А. Казмирчак, Некоторые оценки произведения модулей специальной пары слоений, *Сиб. матем. журн.*, 2020, том 61, номер 3, 594–606

DOI: 10.33048/smzh.2020.61.308

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2020. Том 61, № 3

УДК 517.51

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МОДУЛЕЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПАРЫ СЛОЕНИЙ

А. Казмирчак

Аннотация. Рассматривается класс диффеоморфизмов $G = (G_1, G_2) : M \to N \subset R_1 \times R_2$, действующих между римановыми многообразиями (где N снабжено метрикой произведения), что позволяет исследовать пары слоений на M, состоящих из множеств уровня координат G_1 и G_2 соответственно. Приводятся нижние и верхние оценки произведения сопряженных модулей таких пар слоений, зависящие от свойств N и структуры якобиана JG. Сформулированы результаты, касающиеся локальных свойств максимальных пар слоений.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.308

Ключевые слова: слоение, модуль, емкость, субмерсия.

Введение

Модуль семейства кривых, будучи понятием, взаимным с понятием экстремальной длины, играет существенную роль в теории квазиконформных отображений [1–4]. Он также широко применяется во многих других областях математики таких, как комплексный анализ и анализ на метрических пространствах [5, 6] (в частности, на нем основан способ определения пространств Соболева на метрических пространствах с мерой) и геометрическая теория меры [7]. Кроме того, стоит подчеркнуть, что эта характеристика семейства кривых тесно связана с емкостью: p-емкость конденсатора равна p-модулю всех кривых, входящих в конденсаторы [8–10]. Это понятие обобщено на семейства липшицевых поверхностей в $\mathbb{R}^n$ в [11] и далее на k-мерные подмногообразия риманова многообразия в [12], тем самым получена возможность изучать модули слоений [13–16].

Пусть $\mathscr{F}$ — k-мерное слоение на римановом многообразии M из C^1 (см. определение 1). Пусть $p > 0$. *p-Модулем* слоения $\mathscr{F}$ называется число

$$\operatorname{mod}_p(\mathscr{F}) = \inf_{f \in \operatorname{adm}_p(\mathscr{F})} \|f\|_{L^p(M)},$$

где $\operatorname{adm}_p(\mathscr{F})$ — множество всех *p-допустимых* функций, т. е. п. в. неотрицательных $L^p(M)$-интегрируемых функций таких, что $\int\limits_L f \geq 1$ для п. в. $L \in \mathscr{F}$. Кроме того, будем считать, что $\operatorname{mod}_p(\mathscr{F}) = \infty$, если $\operatorname{adm}_p(\mathscr{F}) = \varnothing$. Функция $f \in \operatorname{adm}_p(\mathscr{F})$ называется *p-экстремальной*, если

$$\|f\|_{L^p(M)} = \operatorname{mod}_p(\mathscr{F}).$$

В контексте модулей наиболее эффективно изучение слоений, заданных субмерсиями (см. определение 2), поскольку в этом случае можно использовать явную формулу для p-модуля и p-экстремальной функции (см. [16, теорема 1]).

В данной статье будем рассматривать пары слоений, связанные диффеоморфизмом

$$G = (G_1, G_2) : M \to R_1 \times R_2,$$

действующим на произведении римановых многообразий (с метрикой произведения). Согласно определению 3 такие слоения состоят из множеств уровня соответствующих координат функций из G. Такую конструкцию можно считать обобщением четырехсторонника с двумя слоениями, соединяющими противоположные пары его сторон. Плоский четырехсторонник определяется в [1] как открытое множество $Q \subset \mathbb{R}^2$, гомеоморфное прямоугольнику, с двумя различными непересекающимися дугами на его границе. Если две такие дуги определены, то можно рассматривать на Q семейства кривых, соединяющих эти дуги. Кроме того, естественным будет изучение модуля множества всех кривых с таким свойством. Альфорс в [1] показал, что для каждого четырехсторонника произведение 2-модулей таких семейств равно единице. В свою очередь, А. С. Романов в [17] доказал аналогичный результат для произведение модулей с сопряженными степенями суммируемости. Последнее утверждение вместе с монотонностью модуля (см. свойство 1 теоремы 7) делает интуитивно понятной идею теоремы 3, в которой утверждается, что для пары слоений $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$, связанных диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$, произведение

$$\operatorname{mod}_{p_1}(\mathscr{F}_1) \cdot \operatorname{mod}_{p_2}(\mathscr{F}_2), \quad \text{где } \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1, \tag{1}$$

не превосходит 1. Следствие 2, будучи эквивалентом теоремы 4.3 из [14], дает достаточное условие максимальности значения произведения сопряженных модулей (которое равно единице) для слоений вышеуказанного типа. Помимо требований теоремы 3 в следствии 2 дополнительно предполагается особое строение якобиана JG, а именно

$$\begin{gathered} JG = JG_{\mathscr{F}_1} \cdot JG_{\mathscr{F}_2} \quad (\text{эквивалентно } \mathscr{F}_1 \perp \mathscr{F}_2 \text{ (см. лемму 1)}), \\ c_1 JG_{\mathscr{F}_1}^{p_1} = c_2 JG_{\mathscr{F}_2}^{p_2} \quad \text{для некоторых } c_1, c_2 > 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Легко убедиться в том, что гёльдерова зависимость между экстремальными функциями (с подходящей константой, как в (15)) является достаточным условием равенства единице произведения (1) для любой пары слоений из рассматриваемого класса. Примечательно, что это требование оказывается и необходимым условием равенства данного произведения единице (см. теорему 4).

С другой стороны, рассматривая более широкий класс диффеоморфизмов, чем в теореме 3, т. е. все $G : M \to N \subset R_1 \times R_2$, действующие на открытых подмножествах N из $R_1 \times R_2$, и в то же время накладывая условия (2), приходим к заключению, что вопреки утверждению теоремы 3 произведение (1) должно не превосходить единицу (см. теорему 2).

В заключение в разд. 3 изучим некоторые локальные свойства максимальной пары слоений. Оказывается, такие слоения обладают свойством «локальной максимальности» в том смысле, что для любого открытого множества M', вырезанного из M вдоль его листов,

$$\operatorname{mod}_{p_1}(\mathscr{F}_1|_{M'}) \cdot \operatorname{mod}_{p_2}(\mathscr{F}_2|_{M'}) = 1$$

при условии, что произведение (1) равно 1 (следствие 4). Кроме того, p-экстремальная функция максимального слоения «локально экстремальна». А именно, если через f обозначим p-экстремальную функцию слоения $\mathscr{F}$, определенного на M, а через f' — p-экстремальную функцию $\mathscr{F}|_{M'}$, то $f' = c \cdot f$, где

$c > 0$ — постоянная, зависящая от норм f и f' (см. теорему 8). Эти локальные свойства вполне согласуются с результатами, касающимися емкостей, если M — открытое подмножество $\mathbb{R}^2$ (ср. [17]).

1. Модуль слоения, заданного субмерсией

Определение 1. *k-Мерным слоением $\mathscr{F}$* на M называется такое семейство попарно не пересекающихся k-мерных подмногообразий M, что $M = \bigcup\limits_{L\in\mathscr{F}} L$ и для любой точки $x \in M$ существуют окрестность D и отображение $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n) : D \to \mathbb{R}^n$ такие, что $\varphi_i(D) = (0,1)$, $i = 1, \dots, n$, и для любой компоненты связности P любого $L \cap D$

$$\varphi^{k+1}_{|P} = \mathrm{const}, \ \dots, \ \varphi^n_{|P} = \mathrm{const}.$$

Через L^x обозначим лист $\mathscr{F}$, проходящий через $x \in M$.

Заметим, что в определении 1 листы не обязательно связны.

Пусть M и P — римановы многообразия. Напомним, что гладкое отображение $\phi : M \to P$ называется *субмерсией*, если для всех $x \in M$ его дифференциал $\phi_*(x) : T_xM \to T_{\phi(x)}P$ сюръективен. *Якобианом* J_ϕ является функция, сопоставляющая каждой точке $x \in M$ якобиан изоморфизма $\phi_*(x)|_{\ker(\phi_*(x))^\perp}$.

Определение 2. Будем говорить, что *слоение* $\mathscr{F} = \{\phi^{-1}(y) : y \in \phi(M)\}$ *задано субмерсией* ϕ.

В теореме 1 (см. [16]) приводятся формулы для p-модуля и p-экстремальной функции слоения, заданного субмерсией. Она будет часто применяться в данной статье.

Теорема 1 [16]. *Если слоение $\mathscr{F}$ задано субмерсией $\phi : M \to P$ и $\int\limits_L J_\phi^{\frac{1}{p-1}} < \infty$ для п. в. $L \in \mathscr{F}$, то при $p > 1$*

$$\operatorname{mod}_p(\mathscr{F}) = \Biggl(\int\limits_{\phi(M)} \Biggl(\int\limits_{L^x} J_\phi^{\frac{1}{p-1}}\Biggr)^{1-p}\Biggr)^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

Кроме того, если $\operatorname{mod}_p(\mathscr{F}) < \infty$, то существует единственная p-экстремальная функция, которая задается формулой

$$f(x) = \frac{J_\phi(x)^{\frac{1}{p-1}}}{\int\limits_{L^x} J_\phi^{\frac{1}{p-1}}}. \tag{4}$$

Непосредственно из равенства (4) вытекает

Следствие 1. *Если f — p-экстремальная функция слоения $\mathscr{F}$, заданного субмерсией, то $\int\limits_{L^x} f = 1$ для всех $x \in M$.*

2. Оценки для произведения модулей слоений

Отметим, что для любых диффеоморфизма $G : M \to N$ между римановыми многообразиями и слоения $\mathscr{F}$ на M

$$G(\mathscr{F}) = \{G(L) : L \in \mathscr{F}\}$$

является слоением на N. Через $JG_{\mathscr{F}}(x)$ будем обозначать *якобиан изоморфизма* $G_*(x)|_{T_xL^x}$, а через $JG_{\mathscr{F}^\perp}(x)$ — якобиан изоморфизма $G_*(x)|_{(T_xL^x)^\perp}$.

Всюду в статье предполагаем, что $R_1 \times R_2$ снабжено метрикой произведения, а $N \subset R_1 \times R_2$ — метрикой, индуцированной из $R_1 \times R_2$.

Определение 3. Пусть $G : M \to N \subset R_1 \times R_2$ — диффеоморфизм. Определим $\mathscr{F}_1$ как слоение, заданное G_2, а $\mathscr{F}_2$ — как слоение, заданное G_1. Назовем эту пару *системой слоений, связанных диффеоморфизмом* $(G; R_1, R_2)$.

Таким образом, для рассматриваемых слоений $JG_{\mathscr{F}_1^\perp} = JG_2$ и $JG_{\mathscr{F}_2^\perp} = JG_1$.

Лемма 1. *Пусть $G : M \to N \subset R_1 \times R_2$ — диффеоморфизм и $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ связаны диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$. Тогда*

$$JG_{\mathscr{F}_1} \cdot JG_{\mathscr{F}_2} \le JG,$$

где равенство достигается в том и в только том случае, когда слоения ортогональны.

Определение 4. Вещественные числа $p_1, p_2 > 1$ будем называть *сопряженными*, если $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$.

Теорема 2. *Пусть R_1, R_2 имеют конечный объем, $G : M \to N \subset R_1 \times R_2$ — диффеоморфизм и $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ — слоения, связанные диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$. Если $\mathscr{F}_1 \perp \mathscr{F}_2$ и для пары сопряженных p_1, p_2 и некоторых $0 < c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*

$$c_1 JG_{\mathscr{F}_1}^{p_1}(x) = c_2 JG_{\mathscr{F}_2}^{p_2}(x) \quad \text{для всех } x \in M, \tag{5}$$

то $\operatorname{mod}_{p_1}(\mathscr{F}_1) \cdot \operatorname{mod}_{p_2}(\mathscr{F}_2) \ge 1$.

Доказательство. Обозначим через μ_{R_i}, $i = 1, 2$, меру Лебега, определенную на R_i. Поскольку на $R_1 \times R_2$ введена метрика произведения, $J\pi_i = 1$ $(\pi_i : R_1 \times R_2 \to R_i)$. Таким образом,

$$\int\limits_{L_i^x} JG_{\mathscr{F}_i} = \int\limits_{G(L_i^x)} J\pi_i = \int\limits_{G_i(L_i^x)} 1 \le \mu_{R_i}(R_i). \tag{6}$$

Кроме того, из сопряженности p_1 и p_2 следует, что

$$p_2 - 1 = \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{p_1 - 1}, \tag{7}$$

откуда в силу (5) имеем

$$JG_{\mathscr{F}_2}^{p_2 - 1} = JG_{\mathscr{F}_2}^{\frac{p_2}{p_1}} = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} JG_{\mathscr{F}_1}. \tag{8}$$

Кроме того, из ортогональности слоений получаем

$$JG_{\mathscr{F}_1^\perp} = JG_{\mathscr{F}_2}, \quad JG_{\mathscr{F}_2^\perp} = JG_{\mathscr{F}_1}. \tag{9}$$

Таким образом, для всех $x \in M$

$$\int\limits_{L_1^x} JG_{\mathscr{F}_1^\perp}^{\frac{1}{p_1-1}} = \int\limits_{L_1^x} JG_{\mathscr{F}_2}^{\frac{1}{p_1-1}} = \int\limits_{G_1(L_1^x)} \left(JG_{\mathscr{F}_2}^{\frac{1}{p_1-1}} \cdot JG_{\mathscr{F}_1}^{-1}\right) \circ G^{-1}$$

$$= \int\limits_{G_1(L_1^x)} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} 1 = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} \mu_{R_1}\big(G_1\big(L_1^x\big)\big) < \infty.$$

Аналогично $\int\limits_{L_2^x} JG_{\mathscr{F}_2^\perp}^{\frac{1}{p_2-1}} < \infty$, а значит, все предположения теоремы 1 выполнены. Тем самым, применяя (3), (9), (7), (8) и (6), получаем

$$\operatorname{mod}_{p_1}^{p_1}(\mathscr{F}_1) = \int\limits_{R_2}\left(\int\limits_{L_1} JG_{\mathscr{F}_2}^{p_2-1}\right)^{1-p_1} = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{-\frac{1}{p_2}}\int\limits_{R_2}\left(\int\limits_{L_1} JG_{\mathscr{F}_1}\right)^{1-p_1}$$
$$\geq \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{-\frac{1}{p_2}}\int\limits_{R_2}\mu_{R_1}(R_1)^{1-p_1} = \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{-\frac{1}{p_2}}\mu_{R_2}(R_2)\mu_{R_1}(R_1)^{1-p_1}.$$

Аналогично

$$\operatorname{mod}_{p_2}^{p_2}(\mathscr{F}_2) \geq \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{-\frac{1}{p_1}}\mu_{R_1}(R_1)\mu_{R_2}(R_2)^{1-p_2}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{mod}_{p_1}(\mathscr{F}_1)\operatorname{mod}_{p_2}(\mathscr{F}_2) \geq \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{-\frac{1}{p_1\cdot p_2}}\mu_{R_2}(R_2)^{\frac{1}{p_1}}\mu_{R_1}(R_1)^{\frac{1}{p_1}-1}$$
$$\cdot\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{p_1\cdot p_2}}\mu_{R_1}(R_1)^{\frac{1}{p_2}}\mu_{R_2}(R_2)^{\frac{1}{p_2}-1} = 1. \quad \square$$

Следствие 2. *Если $N = R_1 \times R_2$ в условии теоремы 2, то ее утверждение усиливается:*

$$\operatorname{mod}_{p_1}(\mathscr{F}_1)\cdot\operatorname{mod}_{p_2}(\mathscr{F}_2) = 1. \tag{10}$$

Доказательство. В случае, когда $N = R_1 \times R_2$, имеем $G_i\big(L_i^x\big) = R_i$, так что $\int\limits_{L_i^x} JG_{\mathscr{F}_i} = \mu_{R_i}(R_i)$. Тем самым все существенные неравенства после (6) могут быть заменены равенствами, что приводит к требуемому утверждению. $\square$

Пример 1. Пусть $R_1,\ R_2 \subset \mathbb{R}$ — открытые промежутки, $G = \mathrm{id}\,|_N$, где $N \subset R_1 \times R_2$ — ограниченная область. Обозначим через $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ слоения, связанные диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$. Эти ортогональные слоения состоят из горизонтальных и вертикальных отрезков соответственно (или, возможно, из сумм таких отрезков). Поскольку $JG_{\mathscr{F}_1} = J\pi_2 = 1$ и $JG_{\mathscr{F}_2} = J\pi_1 = 1$, предположения теоремы 2 выполнены для любой пары p_1, p_2 сопряженных чисел. Стало быть,

$$\operatorname{mod}_{p_1}\mathscr{F}_1\cdot\operatorname{mod}_{p_2}\mathscr{F}_2 \geq 1.$$

Пример 2 (сектор классического кольца). Пусть $a, b > 0$ таковы, что $a < b$ и $\alpha \in (0, 2\pi)$. Положим

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < r(x,y) < b,\ 0 < \theta(x,y) < \alpha\},$$

где $r(x,y)$ и $\theta(x,y)$ — полярные координаты точки (x,y). Введем на M евклидову метрику, индуцированную из $\mathbb{R}^2$. Пусть $G : M \to (\ln(a), \ln(b)) \times (0,\alpha)$ определено по формуле

$$G(x,y) = (\ln(r(x,y)), \theta(x,y)).$$

Обозначим через $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ систему слоений, связанных диффеоморфизмом $(G; (\ln(a), \ln(b)), (0,\alpha))$. Другими словами,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_1 &= \{G^{-1}((a,b)\times\{\theta\}) : \theta \in (0,\alpha)\},\\ \mathscr{F}_2 &= \{G^{-1}(\{z\}\times(0,\alpha)) : z \in (\ln(a), \ln(b))\}.\end{aligned} \tag{11}$$

Тогда

$$JG_{\mathscr{F}_1} = JG_{\mathscr{F}_2} = \frac{1}{r},$$

в то время как $JG = \frac{1}{r^2}$. Отсюда $\mathscr{F}_1 \perp \mathscr{F}_2$ (см. лемму 1). Тем самым по следствию 2 равенство (1) будет выполнено, если $p_1 = p_2 = 2$. Действительно, по формуле (3) получаем $\operatorname{mod}_2^2(\mathscr{F}_1) = \alpha \ln\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$ и $\operatorname{mod}_2^2(\mathscr{F}_2) = \alpha^{-1} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Значит, (1) выполнено.

Лемма 2. *Пусть p_1, p_2 — сопряженные числа и $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ — пара слоений, связанных диффеоморфизмом $G : M \to R_1 \times R_2$, такие, что $\int\limits_{L_1} JG_{\mathscr{F}_1^\perp}^{\frac{1}{p_1-1}} < \infty$ для всех $L_1 \in \mathscr{F}_1$. Если f_1 — p_1-экстремальная функция слоения $\mathscr{F}_1$, то для всех $L_2 \in \mathscr{F}_2$*

$$\int\limits_{L_2} \bar{f}_2 \geq 1, \quad \text{где } \bar{f}_2 = \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{-p_1} f_1^{p_1-1}.$$

Доказательство. Имеем $JG = JG_{\mathscr{F}^\perp} \cdot JG_{\mathscr{F}}$ и $JG \geq JG_{\mathscr{F}_1} \cdot JG_{\mathscr{F}_2}$ (ср. с леммой 1). Значит, $JG_{\mathscr{F}^\perp} \geq JG_{\mathscr{F}_2}$. Применяя формулу (4), получим

$$f_1 = \frac{JG_{\mathscr{F}_1^\perp}^{\frac{1}{p_1-1}}}{\int\limits_{L_1} JG_{\mathscr{F}_1^\perp}^{\frac{1}{p_1-1}}} \geq \frac{JG_{\mathscr{F}_2}^{\frac{1}{p_1-1}}}{\int\limits_{L_1} JG_{\mathscr{F}_1^\perp}^{\frac{1}{p_1-1}}}.$$

Стало быть, $f_1^{p_1-1} \geq \frac{JG_{\mathscr{F}_2}}{\left(\int\limits_{L_1} JG_{\mathscr{F}_1^\perp}^{\frac{1}{p_1-1}}\right)^{p_1-1}}$, откуда ввиду (3) для любого $L_2 \in \mathscr{F}_2$ имеем

$$\int\limits_{L_2} \bar{f}_2 = \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{-p_1} \int\limits_{L_2} f_1^{p_1-1} \geq \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{-p_1} \int\limits_{R_2} \left(\int\limits_{L_1} JG_{\mathscr{F}_1^\perp}^{\frac{1}{p_1-1}}\right)^{1-p_1}$$
$$= \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{-p_1} \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{p_1} = 1. \quad \square \tag{12}$$

Лемма 3. *Если выполнены предположения леммы 2 (и $\bar{f}_2$ определена, как в лемме 2), то $\|f_1\|_{L^{p_1}(M)} \|\bar{f}_2\|_{L^{p_2}(M)} = 1$.*

Доказательство. Из (7) получаем

$$\|f_1\|_{L^{p_1}(M)} \|\bar{f}_2\|_{L^{p_2}(M)} = \|f_1\|_{L^{p_1}(M)} \frac{\left\|f_1^{p_1-1}\right\|_{L^{p_2}(M)}}{\|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{p_1}}$$
$$= \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{1-p_1} \left(\int\limits_M f_1^{(p_1-1)\frac{p_1}{p_1-1}}\right)^{\frac{1}{p_2}} = \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{1-p_1} \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{\frac{p_1}{p_2}} = 1. \quad \square$$

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ — пара слоений, связанных диффеоморфизмом $G : M \to R_1 \times R_2$, и p_1, p_2 — сопряженные числа. Пусть $\int\limits_{L_1} JG_{\mathscr{F}_1^\perp}^{\frac{1}{p_1-1}} < \infty$ для всех $L_1 \in \mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_1$ имеет p_1-экстремальную функцию. Тогда*

$$\operatorname{mod}_{p_1}(\mathscr{F}_1) \cdot \operatorname{mod}_{p_2}(\mathscr{F}_2) \leq 1.$$

Доказательство. Обозначим через f_1 p_1-экстремальную функцию $\mathscr{F}_1$. В силу лемм 2 и 3 $\bar{f}_2 = \|f_1\|_{p_1}^{-p_1} f_1^{p_1-1}$ p_2-допустима, так что

$$\mathrm{mod}_{p_2}(\mathscr{F}_2) \le \|\bar{f}_2\|_{L^{p_2}(M)}. \tag{13}$$

По лемме 3 $\|f_1\|_{L^{p_1}(M)}\|\bar{f}_2\|_{L^{p_2}(M)} = 1$, что вместе с (13) приводит к требуемому. □

Определение 5. Пусть $G : M \to R_1 \times R_2$ — диффеоморфизм. Назовем пару $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$, связанную диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$, (p_1, p_2)-*максимальной*, если числа p_1, p_2 сопряженные и

$$\mathrm{mod}_{p_1}(\mathscr{F}_1) \cdot \mathrm{mod}_{p_2}(\mathscr{F}_2) = 1.$$

Теорема 4. *Пусть числа p_1, p_2 сопряженные, а $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ — пара (p_1, p_2)-максимальных слоений, связанных диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$. Кроме того, пусть*

$$\int\limits_{L_1} JG_{\mathscr{F}_1^{\perp}}^{\frac{1}{p_1-1}} < \infty \quad \text{для всех } L_1 \in \mathscr{F}_1. \tag{14}$$

Тогда

$$f_2 = \frac{f_1^{p_1-1}}{\|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{p_1}}, \tag{15}$$

где f_1 и f_2 — p_1- и p_2-экстремальные функции для $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ соответственно.

Доказательство. В силу максимальности данной пары слоений (см. определение 5) очевидно, что

$$\mathrm{mod}_{p_i}(\mathscr{F}_i) < \infty \quad \text{для } i = 1, 2. \tag{16}$$

Поскольку (14) выполнено, можно воспользоваться теоремой 1 и, опираясь на (16), получить существование f_1. Согласно леммам 2 и 3 функция

$$\bar{f}_2 = \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{-p_1} f_1^{p_1-1} \tag{17}$$

p_2-допустима для $\mathscr{F}_2$ и $\|\bar{f}_2\|_{L^{p_2}(M)} = \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{-1}$. Отсюда (снова в силу предположения о максимальности) $\|\bar{f}_2\|_{L^{p_2}(M)} = \|f_2\|_{L^{p_2}(M)}$. Из единственности экстремальной функции получаем $f_2 = \bar{f}_2$, что и требовалось доказать. □

Этот результат может быть также получен с помощью другого, вариационного, подхода как следствие теоремы 3 и теоремы 4.5 из [13].

Теорема 4 позволяет установить следующее важное свойство максимального слоения.

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ — слоения, связанные диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$, а числа p_1, p_2 сопряженные. Если пара $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ (p_1, p_2)-максимальна и*

$$\int\limits_{L_1} JG_{\mathscr{F}_1^{\perp}}^{\frac{1}{p_1-1}} < \infty \quad \text{для всех } L_1 \in \mathscr{F}_1, \tag{18}$$

то $\mathscr{F}_1 \perp \mathscr{F}_2$.

Доказательство. Напомним, что по теореме 4 экстремальные функции f_1 и f_2 для максимальных слоений существуют и $f_2 = \frac{f_1^{p_1-1}}{\|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{p_1}}$.

Предположим, что слоения не ортогональны в некоторой точке $x \in M$. Тогда $JG(x) > JG_{\mathscr{F}_1}(x) \cdot JG_{\mathscr{F}_2}(x)$ (т. е. $JG_{\mathscr{F}_1^\perp}(x) > JG_{\mathscr{F}_2}(x)$). Гладкость G влечет существование открытой окрестности $L_2' \subset L_2^x$ точки x такой, что последнее неравенство выполнено для всех $y \in L_2'$. Тогда $\int\limits_{L_2'} JG_{\mathscr{F}_1^\perp} > \int\limits_{L_2'} JG_{\mathscr{F}_2}$, а также $\int\limits_{L_2^x} JG_{\mathscr{F}_1^\perp} > \int\limits_{L_2^x} JG_{\mathscr{F}_2}$ (поскольку $JG_{\mathscr{F}_1^\perp} \geq JG_{\mathscr{F}_2}$ всюду). Следовательно, $\int\limits_{L_2^x} f_2 > 1$. Однако, с другой стороны, $\int\limits_{L_2} f_2 = 1$ для всех $L_2 \in \mathscr{F}_2$ (см. следствие 1); противоречие. $\square$

В следующей теореме сформулируем необходимое и достаточное условия максимальности пары слоений.

Теорема 6. *Пусть числа p_1, p_2 сопряженные и $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ связаны диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$. Допустим, что*

$$\int\limits_{L_1} JG_{\mathscr{F}_1^\perp}^{\frac{1}{p_1-1}} < \infty \quad \text{для всех } L_1 \in \mathscr{F}_1. \tag{19}$$

Тогда пара $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ (p_1, p_2)-максимальна в том и только том случае, когда $\mathscr{F}_1 \perp \mathscr{F}_2$ и существует положительная постоянная с такая, что

$$f_2 = c f_1^{p_1-1}, \tag{20}$$

где f_1 и f_2 — p_1- и p_2-экстремальные функции для $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ соответственно.

Доказательство. «$\Rightarrow$» Следует напрямую из теорем 4 и 5.

«$\Leftarrow$» В силу (20), теоремы 1 и ортогональности слоений выполнена следующая цепочка равенств:

$$1 = \int\limits_{L_2} f_2 = c \int\limits_{L_2} f_1^{p_1-1} = c \int\limits_{L_2} \frac{JG_{\mathscr{F}_2}}{\left(\int\limits_{L_1} JG_{\mathscr{F}_2}^{\frac{1}{p_1-1}}\right)^{p_1-1}}$$

$$= c \int\limits_{R_2} \left(\int\limits_{L_1} JG_{\mathscr{F}_2}^{\frac{1}{p_1-1}} \right)^{1-p_1} = c \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{p_1},$$

стало быть, $c = \|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{-p_1}$. Таким образом, $f_2 = \frac{f_1^{p_1-1}}{\|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{p_1}}$. Утверждение теоремы следует из леммы 3. $\square$

Пример 3. Найдем экстремальные функции для слоений из примера 2. Для этого, возможно, будет удобнее использовать полярные координаты, т. е. $\widetilde{G}(x, y) = (r(x, y), \theta(x, y))$. Очевидно, что $J\widetilde{G}_{\mathscr{F}_1} = 1$ и $J\widetilde{G}_{\mathscr{F}_2} = \frac{1}{r}$. Обозначим через f_1 p_1-экстремальную функцию для $\mathscr{F}_1$, а через f_2 — p_2-экстремальную функцию для $\mathscr{F}_2$. Поскольку $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ связаны (также) диффеоморфизмом $(\widetilde{G}; (a, b), (0, \alpha))$, то, применяя формулу (4), получим

$$f_1 = \begin{cases} \frac{2-p_2}{b^{2-p_2} - a^{2-p_2}} \cdot r^{1-p_2} & \text{при } p_2 \neq 2, \\ \frac{1}{ln(\frac{b}{a})} \cdot r^{-1} & \text{при } p_2 = 2, \end{cases} \qquad f_2 = \frac{1}{\alpha r}.$$

Тем самым $\frac{1}{\alpha r} = f_2 = c f_1^{p_1-1}$, что совпадает с соотношением (20), которое согласно теореме 6 означает (p_1, p_2)-максимальность слоений $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ (для любой пары (p_1, p_2) сопряженных чисел, а не только для $p_1 = p_2 = 2$, что уже было показано в примере 2).

Заметим, что импликация, обратная к импликации теоремы 5, неверна, поскольку произведение сопряженных модулей двух ортогональных слоений строго меньше единицы.

Пример 4. Рассмотрим диффеоморфизм $G : (x, y) \in \mathbb{R} \mapsto (x^2 - y^2, xy)$ и многообразие $M = G^{-1}((0,1)^2)$. Пусть $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ — пара слоений, связанных диффеоморфизмом $(G; (0,1), (0,1))$ (ср. с рассуждениями в [17] относительно (p_1, p_2)-емкостей двух конденсаторов на четырехстороннике, определенном на $M = G^{-1}((0,1)^2)$). Ясно, что $JG = 2r^2$, в то время как $JG_{\mathscr{F}_1} = 2r$ и $JG_{\mathscr{F}_2} = r$. Тогда $JG_{\mathscr{F}_1} = 2JG_{\mathscr{F}_2}$ и $JG = JG_{\mathscr{F}_1} \cdot JG_{\mathscr{F}_2}$. Тем самым предположения следствия 2 выполнены для $p_1 = p_2 = 2$. Следовательно, пара данных слоений $(2, 2)$-максимальна.

Однако $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ не (p_1, p_2)-максимальны для пары сопряженных $p_1 \neq p_2$. Действительно, обозначим через $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_2$ p_1- и p_2-экстремальные функции для $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ соответственно. Ввиду формулы (4) получаем

$$\tilde{f}_1 = \frac{JG_{\mathscr{F}_2}^{\frac{1}{p_1-1}}}{\int\limits_{L_1} JG_{\mathscr{F}_2}^{\frac{1}{p_1-1}}} = \frac{r^{\frac{1}{p_1-1}}}{\int\limits_{L_1} r^{\frac{1}{p_1-1}}} = \frac{r^{\frac{1}{p_1-1}}}{\frac{1}{2}\int\limits_0^1 r^{p_2-2} \circ G^{-1} da}.$$

Аналогично

$$\tilde{f}_2 = \frac{r^{p_1-1}}{\int\limits_0^1 r^{p_1-2} \circ G^{-1} db},$$

где $a = G_1(x, y)$, $b = G_2(x, y)$. Далее, согласно теореме 6 (p_1, p_2)-максимальность влечет, что $\tilde{f}_2 = c\tilde{f}_1^{p_1-1}$. Подставляя выражения, полученные выше, в это равенство, имеем

$$\frac{r^{p_1-2}(x, y)}{c \cdot 2^{p_1-1}} = \frac{\int\limits_0^1 r^{p_1-2} \circ G^{-1} db}{\left(\int\limits_0^1 r^{p_2-2} \circ G^{-1}\, da\right)^{p_1-1}}$$

для всех $(x, y) \in M$, что эквивалентно тому, что

$$(a^2 + 4b^2)^{\frac{p_1-2}{4}} = r(x, y)^{p_1-2} = c2^{p_1-1} \frac{z_1(a)}{z_2(b)^{p_1-1}},$$

где $z_1(a) = \int\limits_0^1 (a^2 + 4b^2)^{\frac{p_1-2}{4}}\, db$ и $z_2(b) = \int\limits_0^1 (a^2 + 4b^2)^{\frac{p_2-2}{4}}\, da$; противоречие.

3. Локальные свойства максимальной пары слоений

Определение 6. Пусть $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ — k-мерные слоения на открытых подмножествах M. Будем говорить, что $\mathscr{F}_2$ *минорирует* $\mathscr{F}_1$, если для любого $L_1 \in \mathscr{F}_1$ существует $L_2 \in \mathscr{F}_2$ такое, что $L_2 \subset L_1$.

Ниже приводятся свойства модуля, которые являются сформулированными в терминах слоений аналогами свойствам из теоремы 1 в [11]. Часть из них отражает тот факт, что модуль является внешней мерой.

Теорема 7. *Пусть $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ — k-мерные слоения на открытых подмножествах M.*

Пусть $p_1 > 0$.

1. *Если $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$, то*

$$\operatorname{mod}_{p_1}(\mathscr{F}_1) \le \operatorname{mod}_{p_1}(\mathscr{F}_2). \tag{21}$$

2. *Если $\mathscr{F}_1$ минорирует $\mathscr{F}_2$, то*

$$\operatorname{mod}_{p_1}(\mathscr{F}_1) \ge \operatorname{mod}_{p_1}(\mathscr{F}_2). \tag{22}$$

Пусть $\mathscr{F}$ — слоение на M. Обозначим через U_i, $i = 1, \ldots, \infty$, семейство взаимно не пересекающихся открытых подмножеств M и $\mathscr{F}_i = \mathscr{F}|_{U_i}$.

3. *Если $\mathscr{F} \underset{\text{п. в.}}{=} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathscr{F}_i$, то*

$$\operatorname{mod}_{p_1}^{p_1}(\mathscr{F}) = \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{mod}_{p_1}^{p_1}(\mathscr{F}_i). \tag{23}$$

Пусть $p_1 > 1$.

4. *Если $\mathscr{F}$ минорируется всеми $\mathscr{F}_i$, то*

$$\operatorname{mod}_{p_1}^{-p_2}(\mathscr{F}) \ge \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{mod}_{p_1}^{-p_2}(\mathscr{F}_i), \tag{24}$$

где p_1, p_2 сопряженные.

Пусть $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ — два ортогональных слоения комплементарных размерностей на M. Обозначим через U_j^i, $i \in 1, \ldots, m_1$, $j \in 1, \ldots, m_2$ ($m_1, m_2 \in \mathbb{N}$), взаимно не пересекающиеся открытые подмножества M такие, что $M \subset \bigcup\limits_{i,j} \overline{U}_j^i$. Определим

$$\begin{gathered} \mathscr{F}_j^i = \mathscr{F}|_{U_j^i}, \quad U^i = \operatorname{int}\Bigl(\bigcup_j \overline{U}_j^i\Bigr), \quad \mathscr{F}^i = \mathscr{F}|_{U^i}, \quad \mathscr{G}^i = \mathscr{G}|_{U^i}, \\ U_j = \operatorname{int}\Bigl(\bigcup_i \overline{U}_j^i\Bigr), \quad \mathscr{F}_j = \mathscr{F}|_{U_j}, \quad \mathscr{G}_j = \mathscr{G}|_{U_j}. \end{gathered} \tag{25}$$

Следующее утверждение существенно усиливает следствие 3.4 из [14].

Лемма 4. *Предположим, что*

(1) для любого i слоение $\mathscr{F}^i$ минорируется $\mathscr{F}_1^i, \ldots, \mathscr{F}_{m_2}^i$ и $\mathscr{G}^i \underset{\text{п. в.}}{=} \bigcup\limits_j \mathscr{G}_j^i$;

(2) для любого j слоение $\mathscr{G}_j$ минорируется $\mathscr{G}_j^1, \ldots, \mathscr{G}_j^{m_1}$ и $\mathscr{F}_j \underset{\text{п. в.}}{=} \bigcup\limits_i \mathscr{F}_j^i$.

Пусть пара сопряженных чисел p_1, p_2 и постоянные $a_{i,j}$, $i = 1, \ldots, m_1$, $j = 1, \ldots, m_2$, таковы, что

$$\operatorname{mod}_{p_1}\left(\mathscr{F}_j^i\right) \cdot \operatorname{mod}_{p_2}\left(\mathscr{G}_j^i\right) \le a_{i,j}. \tag{26}$$

Тогда

$$\operatorname{mod}_{p_1}(\mathscr{F}) \cdot \operatorname{mod}_{p_2}(\mathscr{G}) \le \max_{i,j} a_{i,j}. \tag{27}$$

Доказательство. Согласно предположению (1) и свойствам 3, 4 из теоремы 7 имеем

$$\frac{1}{\operatorname{mod}_{p_1}^{p_2}\left(\mathscr{F}^i\right)} \ge \frac{1}{\operatorname{mod}_{p_1}^{p_2}\left(\mathscr{F}_1^i\right)} + \cdots + \frac{1}{\operatorname{mod}_{p_1}^{p_2}\left(\mathscr{F}_{m_2}^i\right)},$$

$$\operatorname{mod}_{p_2}^{p_2}(\mathscr{G}^i) = \operatorname{mod}_{p_2}^{p_2}\left(\mathscr{G}_1^i\right) + \dots + \operatorname{mod}_{p_2}^{p_2}\left(\mathscr{G}_{m_2}^i\right).$$

В силу вышеприведенных оценок получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mod}_{p_1}^{p_2}\left(\mathscr{F}^i\right)\cdot\operatorname{mod}_{p_2}^{p_2}(\mathscr{G}^i)\\
&\le \frac{\operatorname{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathscr{F}_1^i)\cdot\ldots\cdot\operatorname{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathscr{F}_{m_2}^i)}{\operatorname{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathscr{F}_2^i)\cdot\ldots\cdot\operatorname{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathscr{F}_{m_2}^i)+\dots+\operatorname{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathscr{F}_1^i)\cdot\ldots\cdot\operatorname{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathscr{F}_{m_2-1}^i)}\left(\operatorname{mod}_{p_2}^{p_2}(\mathscr{G}_1^i)+\dots+\operatorname{mod}_{p_2}^{p_2}(\mathscr{G}_{m_2}^i)\right)\\
&\qquad\le \frac{a_{i,1}^{p_2}\cdot\operatorname{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathscr{F}_2^i)\cdot\ldots\cdot\operatorname{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathscr{F}_{m_2}^i)+\dots+\operatorname{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathscr{F}_1^i)\cdot\ldots\cdot\operatorname{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathscr{F}_{m_2-1}^i)\cdot a_{i,m_2}^{p_2}}{\operatorname{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathscr{F}_2^i)\cdot\ldots\cdot\operatorname{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathscr{F}_{m_2}^i)+\dots+\operatorname{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathscr{F}_1^i)\cdot\ldots\cdot\operatorname{mod}_{p_1}^{p_2}(\mathscr{F}_{m_2-1}^i)}\le\max_j a_{i,j}^{p_2},
\end{aligned}$$

а значит,

$$\operatorname{mod}_{p_1}\left(\mathscr{F}^i\right)\cdot\operatorname{mod}_{p_2}(\mathscr{G}^i)\le a_i,$$

где $a_i = \max\limits_j a_{i,j}$. Тогда в силу предположения (2) и свойств 3, 4 теоремы 7 имеем

$$\frac{1}{\operatorname{mod}_{p_2}^{p_1}(\mathscr{G})}\ge\frac{1}{\operatorname{mod}_{p_2}^{p_1}(\mathscr{G}^1)}+\dots+\frac{1}{\operatorname{mod}_{p_2}^{p_1}(\mathscr{G}^{m_1})},$$

$$\operatorname{mod}_{p_1}^{p_1}(\mathscr{F}) = \operatorname{mod}_{p_1}^{p_1}(\mathscr{F}^1)+\dots+\operatorname{mod}_{p_1}^{p_1}(\mathscr{F}^{m_1}).$$

Те же шаги могут быть повторены далее для оценки $\operatorname{mod}_{p_1}^{p_1}(\mathscr{F})\cdot\operatorname{mod}_{p_2}^{p_1}(\mathscr{G})$, что приведет к требуемому неравенству. □

Следствие 3. *В силу доказательства леммы* 4 *очевидно, что*

$$\operatorname{mod}_{p_1}(\mathscr{F})\cdot\operatorname{mod}_{p_2}(\mathscr{G}) < \max_{i,j} a_{i,j},$$

если не все постоянные $a_{i,j}$ равны между собой.

Предыдущий результат порождает несколько следствий для максимальной пары слоений.

Следствие 4. *Пусть $G : M \to R_1 \times R_2$ — диффеоморфизм и p_1, p_2 — пара сопряженных чисел. Пусть слоения $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$, связанные диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$, (p_1, p_2)-максимальны. Тогда для произвольных открытых множеств $R_1' \subset R_1$, $R_2' \subset R_2$ пара $\mathscr{F}_1|_{G^{-1}(R_1'\times R_2')}$, $\mathscr{F}_2|_{G^{-1}(R_1'\times R_2')}$ также (p_1, p_2)-максимальна.*

Доказательство. Обозначим

$$R_1'' = \operatorname{int}(R_1\setminus R_1'),\quad R_2'' = \operatorname{int}(R_2\setminus R_2')$$

и

$$U_1^1 = G^{-1}(R_1'\times R_2'),\quad U_2^1 = G^{-1}(R_1'\times R_2''),$$

$$U_1^2 = G^{-1}(R_1''\times R_2'),\quad U_2^2 = G^{-1}(R_1''\times R_2'').$$

Тогда $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ и $\mathscr{F}_1|_{U_j^i}$, $\mathscr{F}_2|_{U_j^i}$, $i, j = 1, 2$, удовлетворяют предположениям леммы 4. Значит, здесь может быть применено следствие 3: предположив, что утверждение не выполняется, получаем противоречие с максимальностью слоения. □

Следующее утверждение можно считать эквивалентом свойства «локальной экстремальности» p-экстремальных функций для p-емкости четырехсторонника, которое обсуждалось в [17].

Теорема 8. *Пусть $G : M \to R_1 \times R_2$ — диффеоморфизм и p_1, p_2 — пара сопряженных чисел. Пусть слоения $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$, связанные диффеоморфизмом $(G; R_1, R_2)$, (p_1, p_2)-максимальны и $\int\limits_{L_1} JG_{\mathscr{F}_1^{\perp}}^{\frac{1}{p_1-1}} < \infty$ для всех $L_1 \in \mathscr{F}_1$. Тогда для любого открытого множества $R_1' \subset R_1$ имеем*

$$f_1'(x) = f_1(x)\left(\frac{\|f_1'\|_{L^{p_1}(M')}}{\|f_1\|_{L^{p_1}(M)}}\right)^{p_2} \quad \text{для } x \in M' = G^{-1}(R_1' \times R_2),$$

где f_1 и f_1' — p_1-экстремальные функции для $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_1|_{M'}$ соответственно.

Доказательство. Пусть R_1' — некоторое открытое подмножество R_1. По следствию 4 пара $\mathscr{F}_1|_{M'}$ и $\mathscr{F}_2|_{M'}$ также (p_1, p_2)-максимальна. Применяя теорему 4 к этим слоениям, а также к $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$, получаем существование соответствующих экстремальных функций f_1', f_2', f_1, f_2 наряду с соотношениями

$$f_2'(x) = \frac{f_1'(x)^{p_1-1}}{\|f_1'\|_{L^{p_1}(M')}^{p_1}}, \quad f_2(x) = \frac{f_1(x)^{p_1-1}}{\|f_1\|_{L^{p_1}(M)}^{p_1}}. \tag{28}$$

Поскольку $\mathscr{F}_2|_{M'}$ состоит из целых листьев $\mathscr{F}_2$, в силу формулы (4) $f_2'(x) = f_2(x)$ для всех $x \in M'$. Это равенство вместе с (28) и (7) приводит к требуемому утверждению. $\square$

4. Заключительные замечания

Обсуждение вопроса, является ли существование диффеоморфизма, удовлетворяющего набору условий, возникающих в следствии 2, необходимым условием максимальности пары более чем одномерных слоений, как в случае семейства кривых в $\mathbb{R}^2$, определенных в четырехстороннике (см. [8, 17]), выходит за рамки данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ahlfors L. V.* Lectures on quasiconformal mappings. Princeton, N.J.; Toronto; New York; London: Van Nostrand, 1966.
2. *Gehring F.* Quasiconformal mappings in space // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 69, N 2. P. 146–164.
3. *Heinonen J., Koskela P.* Quasiconformal mappings in metric spaces with controlled geometry // Acta Math. 1998. V. 181. P. 1–61.
4. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin: Springer-Verl., 1971. (Lect. Notes Math.; V. 229).
5. *HajŁasz P.* Sobolev spaces on metric measure spaces // Contemp. Math. 2003. V. 338. P. 173–218.
6. *Heinonen J.* Nonsmooth calculus // Bull. Amer. Math. Soc., New Ser. 1979. V. 44, N 2. P. 163–232.
7. *Rodin B.* The method of extremal length // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. V. 80. P. 587–606.
8. *Dymchenko Yu. V.* Equality of the capacity and module of a condenser on a surface // J. Math. Sci. New York. 2003. V. 118, N 1. P. 4795–4807.
9. *Hesse J.* A p-extremal length and p-capacity equality // Ark. Mat. 1975. V. 13. P. 131–144.
10. *Ziemer W. P.* Extremal length and p-capacity // Michigan Math. J. 1969. V. 16. P. 43–51.
11. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. 1957. V. 98. P. 171–219.
12. *Suominen K.* Quasiconformal maps in manifolds // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI. 1966. V. 393. P. 1–39.
13. *Ciska M.* Variation of the modulus of the foliation // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 401. P. 38–46.
14. *Pierzchalski A.* On the modulus of level sets of conjugate submersions // Differ. Geom. Appl. 2014. V. 36. P. 90–97.

15. *Kaźmierczak A., Pierzchalski A.* On some criterion of conformality // Balk. J. Geom. Appl. 2016. V. 21, N 1. P. 51–57.
16. *Pierzchalski A.* The k-module of level sets of differential mappings // Math. Inst. Polish Acad. Sci. 1979. P. 180–185.
17. *Романов А. С.* Емкостные соотношения в четырехстороннике // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 886–897.

Поступила в редакцию 12 марта 2019 г.
После доработки 12 марта 2019 г.
Принята к публикации 24 июля 2019 г.

Казмирчак Анна (Anna Kaźmierczak)
University of Lodz, Faculty of Mathematics and Computer Science,
Banacha 22, 90-238 Lodz, Poland
anna.kazmierczak@wmii.uni.lodz.pl