М. А. Шубин, Теория Фавара–Мухамадиева и псевдодифференциальные операторы,
*Докл. АН СССР*, 1975, том 225, номер 6, 1278–1280

Доклады Академии наук СССР
1975. Том 225, № 6

УДК 517.43 МАТЕМАТИКА

М. А. ШУБИН

# ТЕОРИЯ ФАВАРА — МУХАМАДИЕВА И ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

*(Представлено академиком С. Л. Соболевым 17 IX 1975)*

В работе устанавливается, что для эллиптического дифференциального оператора с гладкими почти-периодическими (п.-п.) коэффициентами классическое условие Фавара равносильно существованию обратного оператора, являющегося почти-периодическим псевдодифференциальным оператором определенного типа.

1. Пусть $A$ — дифференциальный оператор в $\mathbf{R}^n$ вида

$$A=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha, \tag{1}$$

где $x\in\mathbf{R}^n$, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha_j\geqslant 0$ — целые, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$, $D_j=i^{-1}\,\partial/\partial x_j$. Мы будем предполагать, что выполнены следующие условия:

а) $a_\alpha(x)$ — равномерные п.-п. функции на $\mathbf{R}^n$;

б) $|D^\beta a_\alpha(x)|\leqslant C_{\alpha\beta}$ для любого мультииндекса $\beta$ и при каждом $\alpha$ с $|\alpha|\leqslant m$;

в) оператор (1) равномерно эллиптичен, т. е. существует такое $\varepsilon>0$, что

$$\Big|\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha\Big|\geqslant\varepsilon|\xi|^m,\qquad \xi\in\mathbf{R}^n. \tag{2}$$

Отметим, что из условий а) и б) вытекает, что все производные $D^\beta a_\alpha(x)$ также являются равномерными п.-п. функциями на $\mathbf{R}^n$.

Введем оболочку $H(A)$ оператора $A$, состоящую из таких операторов $\tilde{A}=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\tilde{a}_\alpha(x)D^\alpha$, что существует такая последовательность $\{h_k\}$, $k=1,2,\ldots$ векторов из $\mathbf{R}^n$, что

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|a_\alpha(x+h_k)-\tilde{a}_\alpha(x)|=0,\qquad |\alpha|\leqslant m. \tag{3}$$

Заметим, что из (3) следует ввиду условия б) равномерная сходимость любых производных $D^\beta a_\alpha(x+h_k)$ при $k\to+\infty$, откуда в свою очередь вытекает, что любой оператор $\tilde{A}\in H(A)$ удовлетворяет условиям а), б), в).

Сформулируем теперь условие Фавара:

F) для любого $\tilde{A}\in H(A)$ уравнение $\tilde{A}u=0$ не имеет ограниченных решений.

Это условие впервые появилось в классической работе Фавара ([2]) в случае $n=1$, т. е. для обыкновенных дифференциальных уравнений. Фавар доказал, что это условие гарантирует равномерную почти-периодичность любого ограниченного решения $u(x)$ уравнения $Au=f$, где $f$ — равномерная п.-п. функция. Важное добавление к теории Фавара сделал Мухамадиев ([3]), доказавший в той же ситуации разрешимость уравнения $Au=f$ в классе ограниченных функций. Далее, теория Фавара и теорема о разрешимости перенесены Мухамадиевым на случай произвольного $n$ (см. ([4])), т. е. на случай уравнений с частными производными. В работе ([4]) доказано, в частности, что из условия (F) вытекает обратимость оператора $A$: $C_{m+\gamma}\to C_\gamma$, где $0<\gamma<1$, $C_\gamma$ — пространство ограниченных функций в $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем $\gamma$, $C_{m+\gamma}$ — пространство ограниченных функций в $\mathbf{R}^n$, у которых все производные порядка $\leqslant m$ ограничены, а производные порядка $m$ принадлежат $C_\gamma$.

Мы введем здесь еще пространство $C_b^\infty(\mathbf{R}^n)$, состоящее из функций $f(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, все производные которых ограничены, т. е. $|D^\alpha f(x)|\leqslant C_\alpha$ для любого мультииндекса $\alpha$ (постоянные $C_\alpha$, разумеется, зависят от $f$). Отметим, что всякое ограниченное решение $u$ уравнения $\tilde{A}u=0$ принадлежит $C_b^\infty(\mathbf{R}^n)$ в силу стандартной априорной оценки.

2. Мы будем использовать введенные в работе ([5]) классы псевдодифференциальных операторов $APL^m_{\rho,\delta}$, $APL^{-\infty}$ и соответствующие классы символов $APS^m_{\rho,}$, $APS^{-\infty}$. Включение $a(x,\xi)\in APS^m{}_\delta$ означает, что, во-первых, $\partial_\xi{}^\alpha\partial_x{}^\beta a(\cdot,\xi)$ для любых мультииндексов $\alpha$, $\beta$ является непрерывной функцией от $\xi\in\mathbf{R}^n$ со значениями в пространстве $CAP(\mathbf{R}_x{}^n)$ равномерных п.-п. функций от $n$-мерного переменного $x$, и, во-вторых, что выполнены оценки

$$|\partial_\xi{}^\alpha\partial_x{}^\beta a(x,\xi)|\leqslant C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}. \tag{4}$$

Здесь, как обычно, мы будем считать, что $0\leqslant\delta<1$ и $0<\rho\leqslant1$. Далее, по определению $APS^{-\infty}=\bigcap\limits_m APS^m_{1,0}$. Оператор $A=Op(a)$ с символом $a(x,\xi)$ определяется осциллирующим интегралом

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}a(x,\xi)u(y)\,dy\,d\xi, \tag{5}$$

где $x\cdot\xi$ означает обычное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$, $dy$ и $d\xi$ — меры Лебега в соответствующих $n$-мерных пространствах. Через $APL^m_{\rho,\delta}$ и $APL^{-\infty}$ обозначаются классы операторов вида $A=Op(a)$, где $a\in APS^m_{\rho,\delta}$ и $a\in APS^{-\infty}$ соответственно. Оператор $A\in APL^m_{\alpha,\delta}$ отображает $S(\mathbf{R}^n)$ в $S(\mathbf{R}^n)$ и $C_b^\infty(\mathbf{R}^n)$ в $C_b^\infty(\mathbf{R}^n)$ (см., например, ([5])).

Введем еще более узкий класс $APL_{\text{кл}}{}^m$ классических п.-п. псевдодифференциальных операторов, символы которых $a(x,\xi)\in APS^m_{1,0}$ допускают асимптотическое разложение по функциям $a_{m-j}(x,\xi)$, $j=0,1,\ldots$, однородным по $\xi$ порядков $m-j$, т. е.

$$a_{m-j}(x,t\xi)=t^{m-j}a_{m-j}(x,\xi),\quad t>0,\quad |\xi|\neq0. \tag{6}$$

Точнее, мы будем писать, что $A\in APL_{\text{кл}}{}^m$, если $A=Op(a)$, где $a(x,\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ и существует такой набор функций $a_{m-j}(x,\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times(\mathbf{R}^n\diagdown0))$, удовлетворяющих условию (6), таких, что $\partial_\xi{}^\alpha\partial_x{}^\beta a_{m-j}(\cdot,\xi)$ является для любых мультииндексов $\alpha$, $\beta$ непрерывной функцией от $\xi$ со значениями в $CAP(\mathbf{R}^n)$, причем если $\theta(\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\theta(\xi)=0$ при $|\xi|\leqslant1/2$ и $\theta(\xi)=1$ при $|\xi|\geqslant1$, то

$$a(x,\xi)-\sum_{j=0}^{N-1}\theta(\xi)a_{m-j}(x,\xi)\in APS^{m-N}_{1,0}$$

для любого натурального $N$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат.

Теорема 1. *Пусть оператор $A$ вида* (1) *удовлетворяет условиям* а), б), в).

*Тогда*

1) *если выполнено условие* (F), *то существует оператор $A^{-1}\in APL_{\text{кл}}{}^{-m}$, обратный к оператору $A$*;

2) *обратно, если существует оператор* $A^{-1}\in APL^{M}_{\rho,\delta}$ (*M — любое действительное число*, $0<\rho\leqslant 1$, $0\leqslant\delta<1$), *обратный к оператору A, то выполнено условие* (F).

Замечание 1. Факт взаимной обратности операторов $A$ и $A^{-1}$ удобнее всего понимать и проверять в пространствах $S(\mathbf{R}^n)$ или $C_b^\infty(\mathbf{R}^n)$, переводимых этими операторами в себя. Замыкание позволяет затем получать обращение $A$ в других пространствах. Например, таким образом можно доказать обратимость оператора $A$: $H_s(\mathbf{R}^n)\to H_{s-m}(\mathbf{R}^n)$, а также обратимость в ряде других пространств (см., например, шкалы пространств, рассмотренных Мухамадиевым [4]).

Замечание 2. Теорема 1 сохраняет силу для систем вида (1), если $a_\alpha(x)$ — $N\times N$-матрицы. При этом условие (2) надо заменить условием равномерной эллиптичности по Петровскому и, кроме того, потребовать выполнения одного из трех условий:

1) $a_\alpha(x)=a_\alpha=\text{const}$ при $|\alpha|=m$;

2) $n$ нечетно;

3) если $\lambda_j(x, \xi)$ — собственные значения матрицы $a_m(x, \xi)=\sum\limits_{|\alpha|=m}\xi^\alpha a_\alpha(x)$, то существует такое $\varphi_0$, что $\arg\lambda_j(x, \xi)\neq\varphi^0 \pmod{2\pi}$.

Это требование введено Мухамадиевым [4] и гарантирует отсутствие топологических препятствий к обратимости, автоматически исчезающих в скалярном случае.

3. Доказательство теоремы 1. Мы будем использовать тот факт, что при выполнении условий а), б), в) у оператора имеется параметрикс: такой оператор $B\in APL_{\text{кл}}^{-m}$, что

$$BA=I+T_1, \qquad AB=I+T_2, \tag{7}$$

где $T_j\in APL^{-\infty}$, $j=1, 2$ (см. [5, 6]).

Докажем теперь первое утверждение теоремы. Пусть выполнено условие (F). Мы воспользуемся результатом Мухамадиева [4] о существовании ограниченного оператора $A^{-1}$: $C_\gamma\to C_{m+\gamma}$, обратного к оператору $A$: $C_{m+\gamma}\to C_\gamma$. Из теоремы 2.2 работы [6] вытекает, что для доказательства включения $A^{-1}-B\in APL^{-\infty}$ достаточно проверить тот факт, что оператор $A^{-1}$ переводит $CAP(\mathbf{R}^n)\cap C_b^\infty(\mathbf{R}^n)$ в $CAP(\mathbf{R}^n)$. Но это очевидным образом следует из упомянутого результата Мухамадиева.

Докажем второе утверждение теоремы. Заметим, что если оператор $B=A^{-1}\in APL^{M}_{\rho,\delta}$ имеет символ $b(x, \xi)$ (т. е. $B=Op(b)$), то каждый из операторов $\tilde{A}$ с коэффициентами $\tilde{a}_\alpha(x)$, задаваемыми формулами (3), также имеет обратный оператор $\tilde{B}\in APL^{M}_{\rho,\delta}$ с символом

$$\tilde{b}(x, \xi)=\lim_{k\to+\infty} b(x+h'_k, \xi),$$

где $h_k'$ — подпоследовательность последовательности $h_k$ из (3). Учитывая, что $\tilde{B}$ переводит $C_b^\infty(\mathbf{R}^n)$ в $C_b^\infty(\mathbf{R}^n)$, мы сразу получаем справедливость условия (F). Теорема 1 доказана.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
26 VIII 1975

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Б. М. Левитан*, Почти-периодические функции, М., Гостехиздат, 1953. [2] *J. Favard*, Acta Math., v. 51, 31 (1927). [3] *Э. Мухамадиев*, ДАН, т. 196, № 1, 47 (1971). [4] *Э. Мухамадиев*, ДАН, т. 205, № 6, 1292 (1972). [5] *М. А. Шубин*, Матем. сб., т. 95 (137), № 4, 560 (1974). [6] *М. А. Шубин*, Тр. Московск. матем. общ., т. 35 (1975).