Н. Г. Мощевитин, О распределении дробных долей системы линейных функций, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1990, номер 4, 26–31

В заключение автор выражает признательность профессору В. И. Пономареву за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пономарев В. И. О метрических пространствах и связанных с ними непрерывных отображениях//Докл. АН СССР. 1963. **153**, № 5. 1013—1015.
2. Mill J. van, Woods A. Perfect images of zerodimensional separable metric spaces//Can. Math. Bull. 1982. **25**, N 1. 41—47.
3. Островский А. В. К вопросу Л. В. Келдыш о структуре борелевских множеств//Матем. сб. 1986. **131**, № 3. 323—346.
4. Steel J. R. Analytic sets and borel isomorfisms//Fund. math. 1980. **108**. 83—88.
5. Engelen F. van. Homogeneous Borel sets of ambigious class two//Trans. Amer. Math. Soc. 1985. **290**, N 1. 1—39.
6. Engelen F. van. Homogeneous Borel sets//Proc. Amer. Math. Soc. 1986. **96**. N 4. 673—694.
7. Медведев С. В. Некоторые свойства k-борелевских множеств//Бакинская междунар. топол. конф.: Тез. сообщ. Ч. II. Баку, 1987. 190.
8. Куратовский К. Топология, т. 1. М., 1966.
9. Вайнштейн И. А. О замкнутых отображениях метрических пространств//Докл. АН СССР. 1947. **57**. 319—321.
10. Тайманов А. Д. О замкнутых отображениях, II//Матем. сб. 1960. **52**. 579—588.
11. Saint-Raymond J. Fonctions Boréliennes sur un quotient//Bull. Sci. Math. 1976. **100**. 141—147.
12. Hansell R. W. On the non-separable theory of Borel and Souslin sets//Bull. Amer. Math. Soc. 1972. **78**, N 2. 236—241.
13. Stone A. H. Non-separable Borel sets//Gen. Topol. and Appl. 1972. **2**, N 3. 249—270.
14. Чобан М. М. Многозначные отображения и борелевские множества//Докл. АН СССР. 1968. **182**, № 3. 514—517.
15. Jayne J. E., Rogers C. A. The invariance of the absolute Borel classes//Res. Notes Math. 1982. **57**. 118—151.

Поступила в редакцию
13.09.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1990. № 4

УДК 511

Н. Г. Мощевитин

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Введение. В настоящей работе изучается характер распределения дробных долей системы функций $\alpha_1 x, \ldots, \alpha_s x$; $s \geqslant 1$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — действительные числа, линейно независимые вместе с единицей над $\mathbf{Z}$. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_s \in (0,1)$. Обозначим через $N_q(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ число целых x, удовлетворяющих соотношениям

$$\{\alpha_1 x\} < \gamma_1, \ldots, \{\alpha_s x\} < \gamma_s;\ 1 \leqslant x \leqslant q.$$

Определим

$$r_q = \sup_{\gamma_1, \ldots, \gamma_s} |N_q(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) - \gamma_1 \ldots \gamma_s q|.$$

Согласно знаменитой теореме Г. Вейля $r_q = o(q)$, $q \to \infty$.

Гипотеза. Существуют положительные константы C и ε, не зависящие от $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, такие, что неравенство

$$r_q \leqslant C q^{1-\varepsilon}$$

имеет бесконечно много решений в натуральных q.

При $s=1$ для бесконечной последовательности натуральных q справедливо неравенство $r_q \leqslant 2$ (достаточно в качестве q брать знаменатели подходящих к α_1 дробей). Таким образом, при $s=1$ утверждение гипотезы выполняется с $\varepsilon=1$ и $C=2$.

Пусть s произвольно, а числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ таковы, что

$$\begin{gathered} \exists C_1, \gamma > 0 \ \forall m_1, \ldots, m_s \in \mathbf{Z}, \ |m_1| + \ldots + |m_s| \neq 0: \\ \|m_1\alpha_1 + \ldots + m_s\alpha_s\| > C_1 (\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{-\gamma}, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\overline{m}=\max\{|m|, 1\}$, $\|\zeta\|$ — расстояние от ζ до ближайшего целого. (Соотношение такого вида в приложениях получило название условия «сильной несоизмеримости» набора $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$.) Тогда согласно [1] $r_q = O(\ln^{s+1} q)$, если $\gamma=1$, и $r_q = O\left(q^{1-\frac{1}{(\gamma-1)s+1}}\right)$, если $\gamma>1$. Поскольку для почти всех (в смысле меры Лебега в $\mathbf{R}^s$) наборов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ имеет место оценка

$$\begin{gathered} \|m_1\alpha_1 + \ldots + m_s\alpha_s\| > C_1 (\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \ln^{\beta} (\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s + 1))^{-1}; \ C_1, \beta > 0 \\ \forall m_1, \ldots, m_s : |m_1| + \ldots + |m_s| \neq 0 \end{gathered}$$

(о такого рода результатах см., например, [2]), то для почти всех наборов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ утверждение гипотезы выполняется с произвольными фиксированными $C>0$ и $0<\varepsilon<1$.

В настоящей работе гипотеза доказывается в ряде случаев, когда оценка снизу линейной формы $\|m_1\alpha_1 + \ldots + m_s\alpha_s\|$ вида (1) не имеет места. Первоначально результаты были получены автором при изучении теоретико-числовыми методами определенных динамических систем [3, 4].

2. Формулировки результатов. Теорема 1. *Пусть $s=2$ и числа α_1, α_2 удовлетворяют следующим условиям:*

(i) $1, \alpha_1, \alpha_2$ *линейно независимы над* $\mathbf{Z}$;

(ii) *существуют константы $C_2>0$ и $\delta>1$, возможно, зависящие от α_1, α_2, такие, что* $\forall q \in \mathbf{N}\ \exists j \in \{1; 2\}$: $\|q\alpha_j\| > C_2 q^{-\delta}$.

Пусть $\rho = (\delta+1)/(8\delta^2+4\delta+1)$. Тогда для произвольного положительного ε неравенство

$$r_q < q^{1-\rho+\varepsilon}$$

имеет бесконечно много решений в натуральных q.

Замечание. По-видимому, с помощью предлагаемых рассуждений можно показать, что при достаточно большом β_1 неравенство $r_q < q^{1-\rho} \ln^{\beta_1} q$ имеет бесконечно много решений в числах $q \in \mathbf{N}$.

В ряде случаев утверждение гипотезы можно доказать, потребовав наличия у чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ приближений специального вида:

Теорема 2. *Пусть числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$; $s \geqslant 2$, обладают следующим свойством: система неравенств*

$$\left|\alpha_j - \frac{a_j}{p_j\tau_j}\right| < M (p\tau_1 \ldots \tau_s)^{-1-\frac{2}{s}}; \ j=1, \ldots, s,$$

где $p=[p_1, \ldots, p_s]$, $M>0$ — константа, имеет бесконечно много решений в числах

$$a_1, \ldots, a_s \in \mathbf{Z}; \ p_1, \ldots, p_s; \ \tau_1, \ldots, \tau_s \in \mathbf{N},$$

таких, что $\tau=\min\limits_j \tau_j$ *принимает сколь угодно большие значения и*

$$(a_i, \tau_i)=1 \ \forall\, i=1, \ldots, s;$$

$$(p_i, \tau_j)=(\tau_i, \tau_j)=1 \ \forall\, i, j: i\neq j;$$

$$\tau_j\leqslant K\tau \ln^{\beta_2}\tau\, \forall j; \ p\leqslant K\ln^{\beta_2}\tau \ (K, \beta_2>0 \text{—константы}).$$

Тогда существует константа K_1, *такая, что неравенство*

$$r_q<K_1 q^{1-\frac{1}{s}}(\ln q)^{\beta_2+s}$$

имеет бесконечно много решений в натуральных q.

Замечание. Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, обладающие указанным в теореме 2 свойством, линейно независимы над $\mathbf{Z}$. Множество таких наборов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ всюду плотно в $\mathbf{R}^s$, имеет мощность континуум и лебегову меру нуль. Линейная форма $\|m_1\alpha_1+\ldots+m_s\alpha_s\|$ для векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ из указанного множества не допускает оценки снизу, подобной (1), и может быть сделана сколь угодно малой по порядку.

Схематическое доказательство теоремы 1 приводится в следующем пункте. Доказательство теоремы 2 основано на использовании теоремы Эрдеша—Турана—Коксмы (см. [1]) и рассуждений, аналогичных проведенным в [3].

3. Доказательство теоремы 1. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Будем предполагать, что во всех рассматриваемых линейных формах $m_0+m_1\alpha_1+m_2\alpha_2$ коэффициент m_0 определен из соотношения

$$\|m_1\alpha_1+m_2\alpha_2\|=|m_0+m_1\alpha_1+m_2\alpha_2|.$$

Лемма 1. *Пусть непропорциональные линейные формы*

$$m_0+m_1\alpha_1+m_2\alpha_2 \text{ и } m_0'+m_1'\alpha_1+m_2'\alpha_2$$

удовлетворяют соотношению

$$|m_0+m_1\alpha_1+m_2\alpha_2|\geqslant|m_0'+m_1'\alpha_1+m_2'\alpha_2|.$$

Тогда существует такая положительная константа C_3, *что*

$$\max\{\overline{m}_1\overline{m}_2, \overline{m}_1\overline{m}_2\}\geqslant C_3\,|m_0+m_1\alpha_1+m_2\alpha_2|^{-\frac{1}{2\delta+1}}.$$

Для доказательства леммы достаточно линейной комбинацией форм $m_0+m_1\alpha_1+m_2\alpha_2$ и $m_0'+m_1'\alpha_1+m_2'\alpha_2$ построить совместные приближения к числам α_1, α_2 и использовать условие (ii).

Лемма 1 позволяет утверждать, что линейные формы

$$m_0+m_1\alpha_1+m_2\alpha_2, \ (m_0, m_1, m_2)=1,$$

допускающие оценку

$$|m_0+m_1\alpha_1+m_2\alpha_2|<(\overline{m}_1\overline{m}_2)^{-\gamma}; \ \gamma=(2\delta+1)(1+\varepsilon_1), \ \varepsilon_1>0,$$

и соответствующие им значения произведения $\overline{m}_1\overline{m}_2$ при условии $\max\{|m_1|, |m_2|\}>C_4$ располагаются в виде последовательностей

$$|m_0(1)+m_1(1)\alpha_1+m_2(1)\alpha_2|>\ldots>|m_0(\nu)+m_1(\nu)\alpha_1+$$
$$+m_2(\nu)\alpha_2|>|m_0(\nu+1)+m_1(\nu+1)\alpha_1+m_2(\nu+1)\alpha_2|>\ldots, \quad (2)$$

$$\overline{m_1(1)}\ \overline{m_2(1)} < \ldots < \overline{m_1(\nu)}\ \overline{m_2(\nu)} < \overline{m_1(\nu+1)}\,\overline{m_2(\nu+1)} < \ldots$$

и, кроме того,

$$\nu < C_5 \ln(\overline{m_1(\nu)}\,\overline{m_2(\nu)}). \tag{3}$$

Пусть

$$\varkappa = \frac{8\delta^2 + 4\delta + 1}{8\delta^2 + 12\delta + 4}, \quad 0 < \varkappa < 1. \tag{4}$$

Следующее утверждение является переформулировкой хорошо известного принципа Дирихле.

Лемма 2. *Для произвольного* $\nu \geqslant 1$ *найдется целое* q_ν *из интервала*

$$1 \leqslant q_\nu \leqslant |m_0(\nu) + m_1(\nu)\alpha_1 + m_2(\nu)\alpha_2|^{-2\varkappa},$$

такое, что

$$\|q_\nu \alpha_j\| \leqslant |m_0(\nu) + m_1(\nu)\alpha_1 + m_2(\nu)\alpha_2|^{\varkappa} \leqslant q_\nu^{-1/2}; \ j = 1, 2.$$

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся теоремой Эрдеша—Турана—Коксмы (см. [1]): для произвольного $Q \in \mathbf{N}$

$$r_q < C_6 \left(\frac{q}{Q} + \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ \max\{|m_1|, |m_2|\} < Q}}{}' \frac{1}{\overline{m}_1 \overline{m}_2} \left| \sum_{k=1}^{q} e^{2\pi i (m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2)k} \right| \right).$$

Зафиксируем $\nu \geqslant 1$, положим $q = q_\nu$,

$$Q = [C_3^{1/2} q_\nu^{\frac{1}{4\varkappa(2\delta+1)}}]. \tag{5}$$

Разобьем сумму, стоящую в правой части неравенства теоремы Эрдеша—Турана—Коксмы, на три слагаемых:

$$\sum_{\substack{m_1, m_2 \\ \max\{|m_1|, |m_2|\} < Q}}{}' \frac{1}{\overline{m}_1 \overline{m}_2} \left| \sum_{k=1}^{q_\nu} e^{2\pi i (m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2)k} \right| = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2,$$

где

$$\sigma_0 = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ \max\{|m_1|, |m_2|\} \leqslant C_4}}{}' \frac{1}{\overline{m}_1 \overline{m}_2} \left| \sum_{k=1}^{q_\nu} e^{2\pi i (m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2)k} \right|,$$

$$\sigma_1 = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ C_4 < \max\{|m_1|, |m_2|\} < Q \\ \|m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2\| \geqslant (\overline{m}_1 \overline{m}_2)^{-\gamma}}} \frac{1}{\overline{m}_1 \overline{m}_2} \left| \sum_{k=1}^{q_\nu} e^{2\pi i (m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2)k} \right|,$$

$$\sigma_2 = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ C_4 \leqslant \max\{|m_1|, |m_2|\} \leqslant Q \\ \|m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2\| < (\overline{m}_1 \overline{m}_2)^{-\gamma}}} \frac{1}{\overline{m}_1 \overline{m}_2} \left| \sum_{k=1}^{q_\nu} e^{2\pi i (m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2)k} \right|.$$

Очевидно

$$\sigma_0 < C_7. \tag{6}$$

Далее заметим, что

$$\left|\sum_{k=1}^{q_\nu} e^{2\pi i(m_1\alpha_1+m_2\alpha_2)k}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\,\frac{\|(m_1\alpha_1+m_2\alpha_2)\,q_\nu\|}{\|m_1\alpha_1+m_2\alpha_2\|}. \tag{7}$$

Используя лемму 2 и неравенство

$$\|(m_1\alpha_1+m_2\alpha_2)\,q_\nu\| \leqslant \overline{m}_1\,\|q_\nu\alpha_1\| + \overline{m}_2\,\|q_\nu\alpha_2\|,$$

получаем оценку

$$\|(m_1\alpha_1+m_2\alpha_2)\,q_\nu\| \leqslant \overline{m}_1\overline{m}_2 q_\nu^{-1/2}. \tag{8}$$

Учитывая (7), (8), (5), оцениваем σ_1:

$$\sigma_1 \leqslant \frac{\pi}{2}\,q_\nu^{-1/2}\sum_{m_1,m_2=-Q}^{+Q}(\overline{m}_1\overline{m}_2)^\gamma < C_8 q^{-1/2+\frac{\delta+1}{\varkappa(2\delta+1)}+\varepsilon_2}. \tag{9}$$

Далее, σ_2 представима в виде

$$\sigma_2 = \sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{|l|<L_\mu}{}' \frac{1}{\overline{lm_1(\mu)}\,\overline{lm_2(\mu)}}\left|\sum_{k=1}^{q_\nu} e^{2\pi i(m_1(\mu)\alpha_1+m_2(\mu)\alpha_2)lk}\right|,$$

где суммированием по l в пределах $|l|<L_\mu$ учтены слагаемые, для которых соответствующая линейная форма $l(m_0(\mu)+m_1(\mu)\alpha_1+$ $+m_2(\mu)\alpha_2)$ пропорциональна форме $m_0(\mu)+m_1(\mu)\alpha_1+m_2(\mu)\alpha_2$ и мала:

$$|l\,(m_0(\mu)+m_1(\mu)\,\alpha_1+m_2(\mu)\,\alpha_2)| < (\overline{lm_1(\mu)}\;\overline{lm_2(\mu)})^{-\gamma}.$$

В самом деле согласно лемме 1

$$\overline{m_1(\nu+1)}\;\overline{m_2(\nu+1)} \geqslant C_3\,|m_0(\nu)+m_1(\nu)\,\alpha_1+m_2(\nu)\,\alpha_2|^{-\frac{1}{2\delta+1}}.$$

Продолжая оценку с использованием леммы 2 и соотношения (5), получаем $\overline{m_1(\nu+1)}\;\overline{m_2(\nu+1)} \geqslant C_3 q_\nu^{\frac{1}{2\varkappa(2\delta+1)}} \geqslant Q^2$, так что суммированием в пределах $C_4<\max\{|m_1|,\ |m_2|\}<Q$ слагаемые с $m_j=m_j(\eta)$, $\eta>\nu$ не учитываются. Кроме того, поскольку понятно, что $L_\mu\leqslant|m_0(\nu)+$ $+m_1(\nu)\alpha_1+m_2(\nu)\alpha_2|^{-1}$, то с учетом второго неравенства из леммы 2 имеем

$$L_\mu = O(q_\nu^\lambda)\ \forall\mu\leqslant\nu. \tag{10}$$

Согласно (7) и лемме 2

$$\sigma_2 \leqslant \sum_{\mu=1}^{\nu}\sum_{|l|<L_\mu}\frac{1}{|l|}\,\frac{|m_0(\nu)+m_1(\nu)\,\alpha_1+m_2(\nu)\,\alpha_2|^{\varkappa}}{|m_0(\mu)+m_1(\mu)\,\alpha_1+m_2(\mu)\,\alpha_2|}.$$

В силу (2), (10)

$$\sigma_2 \leqslant C_9\nu\,(\ln q_\nu)\ |m_0(\nu)+m_1(\nu)\,\alpha_1+m_2(\nu)\,\alpha_2|^{\varkappa-1}.$$

Применяя оценки леммы 2 и неравенство (3), получаем

$$\sigma_2 \leqslant C_{10} q_\nu^{\delta \frac{1-\varkappa}{\varkappa}+\varepsilon_3}. \qquad (11)$$

Подставим (6), (9), (11) в неравенство теоремы Эрдеша—Турана—Коксмы, тогда $r_{q_\nu} < C_{11} q_\nu^{\rho_1+\varepsilon_4}$, где

$$\rho_1 = \max\left\{1 - \frac{1}{4\varkappa(2\delta+1)};\ -\frac{1}{2} + \frac{\delta+1}{\varkappa(2\delta+1)};\ \delta\frac{1-\varkappa}{\varkappa}\right\}.$$

Согласно выбору $\varkappa$ (см. (4)) $1 - \frac{1}{4\varkappa(2\delta+1)} = \delta\frac{1-\varkappa}{\varkappa} = 1 - \rho$, а из условия $\delta \geqslant 1$ имеем

$$1 - \frac{1}{4\varkappa(2\delta+1)} > -\frac{1}{2} + \frac{\delta+1}{\varkappa(2\delta+1)}.$$

Окончательно $r_{q_\nu} < q_\nu^{1-\rho+\varepsilon}$ при достаточно большом q_ν.

Теорема 1 доказана.

Автор благодарит Н. М. Коробова за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М., 1985.
2. Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений. М., 1977.
3. Мощевитин Н. Г. Финальные свойства интегралов от условно периодических функций, связанные с проблемой малых знаменателей//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1988. № 5. 94—96.
4. Мощевитин Н. Г. Малые знаменатели в классической механике//Математика и механика: тез. докл. 9-й Респуб. межвуз. науч. конф. по матем. и механ. Ч. 3. Теоретическая и прикладная механика. Алма-Ата, 1989. 22.

Поступила в редакцию
30.11.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1990. № 4

УДК 519.95

А. А. Часовских

О ВЫРАЗИМОСТИ СИСТЕМ С СУММАТОРОМ В КЛАССЕ ЛИНЕЙНО-АВТОМАТНЫХ ФУНКЦИЙ

Множество $\{0, 1\}$ обозначим через E_2, а множество всех бесконечных последовательностей из нулей и единиц — через E_2^∞:

$$E_2^\infty = \{\alpha \mid \alpha = \alpha(0)\alpha(1)\alpha(2)\ldots,\ \alpha(t) \in E_2,\ t = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Будем рассматривать ограниченно детерминированные функции [1], принимающие значения из E_2^∞, аргументы которых также принимают значения из E_2^∞. Множество всех таких функций обозначим через $P_{\text{о. д.}}$.

Примеры функций из $P_{\text{о. д.}}$

1. Сумматор $F_+^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$: