Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Сергеев, Удивительные свойства электронов,
Квант, 2014, номер 1, 7–11

https://www.mathnet.ru/kvant1680

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.84
15 июня 2025 г., 14:20:43

Удивительные свойства электронов

А.СЕРГЕЕВ

Им главное – название придумать. Пока не придумал – смотреть на него жалко, дурак дураком. Ну а как придумал какой-нибудь гравиконцентрат – тут ему словно все понятно становится, и сразу ему жить легче.

Аркадий и Борис Стругацкие. Пикник на обочине

НЕСКОЛЬКО ЛЕТ НАЗАД ФИЗИКАМИ-ТЕОРЕТИками было предсказано существование необычных веществ – *топологических изоляторов*. Чуть позже они были обнаружены экспериментально. Эти материалы обладают целым набором удивительных свойств, подробный рассказ о которых занял бы не один десяток страниц. Поэтому сегодня мы поговорим лишь об одном, но в каком-то смысле главном, свойстве, ставшем визитной карточкой топологических изоляторов:

в толще вещества топологический изолятор является диэлектриком, а его поверхность проводит электрический ток.

Другими словами, по поверхности диэлектрика электроны движутся так же свободно, как в металле.

Причиной столь странного поведения электронов является запрет отражения назад. У этого запрета, в свою очередь, есть глубокие математические предпосылки (откуда берутся сами математические предпосылки, лучше не задумываться).

В этой статье мы попробуем разобраться, почему электрон, скользящий по поверхности топологического изолятора, встретившись с препятствием, не может отскочить в обратном направлении. Для этого рассмотрим несколько слабо связанных друг с другом сюжетов из разных областей физики и математики. Присмотритесь внимательно к каждому кусочку этой головоломки, и вы увидите, как они складываются друг с другом и образуют цельную картину.

Для экспериментов – куда же без них? – вам понадобятся лист бумаги, ножницы, карандаш, глобус без подставки, кружка с водой и воображаемый воздушный шарик.

Маятник Фуко
(Недорогой эксперимент глобального масштаба)

Начнем издалека. Возможно, вам приходилось видеть маятник Фуко. Тяжелый шар, подвешенный на тросе, уходящем куда-то ввысь, неспешно и устрашающе раскачивается, с каждым взмахом проходя все ближе к деревянной дощечке, звук падения которой на мраморный пол становится для зрителей осязаемым доказательством вращения Земли. Но доказательство отнюдь не очевидной связи между поворотом плоскости колебаний маятника с вращением планеты, как правило, остается за кулисами эффектного опыта. Как и тот факт, что не в любой точке земного шара плоскость колебаний маятника Фуко будет поворачиваться – на экваторе, например, этого не произойдет. А на полюсах скорость поворота плоскости колебаний будет самой большой – за сутки она повернется на 360 градусов.

Хотите узнать, как без единой формулы объяснить поворот плоскости колебаний маятника Фуко и, более того, изучить угловую зависимость скорости этого поворота от географической широты? Тогда вырежьте из бумаги круг и нарисуйте по его краю ряд параллельных векторов, как показано на рисунке 1 слева.

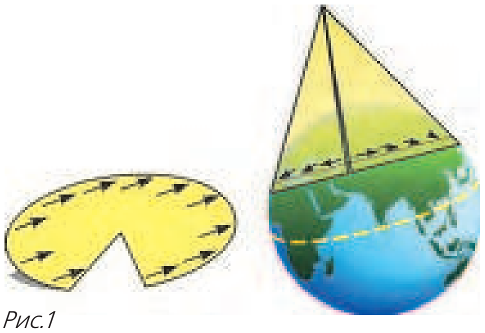

Рис.1

Затем сделайте надрез по радиусу и загните некоторый сектор круга. Теперь сомкните края пустого сектора – у вас получится конус, по краю которого идут параллельные векторы. Впрочем, нет, теперь они не такие уж и параллельные! При обходе вдоль основания конуса вектор поворачивается. Нетрудно видеть, что угол поворота равен углу пустого сектора развертки конуса.

Теперь, если лист бумаги был достаточно большим или если ваш глобус достаточно мал, можете надеть конус на глобус так, чтобы он коснулся земного шара по некоторой параллели (см. рис. 1 справа). Угол поворота вектора, нарисованного на конусе, будет равен (за вычетом 2π) углу, на который повернется за сутки плоскость расположенного на этой параллели маятника Фуко. На другой параллели угол при вершине касательного конуса будет другим, значит, изменится и угол поворота. В этом можно легко убедиться, изменяя величину угла пустого сектора развертки. Например, если конус касается глобуса по параллели, соответствующей 30° северной широты, то вектор развернется на π радиан.

Мы только что проиллюстрировали математическое понятие параллельного переноса вектора на искривленной поверхности. Суть его состоит в том, чтобы перемещать вектор «как можно параллельнее самому себе» при условии, что вектор все время должен лежать в касательной плоскости к поверхности, на которой он живет. Другими словами, если подойти к искривленной поверхности так близко, что она покажется плоской, векторы должны быть параллельны в обычном смысле слова. Что мы и видим, развернув конус на плоскости. В точке, лежащей на параллели – на той окружности, по которой конус касается сферы, – у конуса и сферы общая касательная плоскость. А это значит, что параллельный перенос вектора по данной окружности на сфере можно исследовать с помощью конуса.

Но, казалось бы, какая связь между векторами на конусе и маятником Фуко? Для ответа нужно вспомнить о моменте импульса и законе его сохранения. Допустим, у нас есть гироскоп в кардановом подвесе, позволяющем ему свободно изменять направление оси. Направим его ось на некоторую удаленную звезду (Полярная звезда нам не подойдет) и раскрутим диск. Тогда вектор момента импульса, перпендикулярный плоскости диска, постоянно будет направлен на эту звезду, в силу соответствующего закона сохранения. Это означает, что в лабораторной системе отсчета, связанной с поверхностью Земли, ось гироскопа будет поворачиваться вслед за направлением на выбранную звезду.

Теперь применим закон сохранения момента импульса к маятнику Фуко. Вектор момента импульса будет направлен перпендикулярно плоскости колебаний маятника. Но, в отличие от гироскопа, момент импульса маятника не может быть постоянно направлен на одну звезду, поскольку маятник колеблется под действием силы тяжести, направленной к центру масс Земли. Получается, что вектор момента импульса должен быть направлен по касательной к земной поверхности и при этом перемещаться «как можно параллельнее самому себе», что является следствием закона сохранения импульса с учетом наложенных ограничений. Таким образом, для вектора момента импульса маятника Фуко, переносимого вращением Земли по поверхности сферы, выполняется условие параллельного переноса. Действительно, по закону сохранения момента импульса маятник «хочет» колебаться все время в одной плоскости. Однако, из-за того что сила тяжести направлена к центру Земли, вектор нормали к плоскости колебаний всегда должен быть направлен по касательной к земной поверхности. Иными словами, речь идет о параллельном переносе вектора на сфере. Из этого следует, что бумажный конус с нарисованными векторами не является «упрощенной моделью» или «подогном под ответ»: кривизна поверхности Земли и есть непосредственная причина поворота плоскости, в которой колеблется маятник Фуко.

В квантовой механике поворот вектора при параллельном переносе называется фазой Берри, по имени первооткрывателя сэра Майкла Берри, который изучал волновые функции в гильбертовом пространстве и в некотором смысле обнаружил, что «Земля круглая». С фазой Берри мы еще встретимся.

Топология
(Как определить форму планеты)

Знаете ли вы, в чем принципиальная разница между булочкой и бубликом? Когда вы съедаете булочку, не остается ничего, а когда съедаете бублик, от него остается дырка. Подобного рода отличиями и занимается топология. Говоря чуть более строго, топология – часть математики, изучающая свойства геометрических объектов, которые не изменяются при плавных деформациях. Другими словами, объект можно гнуть, мять, изгибать, но нельзя разрезать и склеивать разные части. Казалось бы, если взять любой геометрический чертеж и позволить себе мысленно изогнуть все эти отрезки, окружности, прямые – что останется от геометрии? Окружность перестанет быть окружностью, прямая станет кривой, нарушатся все возможные теоремы. Тем не менее, существуют свойства фигур, которые сохранятся после этих разрушительных преобразований. И в шутке про дырку от бублика – лишь доля шутки.

Чтобы в этом убедиться, вам понадобится воображаемый воздушный шарик. Представьте, что вы сжимаете его с диаметрально противоположных точек, сдавливая двумя пальцами (рис.2). В какой-то момент

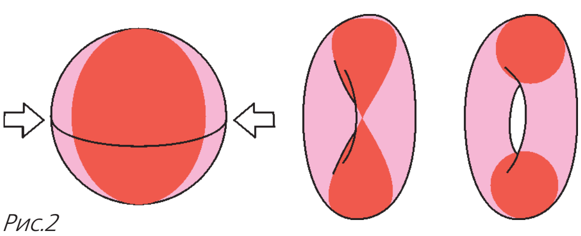

Рис.2

пальцы встретятся. Вообразите, что соединенные кусочки шарика склеились и вы тут же прорезали в центре отверстие. В топологии так делать, конечно, запрещено, но закройте на это глаза. Открыв глаза снова, вы обнаружите, что теперь у вас в руках уже не воздушный шарик, а отличная велосипедная камера. С точки зрения топологии, воздушный шарик представляет собой сферу, а поверхность бублика – тор. Только что мы совершили «склеивательно-разрывное» преобразование, которое привело к изменению топологического инварианта – числа отверстий: у сферы нет отверстий, а у тора оно одно. Чему равно число отверстий у промежуточной фигуры, получившейся в результате склеивания двух противолежащих точек сферы, топология сказать не может. Максимум, что можно сделать, это дать нашей фигуре какое-нибудь название. Скажем, «НИТОНИСЁЙД».

Одним из краеугольных вопросов топологии является следующий: как отличить один объект от другого? Сделать это не так просто, как кажется на первый взгляд. Чтобы визуально отличить сферу от тора, нужно находиться на некотором расстоянии от них.

Топология изучает *глобальные* свойства математических объектов. Долгое время люди думали, что Земля плоская. И правда, *локально* поверхность сферы не отличить от кусочка плоскости. Заклеить пробой как велосипедной камеры, так и воздушного шарика можно одной и той же плоской резиновой заплаткой.

Так возможно ли определить, на поверхности тора или сферы мы находимся? Оказывается, что возможно, и не одним способом. Прежде всего, это можно сделать с помощью длинной веревки. Обойдем нашу планету по замкнутой траектории, разматывая веревку (рис.3). После возвращения в исходную точку возьмемся за оба конца веревки и станем ее вытягивать. Если мы живем на сфере, то витки веревки «соскользнут» с нее, и вся веревка снова окажется у нас в руках. Если же мы живем на торе или на планете с большим числом отверстий, например имеющей форму восьмерки, то веревка неизбежно «застрянет» на них, и мы не сможем ее вытянуть (не забывайте, что веревка все время должна лежать на поверхности планеты). Правда, отличить тор от «восьмерки» таким методом не получится: веревка застрянет и в том, и в другом случае.

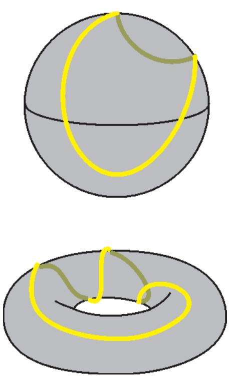

Рис.3

Второй способ позволит подсчитать количество отверстий в планете, не сходя с ее поверхности, но он уже потребует измерений и вычислений. В каждой точке поверхности можно измерить величину, называемую гауссовой кривизной и равную $1/(R_1R_2)$. Здесь R_1 и R_2 – максимальное и минимальное значения радиуса кривизны R сечения поверхности плоскостью, содержащей нормаль к поверхности в данной точке (рис.4). Кстати, есть интересный и совершенно не очевидный факт: две плоскости, соответствующие значениям R_1 и R_2, перпендикулярны.

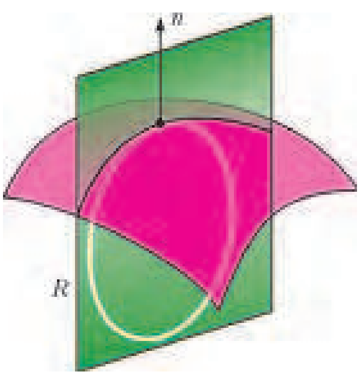

Рис.4

Итак, представим себе землемера, который обходит планету, измеряет ее гауссову кривизну в каждой точке, домножает на элемент площади и складывает все эти числа (проще говоря, берет поверхностный интеграл от кривизны). Казалось бы, он занимается чистой геометрией – ведь если планету деформировать, значения радиусов кривизны изменятся! Тем удивительнее результат, известный в математике как теорема Гаусса–Бонне: интеграл от гауссовой кривизны по площади замкнутой поверхности равен $4\pi(1-g)$, где g – число отверстий, называемое также родом поверхности. Правда, применить эту замечательную теорему к нитонисёйду не удастся: в центральной точке гауссова кривизна не определена.

Частицы или волны? (Если видишь на картине...)

Вернемся к физике.

Вы, конечно, знаете про корпускулярно-волновой дуализм, т.е. двойственную природу частиц. Иногда частицы ведут себя как частицы, иногда как волны, иногда – как нечто среднее. Одним из впечатляющих экспериментов, свидетельствующих о волновой природе частиц, является опыт по дифракции электронов. Впечатляющих – потому что этот опыт столь же сильно противоречит здравому смыслу, сколь хорошо согласуется с квантовой механикой.

Запустим электрон в сторону мишени, преградив ему путь экраном с двумя щелями. Электрон окажется в некоторой точке мишени. Пока что в этом нет ничего удивительного – он пролетел через одну из щелей и попал в мишень. Запустим второй электрон, третий, четвертый. Будем делать это так редко, что электроны не смогут взаимодействовать друг с другом. После накопления достаточно большой статистики посмотрим, в какие части мишени попали электроны. Думаете, они распределятся по мишени равномерно? Как бы не так!

На мишени будут полосы, в которые попало множество электронов, и полосы, в которые не попал ни один электрон (рис.5). Форма и яркость полос будут качественно воспроизводить дифракционную картину света на двух щелях.

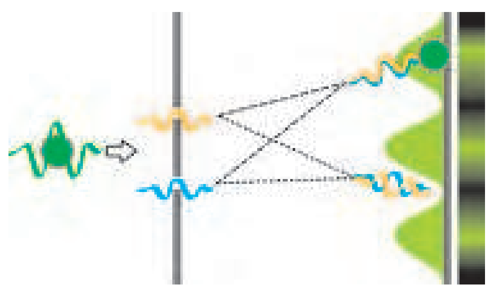

Рис.5

Согласитесь: результат невероятный. Получается, что каждый отдельный электрон «знает» обо всей дифракционной картине и обязательно попадает в одну из «разрешенных» полос. Объясняется это так: каждый электрон, подлетая к экрану, как бы испытывает раздвоение личности и пролетает сразу через обе щели. При этом он интерферирует сам с собой, поскольку является по совместительству волной!

Иными словами, электрон-волна разделяется на две части, которые проходят через разные щели и могут придти в ту или иную точку экрана с той или иной разностью фаз. Если в какой-то точке мишени разность фаз составляет π, т.е. две части волны приходят в противофазе, электрон-частица в эту точку никогда не попадет. Такие точки образуют на картине темные полосы.

Мы еще столкнемся с этой манерой электрона – выбирать оба варианта из предложенных двух. А сейчас поговорим о его спине.

Спин электрона
(Йога для теоретиков)

Хорошо ли держатся магниты у вас на холодильнике? Задумывались ли вы когда-нибудь о том, почему они не падают?

В конечном счете, магнитные свойства вещества определяются наличием у электрона спина. Природу спина обычно объясняют так: если бы электрон был просто твердым заряженным шариком, то спину соответствовал бы его собственный момент импульса. Вращение заряженного объекта можно рассматривать как кольцевой ток, а где электрический ток – там и магнитное поле, согласно опытам Эрстеда (и одному из уравнений Максвелла).

Но электрон – это не заряженный шарик. Электрон – это электрон. Частица и волна одновременно. Как волна может вращаться вокруг своей оси? Какой оси? И какой у нее может быть момент импульса? Кстати сказать, спин электрона не только не является моментом импульса, но и не является вектором вообще (не является он также тензором и, тем более, скаляром). С этим фактом связано одно его странное свойство, для экспериментального изучения которого вам понадобится кружка с водой. Не стоит наполнять ее больше, чем наполовину – вода нужна лишь для того, чтобы у вас не было соблазна перевернуть кружку вверх дном.

Поставьте кружку на стол. Ручка кружки понижает ее симметрию – задает выделенное направление. Поверните кружку на 180° по часовой стрелке или против нее, но только не в двух направлениях сразу. В этом случае ручка кружки будет смотреть в направлении, противоположном изначальному. Поверните кружку еще раз в том же направлении. Теперь ручка кружки будет направлена туда же, куда и в начале опыта. Казалось бы, при чем здесь странные свойства электрона? Правильно, совершенно ни при чем. Если вы поворачиваете любое твердое тело на 360°, оно переходит в себя, и такое преобразование называется тождественным, тривиальным или просто – скучным.

Теперь возьмите кружку в руку так, чтобы она стояла на ладони. Поверните ее на 360° – это возможно. Правда, рука при этом примет неестественное положение, проще говоря – несколько вывернется. Это важно, поскольку ваша рука символизирует волновую функцию электрона. При повороте спина на 360° волновая функция электрона меняет знак (рука выворачивается), т.е. это преобразование не переводит систему «кружка + рука» в себя и не является тривиальным (рис.6). Чтобы узнать, какой поворот переводит спин электрона в начальное состояние, поверните кружку еще на 360° *в ту же сторону*. Поверьте, это возможно и не имеет отношения ни к занятиям йогой, ни к посещению травмпункта! Если вам это удалось – примите поздравления. Теперь вы знаете не понаслышке, что электрон вернется в начальное состояние лишь при повороте на 720°. Этот трюк придумал в демонстрационных целях великий Поль Дирак.

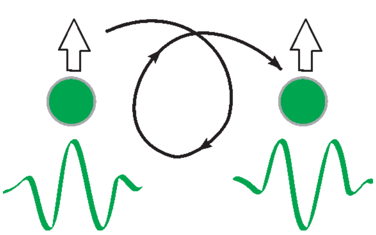

Рис.6

Кристалл как стробоскоп
(Остановись, мгновенье)

Доводилось ли вам видеть летящий вертолет с неподвижными лопастями? На улице – едва ли, а на экране телевизора – наверняка. Это – одно из проявлений так называемого стробоскопического эффекта. У большинства видеокамер скорость съемки составляет около тридцати кадров в секунду. Значит, если винт тоже совершает тридцать оборотов в секунду, на видеозаписи он будет покоиться (отметим, что тридцать оборотов в секунду для несущего винта – цифра нереальная; но винт с четырьмя лопастями «остановится» уже на скорости чуть больше семи оборотов в секунду).

Представим себе «математический» вертолет, винт которого может вращаться сколь угодно быстро. Пусть он начал постепенно раскручиваться, и мы наблюдаем это на экране телевизора. Сначала скорость винта на изображении будет расти, затем он начнет замедляться и совсем остановится; после чего винт начнет вращаться в обратную сторону, скорость достигнет максимума и снова уменьшится до нуля и так далее. Получается, что на видеозаписи, сделанной камерой с частотой 30 кадров в секунду, все возможные скорости вращения винта лежат в интервале от минус 15 до плюс 15 оборотов в секунду! И эта ограниченность области допустимых скоростей является прямым следствием периодичности работы видеокамеры во времени.

Весьма похожая ситуация возникает, когда электрон путешествует по кристаллу. Как вы знаете, в кристалле атомы строго упорядочены – находятся в узлах кристаллической решетки, т.е. кристалл представляет собой периодическую структуру в пространстве. Все ячейки кристалла выглядят одинаково, поэтому не имеет значения, в какой именно из них находится электрон. Но имеет значение то, с какой скоростью и куда он движется. Другими словами, импульс электрона определяет его состояние. Поэтому обычно для описания энергетического состояния электрона говорят о его положении в импульсном пространстве – пространстве, каждая точка которого соответствует векторному значению импульса. А самое интересное то, что состояние электрона определяется ограниченным набором значений импульса, т.е. пространственная периодичность кристалла обуславливает компактность области импульсного пространства, необходимой для описания состояния электрона! Точно так же, как математически бесконечная ось значений угловой скорости винта «сжалась» в интервал (−15; 15) оборотов в секунду, все пространство импульсов электрона в кристалле можно свернуть в небольшую замкнутую фигуру. Другими словами, электрон-волна живет на поверхности некоторой планеты в некотором хитром пространстве.

Топологические изоляторы (Вы все еще кипятите?)

Вы еще не забыли, чему посвящена эта статья? Совершенно верно, топологическим изоляторам. Осталось последнее усилие, чтобы сложить все части рассказа воедино. Или, может быть, они уже сложились в вашем сознании? Если нет, тогда еще немного внимания.

Можно сказать, что топологический изолятор отличается от обычного диэлектрика формой планеты в импульсном пространстве, на которой живет электрон. Давайте условно изобразим ее в виде сферы для любого обычного диэлектрика (вакуума в том числе) и в виде тора – для топологического изолятора (рис.7).

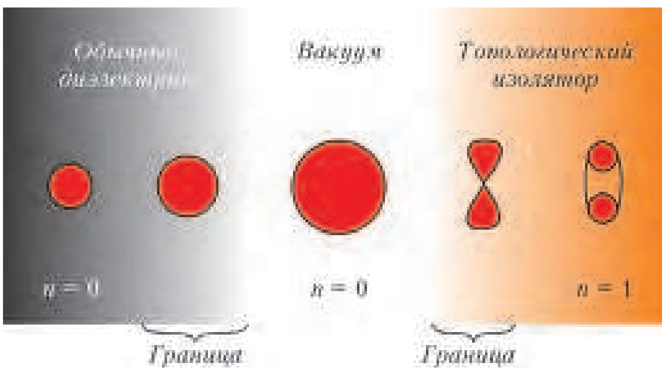

Рис.7

При этом, зная кривизну этой планеты в каждой точке, мы можем вычислить топологический инвариант, так называемый индекс Черна n, очень похожий на род поверхности – число отверстий. Для топологического изолятора индекс Черна отличен от нуля, в нашем примере $n = 1$, в то время как для обычного диэлектрика $n = 0$.

Посмотрим теперь на границу между обычным диэлектриком и вакуумом. На ней планета электрона должна иметь на нашем условном рисунке промежуточную форму между своей сферой и сферой другого радиуса, т.е. быть сферой. Но на границе между вакуумом и топологическим изолятором должно произойти нечто ужасное. Планета электрона должна быть чем-то средним между сферой и тором, т.е., как вы уже поняли, нитонисёидом! Это так же неизбежно, как и тот факт, что непрерывная функция, принимающая отрицательное значение на левом конце отрезка и положительное на правом, обязана где-то на этом отрезке обратиться в ноль.

Итак, мы видим, что электрон, скользящий по границе между топологическим изолятором и вакуумом (или любым другим обычным диэлектриком – воздухом, например), живет в импульсном пространстве на поверхности нитонисёида. Теперь представим, что такой электрон столкнулся с препятствием. Чтобы отскочить назад, он должен поменять направление импульса на противоположное. Но это означает, что он должен переместиться по поверхности нитонисёида в точку, противолежащую той, в которой он сейчас находится.

Поскольку нитонисёид искривлен, в ходе этого перемещения электрон приобретет фазу Берри (вспомните маятник Фуко). Она будет равна по модулю π. Знак фазы Берри будет зависеть от пути, который выберет электрон, – ведь попасть в противолежащую точку можно двумя путями, как и на земном шаре. Одна траектория будет соответствовать развороту импульса по часовой стрелке, а другая – против. Какой же вариант выберет электрон? Правильно, оба. Это значит, что импульс одной части электрона развернется на $180°$, а импульс другой на $-180°$. Другими словами, чтобы получить одну часть электрона из другой, нужно развернуть ее импульс на все $360°$.

Отметим, что направление спина электрона в данном случае жестко связано с направлением импульса, поэтому спин будет разворачиваться схожим образом. А при таком развороте спина, как вы помните, волна электрона поменяет знак, т.е. сложившись, две части электрона дадут в сумме ноль. Следовательно, электрон, живущий на границе между топологическим изолятором и вакуумом, *не может отразиться назад после встречи с препятствием*, что и требовалось пояснить.

Как видите, мир топологических изоляторов прекрасен и удивителен. Возможно, ученые, предсказавшие их существование, прислушались к словам Дирака, произнесенным им на лекции 6 февраля 1939 года:

«Тенденция к объединению математики и физики дает физику-теоретику новый мощный метод изучения природы интересующего его объекта, метод, который не был пока что успешно применен на практике, но, я уверен, в будущем еще докажет свою значимость. Метод состоит в том, чтобы начать с выбора той области математики, которая, предположительно, ляжет в основу новой теории. В этом выборе ученый должен существенным образом руководствоваться соображениями математической красоты».

Поправка

В предыдущем номере журнала на 4-й странице обложки журнала по вине редакции приведен неправильный заголовок и текст под ним.

Должно быть так:

Как стекло сделать прочным?

Можно, например, с помощью полировки убрать микротрещины на поверхности стекла. Но это не самый эффективный способ повышения его прочности...

(Продолжение – на странице 47 внутри журнала)