А. Г. Кусраев, О некоторых категориях и функторах булевозначного анализа, *Докл. АН СССР*, 1983, том 271, номер 2, 283–286

УДК 510.644 + 512.58 + 517.982 МАТЕМАТИКА

А.Г. КУСРАЕВ

О НЕКОТОРЫХ КАТЕГОРИЯХ И ФУНКТОРАХ БУЛЕВОЗНАЧНОГО АНАЛИЗА

(Представлено академиком С.Л. Соболевым 22 X 1982)

Наличие функториальной связи между каким-либо классом объектов и определенным его изображением в булевозначной модели составляет одну из важнейших методологических основ булевозначного анализа. Заметка посвящена систематическому изучению таких связей в духе программы Эйленберга–Маклейна. Общеизвестные термины и факты, используемые в тексте, содержатся в [1–7].

1. Перечислим основные категории и функторы, связанные с булевозначными моделями. На протяжении всей работы B – полная булева алгебра, $V^{(B)}$ – соответствующая отделимая булевозначная модель теории множеств [5–7]. Категории $\mathscr{V}$, $\mathscr{V}^{(B)}$ и $\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$ определяются так:

класс $\mathrm{Ob}\,\mathscr{V}$ – универсум фон Неймана V, а класс $\mathrm{Mor}\,\mathscr{V}$ – подкласс всех отображений с обычной суперпозицией;

класс $\mathrm{Ob}\mathscr{V}^{(B)}$ – булевозначный универсум $V^{(B)}$, для $A, B \in \mathrm{Ob}\mathscr{V}^{(B)}$ полагаем $H_{\mathscr{V}^{(B)}}(A, B) = \{\alpha \in V^{(B)} : [\![\alpha : A \to B]\!] = 1\}$ и для $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Mor}\mathscr{V}^{(B)}$ имеем $\alpha = \beta \circ \gamma$ в том и только том случае, если $[\![\alpha = \beta \circ \gamma]\!] = 1$;

класс $\mathrm{Ob}\,\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$ состоит из всевозможных подмножеств $V^{(B)}$, а класс $\mathrm{Mor}\,\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$ из всех экстенсиональных отображений с обычной суперпозицией.

Пусть отображение $\mathscr{F}^{\vee}: \mathscr{V} \mapsto \mathscr{V}^{(B)}$ соответствует каноническому вложению $(\cdot)^{\vee}$ класса V в $B^{(B)}$, а отображения $\mathscr{F}^{\downarrow}: \mathscr{V}^{(B)} \to \mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$ и $\mathscr{F}^{\uparrow}: \mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)} \to \mathscr{V}^{(B)}$ определяются соответственно операциями спуска и подъема: $\mathscr{F}^{\downarrow}(\mathscr{X}) = \{x \in V^{(B)} : [\![x \in \mathscr{X}]\!] = 1\}$, $\mathrm{dom}\,\mathscr{F}^{\uparrow}(X) = X$, $\mathrm{rng}\,\mathscr{F}^{\uparrow}(X) = \{1\}$, где $\mathscr{X} \in V^{(B)}$ и $X \subset V^{(B)}$ (имеется в виду естественное распространение этих отображений на морфизмы).

Рассмотрим полную подкатегорию $C\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$ категории $\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$, состоящую из циклических подмножеств, т.е. из подмножеств $V^{(B)}$, содержащих любые перемешивания произвольных своих подсемейств. Обозначим символом $\mathscr{F}_{\mathrm{cyc}}$ отображение из $\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$ в $C\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$, сопоставляющее каждому множеству X из $\mathrm{Ob}\mathscr{P}\mathscr{V}^{(B)}$ наименьшее циклическое множество $\mathscr{F}_{\mathrm{cyc}}(X)$, его содержащее, а отображению α: $X \to Y$ – единственное его продолжение до экстенсионального отображения из $\mathscr{F}_{\mathrm{cyc}}(X)$ в $\mathscr{F}_{\mathrm{cyc}}(Y)$. Рассмотрим также категорию $CB(\mathscr{V})$ полных B-множеств из V и экстенсиональных отображений (см. [8]). Здесь определяем B-множество X как множество с B-метрикой, т.е. с отображением d: $X \to B$, удовлетворяющим при всех $x_1, x_2, x_3 \in X$ условиям: 1) $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$; 2) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ и 3) $d(x_1, x_2) \leqslant d(x_1, x_3) \vee d(x_3, x_2)$ (часто именно так и появляются B-множества в приложениях). При этом экстенсиональные отображения – в точности сжимающие в смысле B-метрик отображения, а B-полнота X означает его цикличность в следующем смысле: для любого разбиения единицы $(b_\xi) \subset B$ и произвольного $(x_\xi) \subset X$ существует единственный элемент $x \in X$ такой, что $d(x, x_\xi) b_\xi = 0$ при всех ξ. Для $X \in \mathrm{Ob}\,CB(\mathscr{V})$ с B-метрикой d определим отношение эквивалентности $\sim$ на $\mathscr{F}^{\vee}(X)$ внутри $V^{(B)}$ по формуле

$$\sim = \{(x_1, x_2) \in \mathscr{F}^{\vee}(X) \times \mathscr{F}^{\vee}(X);\ \exists b \in \chi (b d^{\vee}(x_1, x_2) = 0)\},$$

где $\chi \in V^{(B)}$ – фильтр на $\mathscr{F}^{\vee}(B)$, задаваемый отображением $\{\langle b^{\vee}, b\rangle : b \in B\}$.

Положим $\mathcal{F}_{\mathrm{st}}(X) = \mathcal{F}^{\vee}(X)/\sim$. Поскольку всякое сжимающее отображение α из X в Y допускает снижение до отображения $\mathcal{F}_{\mathrm{st}}(\alpha)$ из $\mathcal{F}_{\mathrm{st}}(X)$ в $\mathcal{F}_{\mathrm{st}}(Y)$, то получаем отображение $\mathcal{F}_{\mathrm{st}}\colon CB(\mathcal{V}) \to \mathcal{V}^{(B)}$.

Нетрудно проверить, что все отображения $\mathcal{F}^{\vee}$, $\mathcal{F}^{\downarrow}$, $\mathcal{F}^{\uparrow}$, $\mathcal{F}_{\mathrm{cyc}}$ и $\mathcal{F}_{\mathrm{st}}$ — ковариантные функторы; их называют функторами канонического вложения, спуска, подъема, циклической оболочки и Соловэя—Тенненбаума соответственно. Для ограничения этих основных функторов на подкатегории сохраним те же обозначения и наименования. Отметим еще функтор $\mathrm{Step}(B)\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, сопоставляющий множеству $X \in V$ совокупность всех формальных X-значных простых функций $(b_\xi, x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ на B, где $(x_\xi) \subset X$ и (b_ξ) — разбиение единицы в B.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) функтор спуска $\mathcal{F}^{\downarrow}$ сопряжен справа функтору канонического вложения $\mathcal{F}^{\vee}$, а функтор $\mathcal{F}^{\downarrow}\mathcal{F}^{\vee}$ естественно изоморфен функтору $\mathrm{Step}(B)$;

(2) функтор спуска $\mathcal{F}^{\downarrow}$ определяет изоморфизм категорий $\mathcal{V}^{(B)}$ и $C\mathcal{P}\mathcal{V}^{(B)}$, причем $\mathcal{F}^{\downarrow -1}$ совпадает с ограничением $\mathcal{F}^{\uparrow}$ на $C\mathcal{P}\mathcal{V}^{(B)}$;

(3) $C\mathcal{P}\mathcal{V}^{(B)}$ — полная рефлективная подкатегория категории $\mathcal{P}\mathcal{V}^{(B)}$ с функтором $\mathcal{F}_{\mathrm{cyc}}$ в качестве рефлектора, причем $\mathcal{F}_{\mathrm{cyc}} = \mathcal{F}^{\downarrow}\mathcal{F}^{\uparrow}$;

(4) функтор спуска $\mathcal{F}^{\downarrow}$ и функтор Соловэя—Тенненбаума $\mathcal{F}_{\mathrm{st}}$ являются сопряженными (справа) между собой и определяют эквивалентность категорий $\mathcal{V}^{(B)}$ и $CB(\mathcal{V})$.

2. Пусть σ — некоторая сигнатура. Алгебраическую систему сигнатуры σ будем называть B-расширенной, если носитель системы — B-полное множество, предикаты — B-полные подмножества соответствующих степеней носителя и операции — сжимающие в смысле B-метрики (или экстенсиональные в смысле B-значного равенства) отображения (ср. [8, 9]). Если $\mathcal{X}$ — алгебраическая система сигнатуры $\sigma^{\vee}$ внутри $V^{(B)}$, то $\mathcal{F}^{\downarrow}(\mathcal{X})$ — B-расширенная алгебраическая система сигнатуры σ. Будем рассматривать формулы φ языка второго порядка сигнатуры σ. Для всякой такой замкнутой формулы φ и B-расширенной алгебраической системы X той же сигнатуры можно определить значение $[\![\varphi]\!]_X \in B$, как в [8]. Если, например, символ предикатного переменного $P^{(i)}$ входит свободно в ψ и φ имеет вид $\forall P^{(i)}\psi$, то $[\![\varphi]\!]_X = \bigwedge\{[\![\psi(R)]\!]_X\colon R \in \mathcal{P}^{(i)}(X)\}$, где $\mathcal{P}^{(i)}(X)$ — совокупность всех B-полных подмножеств в X^i. Говорят, что формула φ сигнатуры σ истинна на алгебраической системе X, если $[\![\varphi]\!]_X = 1$.

Рассмотрим алгебраическую систему $\mathcal{X}$ сигнатуры $\sigma^{\vee}$ внутри $V^{(B)}$ и замкнутую формулу φ сигнатуры σ. Выбрав $\{0, 1\} \in V^{(B)}$ в качестве множества модальностей, можно определить значение формулы φ и истинность φ на $\mathcal{X}$ (все внутри $V^{(B)}$).

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — некоторая совокупность замкнутых формул сигнатуры σ. Введем две категории алгебраических систем $\mathrm{BAS}(\mathfrak{A})$ и $\mathrm{AS}^{(B)}(\mathfrak{A})$. Объекты $\mathrm{BAS}(\mathfrak{A})$ — класс B-расширенных алгебраических систем, на каждой из которых истинны все формулы из $\mathfrak{A}$, морфизмы $\mathrm{BAS}(\mathfrak{A})$ — сжимающие гомоморфизмы алгебраических систем. Объекты $\mathrm{AS}^{(B)}(\mathfrak{A})$ — такие $\mathcal{X} \in V^{(B)}$, что $[\![\mathcal{X}$ — алгебраическая система сигнатуры $\sigma^{\vee}]\!] = [\![$ каждая из формул $\mathfrak{A}$ истинна на $\mathcal{X}]\!] = 1$; $\alpha \in \mathrm{Mor}\, AS^{(B)}(\mathfrak{A})$ в том и только том случае, если $[\![\alpha$ — гомоморфизм алгебраических систем $]\!] = 1$.

Теорема 2. *Функторы спуска $\mathcal{F}^{\downarrow}$ и Соловэя—Тенненбаума $\mathcal{F}_{\mathrm{st}}$ определяют эквивалентность категорий алгебраических систем* $\mathrm{BAS}(\mathfrak{A})$ *и* $\mathrm{AS}^{(B)}(\mathfrak{A})$.

3. Пусть E — расширенное K-пространство с фиксированной единицей, рассматриваемое с естественной структурой решеточно упорядоченного кольца. Для

простоты будем считать, что $E = \mathcal{F}^{\downarrow}(\mathcal{R})$, где $\mathcal{R}$ – поле вещественных чисел внутри $V^{(B)}$. Будем изучать двойственности расширенных E-модулей (см. [10, 11]), причем отметим, что расширенный E-модуль является полным B-множеством, а каноническая билинейная форма двойственности всегда экстенсиональна. Определим категорию DBM(E) так: Ob DBM – класс двойственностей расширенных E-модулей и для любой пары $\langle X, X'\rangle$, $\langle Y, Y'\rangle$ объектов этой категории морфизм из $\langle X, X'\rangle$ в $\langle Y, Y'\rangle$ состоит из пары E-линейных операторов $S\colon X \to Y$ и $S'\colon Y' \to X'$ таких, что $\langle Sx, y'\rangle = \langle x, S'y'\rangle$, $(x, y') \in X \times Y'$. Композиция таких пар определяется покомпонентно. Рассмотрим еще категорию $D\mathrm{Vect}^{(B)}$ двойственностей вещественных векторных пространств в модели $V^{(B)}$. Объекты этой категории – класс таких $Z \in V^{(B)}$, что $[\![Z = \langle \mathcal{X}, \mathcal{X}'\rangle$ – двойственность векторных пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}']\!] = 1$. Под морфизмом из $\langle \mathcal{X}, \mathcal{X}'\rangle$ в $\langle \mathcal{Y}, \mathcal{Y}'\rangle$ понимается элемент $\gamma \in V^{(B)}$ такой, что $[\![\gamma = \langle\alpha, \beta\rangle]\!] = [\![\alpha\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ – линейный оператор$]\!] = [\![\beta\colon \mathcal{Y}' \to \to \mathcal{X}'$ – сопряженный к $\alpha]\!] = 1$. Композиция морфизмов $\langle\alpha, \beta\rangle = \langle\alpha_1, \beta_1\rangle \circ \langle\alpha_2, \beta_2\rangle$ определяется из условий $[\![\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2]\!] = 1$, $[\![\beta = \beta_2 \circ \beta_1]\!] = 1$.

Теорема 3. *Функторы $\mathcal{F}^{\downarrow}$ и $\mathcal{F}_{\mathrm{st}}$ определяют эквивалентность категорий скалярных двойственностей $D\mathrm{Vect}^{(B)}$ внутри $V^{(B)}$ и векторных двойственностей* DBM(E).

4. Пространством Банаха-Канторовича (или пространством типа B_K) называют (b_k)-полное решеточно нормированное пространство с разложимой нормой (см. [1, 11]). Пусть BK(E) – категория, объекты которой – пространства Банаха–Канторовича с E-значной нормой, а морфизмы – сжимающие (в смысле векторной нормы) линейные операторы; композиция обычная. Рассмотрим также категорию $\mathrm{Ban}_1^{(B)}$ банаховых пространств внутри $V^{(B)}$. Объекты $\mathrm{Ban}_1^{(B)}$ – те и только те $\mathcal{X} \in V^{(B)}$, для которых $[\![\mathcal{X}$ – банахово пространство$]\!] = 1$, а для $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Ban}_1^{(B)}$ множество $H_{\mathrm{Ban}_1^{(B)}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ состоит из всех $\alpha \in V^{(B)}$ таких, что $[\![\alpha\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ – линейный ограниченный оператор и $\|\alpha\| \leqslant 1]\!] = 1$. Для $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Mor}\,\mathrm{Ban}_1^{(B)}$ равенство $\alpha = \beta \circ \gamma$ равносильно соотношению $[\![\alpha = \beta \circ \gamma]\!] = 1$.

Всякому банахову пространству X можно сопоставить такой элемент $\mathcal{G}(X) \in \in V^{(B)}$, что $[\![\mathcal{G}(X)$ – пополнение метрической группы $\mathcal{F}^{\vee}(X)]\!] = 1$, а если T – линейный сжимающий оператор из X в банахово пространство Y, то для некоторого $\mathcal{G}(T) \in V^{(B)}$ имеем $[\![\mathcal{G}(T)\colon \mathcal{G}(X) \to \mathcal{G}(Y)$ – продолжение по непрерывности оператора $\mathcal{F}^{\vee}(T)\colon \mathcal{F}^{\vee}(X) \to \mathcal{F}^{\vee}(Y)]\!] = 1$. Тогда $\mathcal{G}(X)$ – банахово пространство (см. [13]), а $\mathcal{G}(T)$ – линейный сжимающий оператор из $\mathcal{G}(X)$ в $\mathcal{G}(Y)$ внутри $V^{(B)}$. Таким образом, возникает ковариантный функтор $\mathcal{G}$ из категории Ban_1 банаховых пространств и линейных сжатий в категорию $\mathrm{Ban}_1^{(B)}$. Отметим также, что функтор спуска $\mathcal{F}^{\downarrow}$ действует из $\mathrm{Ban}_1^{(B)}$ в $\mathrm{BK}_1(E)$.

На алгебраическом тензорном произведении $X \otimes E$ банахова пространства X и K-пространства E можно ввести E-значную норму

$$p(z) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{k} e_i\|x_i\|\colon z = \sum_{i=1}^{k} x_i \otimes e_i,\ x_1, x_2, \ldots, x_k \in X,\ e_1, e_2, \ldots, e_k \in E\right\}.$$

Пополнение $X \otimes E$ по векторной норме p обозначим $\Phi_E(X)$. Если T – линейное сжатие из X в банахово пространство Y, то положим $\Phi_E(T) = T \otimes I_E$. Нетрудно видеть, что Φ_E – ковариантный функтор из Ban_1 в BK(E).

Теорема 4. *Справедливы утверждения*:

1) *функторы $\mathcal{F}_{\mathrm{st}}$ и $\mathcal{F}^{\downarrow}$ устанавливают эквивалентность категорий $BK_1(E)$ пространств Банаха–Канторовича и $\mathrm{Ban}_1^{(B)}$ банаховых пространств внутри $V^{(B)}$*;

2) *функторы* $\mathcal{F}^{\downarrow}\mathcal{G}$ *и* Φ_E *естественно изоморфны.*

Отметим, что другое описание функтора $\mathcal{F}^{\downarrow}\mathcal{G}$ можно извлечь из [14] в терминах вектор-функций.

5. Пусть X – некоторое K-пространство, T – порядково непрерывный положительный оператор из X в E. Будем говорить, что пара (X, T) удовлетворяет условию (B), если T существенно положителен и для любого фильтрующегося вверх множества $C \subset X^+$ из ограниченности $T[C]$ следует ограниченность $T[C]$ в E. Рассмотрим три категории интегралов Int, $\mathrm{Int}(E)$ и $\mathrm{Int}^{(B)}$. Объекты категории $\mathrm{Int}(E)$ – всевозможные пары (X, T), где T – оператор Магарам (см. [11, 12]) и (X, T) удовлетворяет условию (B); морфизм из объекта (X, T) в объект (X', T') – замена переменного в интеграле, т.е. порядково непрерывный решеточный гомоморфизм α из X в X' такой, что $T = T'\alpha$. Категория Int совпадает по определению с $\mathrm{Int}(E)$ при $E = R$. Объекты категории $\mathrm{Int}^{(B)}$ – такие $u \in V^{(B)}$, что $[\![u = \langle \mathcal{X}, f\rangle]\!] = [\![u$ удовлетворяет условию (B)$]\!] = [\![f$ – порядково непрерывный положительный функционал на $\mathcal{X}]\!] = 1$. Множество $H_{\mathrm{Int}^{(B)}}[\langle \mathcal{X}, f\rangle, \langle \mathcal{X}', f'\rangle]$ состоит в точности из тех $\alpha \in V^{(B)}$, для которых $[\![\alpha$ – порядково непрерывный решеточный гомоморфизм из X в $X']\!] = [\![f = f'\alpha]\!] = 1$.

Для всякого скалярного интеграла (X, f) можно на X определить аддитивную норму с помощью f, следовательно, так же, как и в п. 4, существуют такие $\mathcal{X}$, $g \in V^{(B)}$, что $1 = [\![\mathcal{X}$ – пополнение $\mathcal{F}^{\vee}(X)]\!] = [\![g$ – продолжение $\mathcal{F}^{\vee}(f)$ по непрерывности$]\!]$. Нетрудно видеть, что при этом $\langle \mathcal{X}, g\rangle \in \mathrm{Int}^{(B)}$. Возникающий таким образом функтор из Int в $\mathrm{Int}^{(B)}$ обозначим символом $\mathcal{G}_{\mathrm{int}}$.

Наконец, определим функтор Ψ_E из Int в $\mathrm{Int}(E)$ соотношениями $\Psi_E(X, f) = (\Phi_E(X), f \otimes I_E)$ и $\Psi_E(\alpha) = \alpha \otimes I_E$ для $(X, f) \in \mathrm{Ob\,Int}$ и $\alpha \in \mathrm{Mor\,Int}$.

Теорема 5. *Справедливы следующие утверждения*:

(1) *функторы спуска и Соловэя–Тенненбаума определяют эквивалентность категорий векторных интегралов* $\mathrm{Int}(E)$ *и скалярных интегралов* $\mathrm{Int}^{(B)}$ *внутри* $V^{(B)}$;

(2) *функтор* $\mathcal{F}^{\downarrow}\mathcal{G}_{\mathrm{int}}$ *естественно изоморфен функтору* Ψ_E.

В заключение отметим, что из теоремы 3–5 можно извлечь различные следствия для конкретных объектов функционального анализа. Некоторые такие факты содержатся, например, в [10–12].

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР,
Новосибирск

Поступило
22 XI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.; Л., 1950. 2. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1978. 3. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М., 1970. 4. *Цаленко И.Ш., Шульгейфер Е.Г.* Основы теории категорий. М., 1974. 5. *Манин Ю.И.* Доказуемое и недоказуемое. М., 1979. 6. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М., 1973. 7. *Bell I.L.* Boolean-valued models and independence proofs in set theory. Oxford, 1979. 8. *Fourman M.P., Scott D.S.* – Lect. Notes in Math., 1977, № 753, p. 302–401. 9. *Solovay R., Tennenbaum S.* – Ann. Math., 1973, vol. 94, № 2, p. 201–245. 10. *Кусраев А.Г.* Некоторые применения теории булевозначных моделей в функциональном анализе. Новосибирск, 1982. 11. *Кусраев А.Г.* – ДАН, 1982, т. 267, № 6. 12. *Кусраев А.Г.* – ДАН, 1982, т. 265, № 6, с. 1312–1316. 13. *Гордон Е.И.* – ДАН, 1981, т. 258, № 4, с. 777–780. 14. *Гордон Е.И., Любецкий В.А.* Булевы расширения равномерных структур. Деп. ВИНИТИ, № 711–80, 1980.