$$

Отсюда приходим к следующей оценке для $\|\hat{\eta}\|_1$:

$$\|\hat{\eta}\|_1 \leq C_2 = (M_\varphi + \|\varphi_d\|_{L^2(Q)})/\lambda_*. \quad (33)$$

Сформулируем полученные результаты в виде леммы

Лемма 2. Пусть при выполнении условий (i), (ii) $\varphi(\kappa)$, $\hat{\varphi} = \varphi(\hat{\kappa})$ и $\hat{\eta} = \eta(\hat{\kappa})$ — решения задач (4), (23) и (24), где $\kappa \in K$ и $\hat{\kappa} \in K$. Тогда справедливы оценки (32), (33).

Докажем теперь, что функционал $I(\kappa)$ является дифференцируемым по Гато.

Теорема 4. Производная Гато от функционала I в любой точке $\hat{\kappa} \in K$ в направлении вектора $h \in L^2(\Omega)$ существует и определяется формулой

$$\langle I'(\hat{\kappa}), h \rangle = (\mu\hat{\kappa} + \varphi(\hat{\kappa})\eta(\hat{\kappa}), h). \quad (34)$$

Доказательство. Положим $\kappa = \hat{\kappa} + th$ с $t \in [0, 1]$, где $h \in L^2(\Omega)$ и t выберем так, чтобы полученный элемент κ снова принадлежал множеству управлений K . Используя лемму 1, тогда имеем

$$\begin{aligned} I(\hat{\kappa} + th) - I(\hat{\kappa}) &= \\ &= \frac{\mu}{2} \|\hat{\kappa} + th - \hat{\kappa}\|^2 + \frac{1}{2} \|r(\varphi(\hat{\kappa} + th) - \varphi(\hat{\kappa}))\|^2 + \mu(\hat{\kappa}, \hat{\kappa} + th - \hat{\kappa}) + ((\hat{\kappa} + th - \hat{\kappa})\varphi(\hat{\kappa} + th), \eta(\hat{\kappa})) = \\ &= \frac{\mu}{2} t^2 \|h\|^2 + \frac{1}{2} \|r(\varphi(\hat{\kappa} + th) - \varphi(\hat{\kappa}))\|^2 + \mu t(\hat{\kappa}, h) + t(h\varphi(\hat{\kappa} + th), \eta(\hat{\kappa})). \end{aligned} \quad (35)$$

Из (35) выводим, что

$$\frac{1}{t} (I(\hat{\kappa} + th) - I(\hat{\kappa})) = \frac{\mu}{2} t \|h\|^2 + \frac{1}{2t} \|r(\varphi(\hat{\kappa} + th) - \varphi(\hat{\kappa}))\|^2 + \mu(\hat{\kappa}, h) + (h\varphi(\hat{\kappa} + th), \eta(\hat{\kappa})). \quad (36)$$

Переходя в (36) к пределу при $t \rightarrow 0$, приходим с учетом непрерывной зависимости φ от κ , вытекающей из леммы 2, к соотношению

$$\langle I'(\hat{\kappa}), h \rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(\hat{\kappa} + th) - I(\hat{\kappa})}{t} = \mu(\hat{\kappa}, h) + (h\varphi(\hat{\kappa}), \eta(\hat{\kappa})) = (\mu\hat{\kappa} + \varphi(\hat{\kappa})\eta(\hat{\kappa}), h).$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы.

3. Численный алгоритм решения обратной задачи

Для численного решения задачи (13) будем использовать двухслойный градиентный итерационный метод, в соответствии с которым уточнение κ_n проводится по схеме

$$\kappa_n = P(\kappa_{n-1} - s_n I'(\kappa_{n-1})), \quad n = 1, 2, \dots \quad (37)$$

Здесь $P : L^2(\Omega) \rightarrow K$ — оператор проектирования на множество K , n — номер итерации, s_n — итерационный параметр, $I'(\hat{\kappa})$ — градиент функционала I , определяемый в каждой точке $\hat{\kappa} \in K$ формулой (34), где $\hat{\varphi} = \varphi(\hat{\kappa})$ и $\hat{\eta} = \eta(\hat{\kappa})$ — решения прямой и сопряженной задач (23), (24). Формулы (37) и (34) лежат в основе используемого в данной работе численного алгоритма решения задачи (13), который состоит из следующих этапов:

- 1) выбираем начальное приближение $\kappa_0 \in K$ и полагаем $n = 1$;
- 2) вычисляем концентрацию $\varphi_n \equiv \varphi(\kappa_{n-1})$ путем численного решения прямой задачи

$$-\lambda \Delta \varphi_n + \kappa_{n-1} \varphi_n = f, \quad \varphi_n|_{\Gamma} = \psi \quad (38)$$

при выбранном κ_{n-1} ;

- 3) вычисляем сопряженную концентрацию $\eta_n = \eta(\kappa_{n-1}) \equiv \eta(\kappa_{n-1}, \varphi_n)$ путем решения сопряженной задачи

$$-\lambda \Delta \eta_n + \kappa_{n-1} \eta_n = -r(\varphi_n - \varphi_d), \quad \eta_n|_{\Gamma} = 0 \quad (39)$$

при выбранном κ_{n-1} , вычисленной выше концентрации φ_n и заданной функции φ_d ;
 4) вычисляем градиент g_n функционала I в точке k_{n-1} по формуле

$$g_n \equiv I'(k_{n-1}) = \mu\kappa_{n-1} + \varphi_n\eta_n; \quad (40)$$

5) вычисляем новое приближение k_n по формуле

$$\kappa_n = P(\kappa_{n-1} - s_n g_n), \quad (41)$$

где s_n определяется как решение задачи минимизации $I(P(\kappa_{n-1} - s g_n)) \rightarrow \inf (s > 0)$;

6) выходим из цикла, выбирая за искомое решение задачи (13) пару (k_n, φ_n) , или полагаем $n = n + 1$ и переходим к этапу 2.

Исследуем некоторые вопросы сходимости описанного градиентного метода.

Теорема 5. *Если $g_n \neq 0$, то g_n является направлением спуска для $I(\kappa_{n-1})$ и существует такое число I_0 , что*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(\kappa_n) = I_0. \quad (42)$$

Доказательство. В силу формулы (41) для доказательства теоремы достаточно доказать существование такого числа $s > 0$, что

$$I(\kappa_n) = I(P(\kappa_{n-1} - s g_n)) < I(\kappa_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (43)$$

Считая для простоты, что $(k_{n-1} - s g_n) \in K$, так что $P(\kappa_{n-1} - s g_n) = k_{n-1} - s g_n$, и используя лемму 1 при $\hat{\kappa} = \kappa_{n-1}$ и $\kappa = \kappa_{n-1} - s g_n$, имеем:

$$\begin{aligned} I(\kappa_{n-1} - s g_n) - I(\kappa_{n-1}) &= \frac{\mu}{2} s^2 \|g_n\|^2 + \frac{1}{2} \|r(\varphi(\kappa_{n-1} - s g_n) - \varphi(\kappa_{n-1}))\|^2 - \mu s (k_{n-1}, g_n) - \\ &- s(\varphi(k_{n-1} - s g_n)\eta(k_{n-1}), g_n) = \frac{\mu}{2} s^2 \|g_n\|^2 + \frac{1}{2} \|r(\varphi(\kappa_{n-1} - s g_n) - \varphi(\kappa_{n-1}))\|^2 - \\ &- s(g_n, \eta(\kappa_{n-1})(\varphi(\kappa_{n-1} - s g_n) - \varphi(\kappa_{n-1}))) - s(g_n, \varphi(\kappa_{n-1})\eta(\kappa_{n-1}) + \mu\kappa_{n-1}). \end{aligned} \quad (44)$$

Используя лемму 2 и соотношение (6), выводим, что

$$\begin{aligned} \|r(\varphi(\kappa_{n-1} - s g_n) - \varphi(\kappa_{n-1}))\|^2 &\leq C_1^2 \|\kappa_{n-1} - s g_n - \kappa_{n-1}\|^2 = C_1^2 s^2 \|g_n\|^2, \\ |(g_n, \eta(\kappa_{n-1})(\varphi(\kappa_{n-1} - s g_n) - \varphi(\kappa_{n-1})))| &\leq \\ \leq C_0 \|g_n\| \|\eta(\kappa_{n-1})\|_1 \|\varphi(\kappa_{n-1} - s g_n) - \varphi(\kappa_{n-1})\|_1 &\leq C_3 s \|g_n\|^2, \quad C_3 = C_0 C_1 C_2. \end{aligned} \quad (45)$$

Из (44) и (45) следует с учетом (41), что

$$\begin{aligned} I(\kappa_{n-1} - s g_n) - I(\kappa_{n-1}) &\leq \frac{\mu}{2} s^2 \|g_n\|^2 + \frac{1}{2} C_1^2 s^2 \|g_n\|^2 + C_3 s^2 \|g_n\|^2 - s \|g_n\|^2 = \\ &= \left(\frac{\mu}{2} + \frac{1}{2} C_1^2 + C_3\right) s^2 \|g_n\|^2 - s \|g_n\|^2 = (\beta s^2 - s) \|g_n\|^2, \end{aligned} \quad (46)$$

где $\beta = (\mu + C_1^2)/2 + C_3$. Выбирая s из промежутка $(0, 1/\beta)$ и учитывая, что $g_n \neq 0$, из (46) легко получаем, что $I(\kappa_n) = I(\kappa_{n-1} - s g_n) < I(\kappa_{n-1})$.

В общем случае, когда $(\kappa_{n-1} - s g_n) \notin K$, соотношение (43) доказывается по аналогичной схеме с использованием свойства липшицевости оператора проектирования P . Таким образом, при указанном выше выборе значения параметра s последовательность $I(\kappa_n)$ при $n \rightarrow \infty$ является неотрицательной убывающей последовательностью. Отсюда следует существование такого числа I_0 , что выполняется соотношение (42).

Теорема 6. Градиенты g_n удовлетворяют условию $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|^2 < \infty$, так что, в частности, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 0$.

Доказательство. Используя (46) при $s = 1/(2\beta)$, заключаем, что

$$I(\kappa_n) - I(\kappa_{n-1}) \leq \|g_n\|^2 \left(\frac{1}{4\beta} - \frac{1}{2\beta} \right) = -\frac{1}{4\beta} \|g_n\|^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Просуммируем обе части последнего неравенства по n от 1 до N . В результате получим

$$\sum_{n=1}^N (I(\kappa_n) - I(\kappa_{n-1})) \leq -\frac{1}{4\beta} \sum_{n=1}^N \|g_n\|^2.$$

Из этого неравенства приходим к соотношению

$$I(\kappa_N) + \frac{1}{4\beta} \sum_{n=1}^N \|g_n\|^2 \leq I(\kappa_0).$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы.

4. Сеточная аппроксимация обратной задачи

Рассмотрим в этом разделе сеточную аппроксимацию обратной экстремальной задачи (13). Введем в области Ω равномерную по каждому направлению сетку $\bar{\omega}$ с шагами h_α , $\alpha = 1, 2$, полагая

$$\bar{\omega} = \{(x, y) : x = ih_1, y = jh_2, i = 0, 1, \dots, N_1, j = 0, 1, \dots, N_2\}, \quad \omega = \bar{\omega} \setminus \partial\bar{\omega}.$$

Здесь $\partial\bar{\omega}$ обозначает множество граничных узлов. Как обычно, значения произвольной функции $\phi(x, y)$ в узлах (x_i, y_j) сетки $\bar{\omega}$ будем обозначать через ϕ_{ij} .

Для внутренних узлов определим двумерный стандартный разностный оператор Лапласа Λ на пятиточечном шаблоне, полагая $\Lambda\varphi = \varphi_{\bar{x}x} + \varphi_{\bar{y}y}$, и поставим в соответствие исходной краевой задаче (1),(2) и сопряженной краевой задаче (19) следующие разностные задачи Дирихле:

$$[-\lambda\Lambda\varphi + \kappa\varphi]_{ij} = f_{ij}, \quad i = 1, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, \dots, N_2 - 1, \quad (47)$$

$$\varphi_{0,j} = \psi_{0,j}, \quad \varphi_{i,0} = \psi_{i,0}, \quad \varphi_{N_1,j} = \psi_{N_1,j}, \quad \varphi_{i,N_2} = \psi_{i,N_2}, \quad i = 1, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, \dots, N_2 - 1, \quad (48)$$

$$[-\lambda\Lambda\eta + \kappa\eta]_{ij} = -r_{ij}(\varphi_{ij} - \varphi_{ij}^d), \quad i = 1, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, \dots, N_2 - 1, \quad (49)$$

$$\eta_{0,j} = \eta_{i,0} = \eta_{N_1,j} = \eta_{i,N_2} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1. \quad (50)$$

В таком случае разностный аналог представленного в разд. 4 алгоритма принимает следующий вид:

1) выбираем начальное приближение κ_{ij}^0 , $i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$, $j = 1, 2, \dots, N_2 - 1$ и полагаем $n = 1$;

2) вычисляем сеточную концентрацию φ_{ij}^n во внутренних узлах сетки $\bar{\omega}$ на n -й итерации путем решения сеточной задачи (47),(48) при $\kappa = \kappa^{n-1}$;

3) вычисляем сеточную сопряженную концентрацию η_{ij}^n во внутренних узлах сетки $\bar{\omega}$ на n -й итерации путем решения сеточной сопряженной задачи (49),(50) при $\kappa = \kappa^{n-1}$, $\varphi = \varphi^{n-1}$;

4) вычисляем сеточный градиент g_n функционала I по формуле $g_{ij}^n = \mu k_{ij}^{n-1} + \varphi_{ij}^n \eta_{ij}^n$;

5) Вычисляем новое приближение κ_n по формуле $\kappa_{ij}^n = [P_h(\kappa^{n-1} - sg^n)]_{ij}$ при определенном, не зависящем от n значении s , где P_h — сеточный аналог оператора P ;

6) выходим из цикла, принимая за искомое приближенное решение задачи (13) сеточные функции κ^n и φ^n , или полагаем $n = n + 1$ и переходим к шагу 2.

Следует отметить, что вычислительные эксперименты проводились в рамках простейшего варианта градиентного метода, т. е. метода простой итерации, когда параметр s_n является постоянным на каждом итерационном шаге. В качестве критерия выхода из цикла использовалась одно из двух условий:

$$\int_Q |\varphi_n - \varphi_d|^2 d\Omega < 10^{-5} \quad \text{либо} \quad |I(\kappa_n) - J(\kappa_{n-1})| < 10^{-8}. \quad (51)$$

5. Обсуждение результатов численных экспериментов

Проанализируем в этом разделе результаты численных экспериментов, полученные путем решения модельных обратных задач. Программирование осуществлялось в среде инженерных и научных расчетов MATLAB 6.5 на персональном компьютере PIV-2400.

В соответствии с концепцией квазиреального эксперимента сначала численно решалась прямая задача, описываемая соотношениями (47),(48), при заданных функциях f, ψ и заданном коэффициенте $\kappa = \kappa_d$. В результате расчетов определялись значения $\varphi^n(x_i, y_j)$ сеточного решения прямой задачи (47),(48) во всех узлах $(x_i, y_j) \in \Omega, i = 1, \dots, N_1 - 1, j = 1, \dots, N_2 - 1$. Далее проводилось возмущение сеточной функции φ_n случайными погрешностями в соответствии с формулой

$$\varphi_\delta = \varphi_n + 2\delta(\sigma^n - 1/2). \quad (52)$$

Здесь σ^n — случайная функция, равномерно распределенная на интервале $[0,1]$, а величина δ задает уровень погрешности. Затем решалась обратная задача восстановления младшего коэффициента уравнения — параметра κ , в которой в качестве дополнительной информации о решении φ_d в подобласти $Q \subset \Omega$ использовалась функция (52).

В соответствии с методом, изложенным в разд. 4, 5, выбиралось начальное приближение κ_0 , затем на каждом итерационном шаге находилось решение φ_n сеточной задачи (47), (48) при заданном приближении κ_{n-1} для κ . Далее на этом же итерационном шаге решалась сопряженная сеточная задача (49),(50) с использованием найденных значений решения φ_n прямой задачи, этого же приближения κ_{n-1} для κ и значений заданной функции φ_d . Каждая из указанных двух задач имеет вид системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с пятидиагональной симметричной матрицей. Для решения СЛАУ применялся метод сопряженных градиентов (CG) из пакета прикладных программ LINPACK, встроенный в среду MATLAB. Далее, в соответствии с этапами 4 и 5 предложенного алгоритма, вычислялось значение градиента g_n и находилось новое приближение κ_n для κ . Затем осуществлялся переход на новый итерационный шаг или происходил выход из итерационного цикла. В последнем случае за искомое решение принималась пара (κ_n, φ_n) , вычисленная на последнем итерационном шаге.

Для численного решения задачи использовалась равномерная по x и y сетка при $N_1 = N_2 = 20$. В качестве исходных данных выбирались следующие функции:

$$\lambda = 1, \quad f(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad \psi(x, y) = 1 + x, \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (53)$$

Был проведен ряд вычислительных экспериментов по идентификации младшего коэффициента κ уравнения (1), в которых искомый коэффициент являлся константой, функцией, зависящей от одной переменной x или y , а также функцией, зависящей от двух переменных x и y . Ниже мы представим результаты и анализ вычислительных экспериментов по

восстановлению искомого параметра κ для двух тестов, в которых точное значение восстанавливаемого параметра κ определялось соответственно формулами

$$\kappa(x, y)_{\text{точн}} = 5xy \quad (54)$$

и

$$\kappa(x, y)_{\text{точн}} = \sin 2\pi x \sin 2\pi y + 1. \quad (55)$$

В качестве начального приближения использовались функции $\kappa_0 = 8xy$ и $\kappa_0 = 0$ соответственно.

Все проводимые эксперименты в зависимости от значений δ разбивались на две группы. К первой группе относились тесты, в которых отсутствуют дополнительные возмущения функции φ . Целью вычислительных экспериментов этой группы являлось исследование влияния параметра μ , входящего в регуляризующую добавку функционала качества (21), на точность восстановления искомого значения коэффициента κ , а также изучение влияния значения итерационного параметра s на скорость восстановления коэффициента κ . Ко второй группе относились тесты, в которых функция φ_n зашумлялась по формуле (52). Целью вычислительных экспериментов этой группы являлось исследование зависимости ошибки решения от величины вносимой погрешности δ при фиксированном μ .

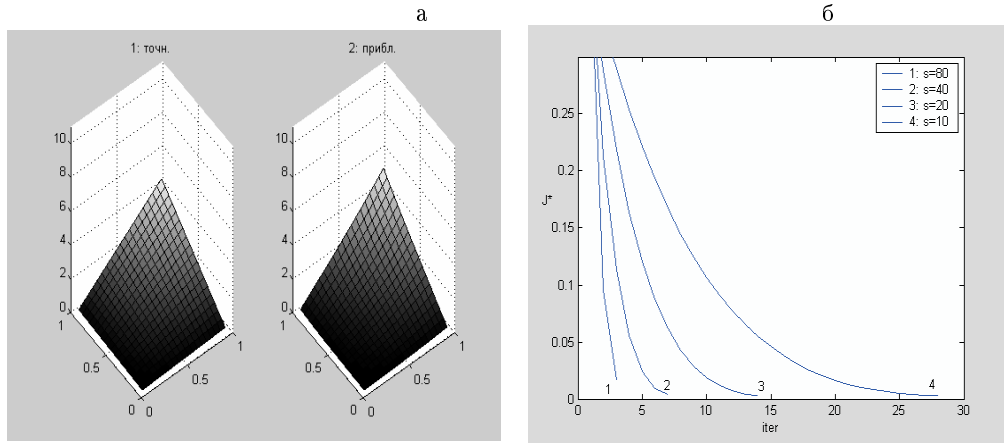


Рис. 1. Результаты вычислительных экспериментов восстановления параметра κ при $\delta = 0$, $\mu = 10^{-3}$, $\kappa_{ex} = 5xy$, $\kappa_0 = 8xy$.

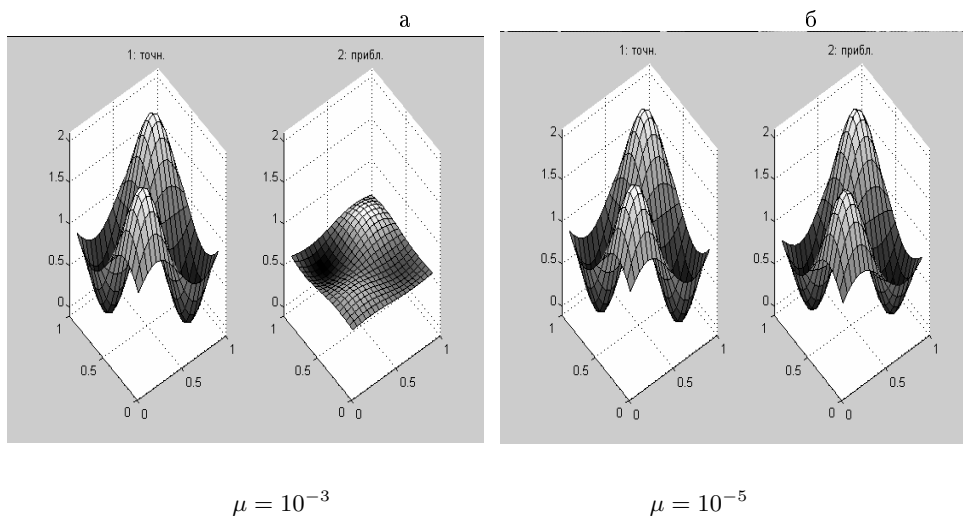


Рис. 2. Результаты вычислительных экспериментов восстановления параметра κ при $\delta = 0$, $\kappa_{ex} = \sin 2\pi x \sin 2\pi y + 1$, $\kappa_0 = 0$.

Результаты вычислительных экспериментов для тестов первой группы представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1а представлены результаты решения обратной задачи для теста 1 в виде поверхностей точно заданного формулой (54) и восстановленного с помощью предложенного алгоритма при $\mu = 10^{-3}$ коэффициента κ . На рис. 1б представлены зависимости минимального значения $I_n = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\varphi_n - \varphi_d|^2 d\Omega$ функционала качества от числа n итераций для четырех значений параметра s , равных 80, 40, 20 и 10, при $\mu = 10^{-3}$ для этого же теста 1. Видно, что для каждого значения параметра s с увеличением числа n итераций происходит убывание I_n и как следствие — увеличение точности приближенного решения. Кроме того, с увеличением значения итерационного параметра s скорость убывания I_n возрастает.

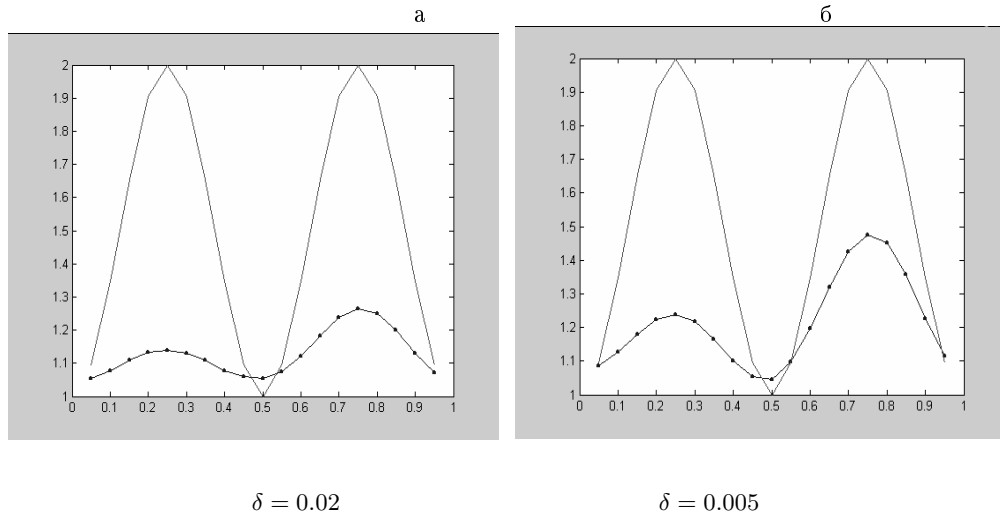


Рис. 3. Влияние вносимой погрешности δ на точность восстановления κ при $\mu = 10^{-3}$ ($\kappa_{ex} = \sin 2\pi x \sin 2\pi y + 1$, $\kappa_0 = 0$).

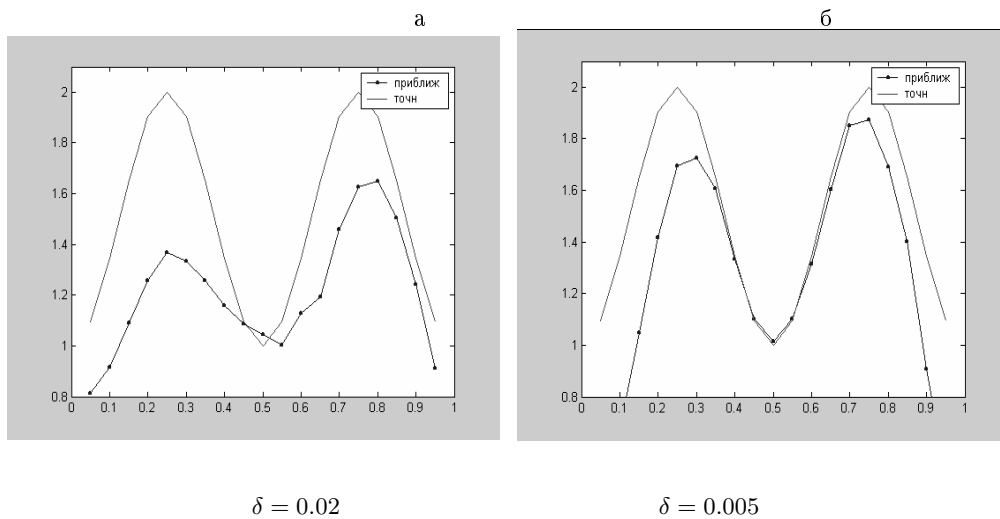


Рис. 4. Влияние вносимой погрешности δ на точность восстановления κ при $\mu = 10^{-4}$ ($\kappa_{ex} = \sin 2\pi x \sin 2\pi y + 1$, $\kappa_0 = 0$).

На рис. 2 представлены результаты решения обратной задачи для теста 2 в виде поверхностей точно заданного формулой (55) и восстановленного с помощью алгоритма коэффициента κ соответственно при $\mu = 10^{-3}$ (рис. 2а) и $\mu = 10^{-5}$ (рис. 2б). Анализ рис. 2 показывает, что точность восстановления коэффициента κ уравнения (1) существенно зависит

от значений параметра μ : чем меньше значение параметра μ , тем точнее восстанавливается искомый коэффициент κ .

Приведем теперь результаты вычислительных экспериментов для тестов второй группы. Напомним, что целью вычислительных экспериментов для тестов этой группы являлось исследование влияния погрешности δ на точность восстановления искомого коэффициента κ . При проведении экспериментов значения параметра μ являлись фиксированными, а значения уровня погрешности δ уменьшались от 10^{-1} до 10^{-5} , причем в качестве точно заданного коэффициента κ использовалась функция (55). Результаты расчетов при $\delta = 0.02$ и $\delta = 0.005$ приведены соответственно для значений $\mu = 10^{-3}$ и $\mu = 10^{-4}$ на рис. 3 и 4 в виде сечений плоскостью $x = y$ поверхностей точно заданного и восстановленного с помощью алгоритма коэффициента κ . Указанные сечения представлены на рис. 3а, 3б при $\mu = 10^{-3}$, а на рис. 4а, 4б — при $\mu = 10^{-4}$.

Анализ приведенных рис. 3 и 4 показывает, что, чем меньше вносимая погрешность δ , тем точнее восстанавливается младший коэффициент κ уравнения (1). Кроме того, точность восстановления коэффициента κ улучшается с уменьшением значения μ .

6. Заключение

В настоящей работе была исследована обратная экстремальная задача идентификации младшего коэффициента для двумерного эллиптического уравнения диффузии-реакции. Для решения указанной задачи был предложен эффективный численный алгоритм, основанный на применении двухслойного итерационного градиентного метода, и исследована его сходимости. Согласно предложенному алгоритму решение рассматриваемой обратной задачи свелось к многократному численному решению прямой и сопряженной задач для рассматриваемого уравнения и вычислению градиента функционала качества на каждом итерационном шаге. Анализ проведенных вычислительных экспериментов показал эффективность предложенного алгоритма в достаточно широком диапазоне изменения параметра μ , входящего в регуляризирующую добавку соответствующего функционала качества, и величины вносимой погрешности δ .

Список литературы

1. Алексеев Г.В. Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса // Докл. РАН. 2000. Т. 375, № 3. С. 315–319.
2. Alekseev G.V., Adomavichus E.A. Theoretical analysis of inverse extremal problems of admixture diffusion in viscous fluids // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2001. V. 9, № 5. P. 435–468.
3. Алексеев Г.В., Адомавичюс Э.А. Исследование обратных экстремальных задач для нелинейных стационарных уравнений переноса вещества // Дальневост. мат. журн. 2002. Т. 3, № 1. С. 79–92.
4. Алексеев Г.В. Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений теории массопереноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42, № 3. С. 380–394.
5. Алексеев Г.В. Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 971–991.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

7. *Fatullayev A.G.* Determination of unknown coefficient in nonlinear diffusion equation // Nonlinear Analysis. 2001. V. 44. P. 337–344.
8. *Fatullayev A.G.* Numerical procedure for the determination of an unknown coefficients in parabolic equations // Comp. Phys. Comm. 2002. V. 144. P. 29–33.
9. *Ito K., Kunisch K.* Estimation of the convection coefficient in elliptic equations // Inverse Problems. 1997. V. 13. P. 995–1013.
10. *Shidfar A., Tavakoli K.* An inverse heat conduction problem // South. Asian Bull. Math. 2002. V. 26. P. 503–507.
11. *Dehghan M.* Finding a control parameter in one-dimensional parabolic equations // Appl. Math. Comp. 2003. V. 135. P. 491–503.
12. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. Москва, 2004. 480 с.
13. *Lowe B., Rundell W.* The determination of a coefficient in an elliptic equation from average flux data // J. Comput. Math. 1996. V. 70. P. 173–187.
14. *Терешко Д.А.* Численное решение задач идентификации параметров примеси для стационарных уравнений массопереноса // Выч.техн. 2004. Т. 9. Спец. вып. Ч. 4. С. 92–98.
15. *Capatina A., Stavre R.* Numerical analysis of a control problem in heat conducting Navier-Stokes fluid // Int. J. Eng. Sci. 1996. V. 34, № 13. P. 1467–1476.
16. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
17. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 15 мая 2005 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00136).

Kalinina E.A. Numerical analysis of the inverse identification problem for the lower coefficient of an elliptic equation. Far Eastern Mathematical Journal. 2005. V. 6. № 1–2. P. 57–70.

ABSTRACT

In this paper the inverse problem of identification of a coefficient in the two-dimensional stationary equation of diffusion – reaction is considered. For the solution of this problem the numerical algorithm is developed which is based on the two-layer gradient algorithm. Theoretical aspects and the convergence of the algorithm are discussed. The results of numerical experiments are analyzed in details.

Key words: *elliptic equation, inverse extremal problem, coefficient identification, gradient algorithm, pollutant transfer.*