МЕХАНИКА

Челябинский физико-математический журнал. 2016. Т. 1, вып. 1. С. 113–117.

УДК 532.5

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДОГРЕВАЕМОГО СНИЗУ СЛОЯ ЖИДКОСТИ С ПРИМЕСЬЮ

О. Н. Дементьев

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
dement@csu.ru

Решена задача о конвективной устойчивости плоского слоя среды, содержащей оседающие тяжёлые твёрдые частицы. Для слоя жидкости со свободными границами подогрева снизу показано, что его устойчивость значительно повышается с ростом массовой концентрации примеси.

Ключевые слова: *конвективная устойчивость, твёрдые частицы, плоский слой.*

1. Рассмотрим вязкую несжимаемую жидкость, содержащую примесь тяжёлых твёрдых частиц. Жидкость и примесь предполагаются взаимопроникающими и взаимодействующими друг с другом сплошными средами, взаимодействием между частицами пренебрегается. Взаимодействие между фазами при их относительном движении подчиняется закону Стокса. Объёмная доля частиц настолько мала, что можно пренебречь эйнштейновской поправкой к вязкости жидкости. Частицы предполагаются сферическими, недеформируемыми, одинаковой массы m и радиуса r; плотность материала частиц ρ_1 много больше плотности жидкости ρ. Уравнения свободной конвекции несжимаемой жидкости с тяжёлой примесью в приближении Буссинеска (см. [1–3]), записанные в безразмерной форме имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \Delta\mathbf{u} - \frac{a}{\tau_\nu}(\mathbf{u_p} - \mathbf{u}) + \mathrm{Gr}T\gamma, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial t} + ((\mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s)\cdot\nabla)\mathbf{u}_p = \frac{1}{\tau_\nu}(\mathbf{u}_p - \mathbf{u}), \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)T = -\frac{\triangle T}{P} + \frac{ab}{\tau_v}(T_p - T), \tag{3}$$

$$\frac{\partial T_p}{\partial t} + (\mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s)\cdot\nabla T = -\frac{1}{\tau_\mu}(\mathbf{u}_p - \mathbf{u}), \tag{4}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{P}\mathrm{div}(N(\mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s)) = 0, \tag{5}$$

$$\tau_\nu = \frac{2}{9}r^2\frac{\rho_1}{\rho},\ \tau_t = \frac{3P\tau_\nu b}{2},\ a = \frac{mN}{\rho},\ \mathrm{Ga} = \frac{gh^3}{v^2},\ \mathbf{u}_s = -\mathrm{Ga}\tau_\nu\gamma,$$

$$P = \frac{\nu}{\chi},\ \tau_t = \frac{3P\tau_\nu b}{2},\ b = \frac{c_1}{c},\ \mathrm{Gr} = (1+a)\frac{g\beta\Theta h^3}{\nu^2}.$$

В (1)–(5) приняты следующие обозначения: $\mathbf{u}$ — скорость; T — температура; p — давление жидкости, отсчитываемое от перенормированного за счёт присутствия оседающих частиц гидростатического давления; c — теплоёмкость жидкости при постоянном давлении; β, ν, χ — коэффициент объёмного расширения жидкости, её кинематическая вязкость и температуропроводность; $\mathbf{g} = -\gamma g$ — ускорение свободного падения. Величины с индексом p относятся к облаку частиц, причём $\mathbf{u_p}$ — скорость, приобретаемая частицами в результате их взаимодействия с движущейся жидкостью, отсчитывается от скорости оседания частиц $\mathbf{u}_s$; C_1 — теплоёмкость материала частиц; N — число частиц в единице объёма. Величины τ_ν и τ_t — безразмерные времена и представляют собой соответственно: τ_ν — время, необходимое для того, чтобы скорость частиц относительно жидкости уменьшилась в e раз по сравнению с её исходным значением; τ_t — время, необходимое для уменьшения разности температур жидкости и частиц также в e раз; $\mathrm{Ga}, P, \mathrm{Gr}$ — числа Галилея, Прандтля и Грасгофа. В качестве единиц измерения расстояния, времени, скорости, давления и температуры выбраны соответственно: h, h^2/ν, ν/h, $\rho\nu^2/h^2$, Θ, где h — ширина слоя жидкости, Θ — полуразность температур между границами слоя.

2. Рассмотрим горизонтальный бесконечный слой жидкости, ограниченный параллельными плоскостями $z = 0, z = 1$; границы предполагаются свободными, т. е. на них исчезают касательные напряжения. Через верхнюю границу в слой поступают частицы, концентрация которых однородна, нижняя граница подогревается. Частицы оседают, поэтому в невозмущённом состоянии в слое имеется поперечное движение примеси с однородной вертикальной скоростью u_s. Найдём стационарные распределения температур несущей среды T_0 и облака частиц T_{p0} при отсутствии конвективного движения рассматриваемой двухфазной системы (индекс 0 отличает стационарное решение системы (1)–(5)) с граничными условиями: $T_0 = 1$ при $z = 0$; $T_0 = T_{p0} = -1$ при $z = 1$. Частицы поступают в слой, имея температуру его верхней границы. Распределения температур в слое несущей среды и облаке частиц при стационарном поперечном движении примеси имеют вид

$$T_0 = a_1(e^{m_1(z-1)} - m_4) + a_2(e^{m_2(z-1)} - m_5) - 1, \tag{6}$$

$$T_{p0} = a_1 m_4(e^{m_1(z-1)} - 1) + a_2 m_5(e^{m_2(z-1)} - 1) - 1, \tag{7}$$

где

$$a_1 = \frac{2}{(1 - e^{-m_1})(m_3 - 1)},\ a_2 = \frac{2}{(1 - e^{-m_2})(1/m_3 - 1)},$$

$$m_{1,2} = -\frac{1}{2\tau_t u_s} \pm \sqrt{\frac{1}{(2\tau_t u_s)^2} + \frac{Pab}{\tau_t}},$$

$$m_3 = \frac{(1 - e^{-m2})(1 - m_4)}{(1 - e^{-m_1})(1 - m_5)},\ m_4 = \frac{m_1}{Pabu_s},\ m_5 = \frac{m_2}{Pabu_s}.$$

В предельном случае взвешенных частиц ($u_s = 0$) получим линейное по вертикали распределение температур $T_{p0} = T_0 = -2z + 1$. Как видно из (6), (7), при отличной от нуля скорости оседания частиц u_s распределения температур жидкости (газа) и облака частиц отличаются от линейных. При увеличении скорости оседания частиц, а также с ростом их массовой концентрации a и относительной теплоёмкости b искажение линейного распределения температуры жидкости увеличивается. При дальнейшем росте перечисленных параметров у нижней границы формируется пограничный слой, внутри которого сосредоточено основное изменение температуры несущей среды.

3. Для исследования конвективной устойчивости равновесия слоя среды, содержащей оседающие частицы, рассмотрим возмущённые поля скоростей, температур, давления и числа частиц в единице объёма: $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s$, $T_0 + T$, $T_{p0}+T_p$, p_0+p, N_0+N, где $\mathbf{u}, \mathbf{u_p}, T, T_p, p, N$ — малые возмущения. Уравнения для возмущений можно получить из (1)–(5), производя линеаризацию по возмущениям. Исключая из этих уравнений обычным образом давление, x, y — компоненты скорости жидкости и облака частиц, можно получить уравнения для вертикальных компонент возмущений скоростей $u_z(x,y,z,t), u_{pz}(x,y,z,t)$ и температур $T(x,y,z,t), T_p(x,y,z,t)$. Будем рассматривать нормальные возмущения вида

$$u_z(x,y,z,t) = \nu(z)e^{-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)},\ u_{pz}(x,y,z,t) = \nu_p(z)e^{-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)}, \tag{8}$$

$$T(x,y,z,t) = \Theta(z)e^{-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)},\ T_p(x,y,z,t) = \Theta_p(z)e^{-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)}, \tag{9}$$

где k_1 и k_2 — вещественные волновые числа вдоль направлений x и y; $\lambda + \lambda_r + i\lambda_i$ — комплексный декремент возмущений. В результате из (1)–(5) получим с учётом вида возмущений (8), (9) безразмерные уравнения для амплитуд возмущений

$$(\nu^{IV} - 2k^2\nu'' + k^4\nu) + (\nu'' - k^2\nu)\left(\lambda - \frac{a_0}{\tau_\nu}\right) - \mathrm{Gr}k^2\theta +$$

$$+\frac{a_0}{\nu_\nu}\left[\frac{1}{u_s\tau_\nu}\left(\left(\lambda - \frac{1}{\tau_\nu}\right)\frac{\nu}{u_s} + \nu'\right) + \left(\left(\lambda - \frac{1}{\tau_\nu}\right)^2\frac{1}{u_s^2} - k^2\right)\nu_p\right], \tag{10}$$

$$u_s\nu_p' - \left(\lambda - \frac{1}{\tau_\nu}\right)\nu_p - \frac{\nu}{\tau_\nu} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{1}{P}(\theta'' - k^2\theta) - \left(\frac{ab}{\tau_t} - \lambda\right)\theta - \frac{\nu}{P}T_0' + \frac{ab}{\tau_t}\theta_p = 0, \tag{12}$$

$$u_s\theta_p' - (1/\tau_t - \lambda)\theta_p + \frac{\nu_p}{P}T_{p0}' - \frac{\theta}{\tau_t} = 0, \tag{13}$$

где $k^2 = k_1^2 + k_2^2$. Граничные условия имеют вид

$$\nu = \nu'' = \theta = 0,\ z = 1; \quad \nu_p = \theta_p = 0,\ z = 1. \tag{14}$$

Предполагаем, что на верхней границе слоя возмущения скорости и температуры облака частиц исчезают. Краевая задача (10)–(14) определяет спектр декрементов возмущений и границы устойчивости равновесия слоя жидкости (газа), содержащей частицы примеси. Декремент λ зависит от независимых параметров задачи: чисел Грасгофа, Прандтля и Галилея (или скорости оседания частиц), массовой концентрации примеси, волнового числа и времён релаксации. Из условия $\lambda_r = 0$ определяется граница устойчивости равновесия.

Рассмотрим изотермический ($T_0 = T_{p0} = \mathrm{const}$) слой запылённой среды (в этом случае $\theta = 0, \theta_p = 0$), тяжёлые твёрдые частицы оседают поперёк слоя с однородной вертикальной скоростью u_s, однако жидкость остаётся неподвижной. В предельном случае взвешенных частиц ($u_s \to 0$) система уравнений (10)–(13) существенно упрощается. Тогда гидродинамические декременты рассматриваемой двухфазной системы будут определяться выражением

$$\lambda_n = \frac{1}{2\tau_\nu}(1 + a + \tau_\nu\lambda_{*n} \pm \sqrt{(1 + a + \tau_\nu\lambda_{*n})^2 - 4\tau_\nu\lambda_{*n}}),\ \lambda_* = \lambda\left(1 + \frac{a}{\tau_\nu\lambda}\right).$$

Таким образом, так как декременты возмущений оказываются вещественными и положительными, то возмущения затухают монотонно, а рассматриваемое состояние устойчиво.

В противоположном предельном случае достаточно больших скоростей оседания частиц $|u_s| >> 1$, то есть в несущих средах с малой вязкостью или для тяжёлых частиц, аналогично можно показать, что запылённая среда устойчива монотонно. Численное решение задачи об устойчивости изотермического горизонтального слоя жидкости с примесью при произвольных значениях скорости оседания частиц показало, что нормальные возмущения затухают монотонно, такой слой устойчив. Для решения общей краевой задачи (10)–(14) применялся метод пошагового интегрирования Рунге — Кутта — Мерсона с ортогонализацией получаемых векторов-решений по Граму — Шмидту на каждом шаге интегрирования; ортонормировка проводилась к максимальному по модулю (на данном шаге) вектору-решению (см. [4; 5]).

4. Определим границы устойчивости равновесия. Влияние оседающих частиц примеси на устойчивость неравномерно нагретого слоя жидкости характеризуется, в частности, зависимостью минимального критического числа Грасгофа от величины массовой концентрации частиц. С увеличением массовой концентрации примеси a у нижней границы слоя начинает формироваться температурный пограничный слой (происходит «сдувание» распределения температуры газа). В результате уменьшается эффективная толщина стратифицированного слоя газа ($h_{eff} < h$). Характерная же разность температур 2θ остаётся при этом фиксированной, и минимальное критическое число Грасгофа, определённое по полуширине слоя, при этом увеличивается по мере уменьшения h_{eff}, т. е. с ростом a. Увеличение массовой концентрации от $a = 0.06$ до $a = 0.14$ приводит к возрастанию минимального критического числа Грасгофа от $\mathrm{Gr}_m \approx 190$ до $\mathrm{Gr}_m \approx 310$ (параметры задачи $P = 0.73$, $\tau_\nu = 0.00345$, $\tau_t = 0.0102$, $\mathrm{Ga} = 47$, $b = 2.7$ соответствуют древесным частицам в слое воздуха) при критическом значении числа Грасгофа для чистой жидкости $\mathrm{Gr}_m \approx 170$. Критическое значение волнового числа $k_m \approx 1.6$ с ростом a меняется незначительно, оставаясь меньше соответствующего для чистой жидкости ($k_m \approx 2.2$). С ростом скорости частиц также наблюдается усиление искажающего влияния примеси на распределение температуры несущей среды. Стабилизирующий эффект воздействия частиц на устойчивость равновесия при этом возрастает. В слое воздуха толщиной 2 см движение древесных частиц со скоростью 15 см/с повышает устойчивость почти в 3,5 раза. Однако при больших значениях скорости оседания дальнейшее её увеличение приводит к незначительному искажению устанавливающегося распределения температуры несущей среды и, значит, к малому росту стабилизирующего эффекта.

В заключение следует отметить, что влияние оседающих частиц на устойчивость равновесия неравномерно нагретого горизонтального слоя жидкости (газа) со свободными границами во многом сходно с влиянием примеси на устойчивость слоя жидкости с твёрдыми границами. Это относится к характеру изменений спектра возмущений неподвижного слоя жидкости и причинам повышения конвективной устойчивости равновесия в результате образования температурного пограничного слоя у нижней границы. При достаточно больших значениях скорости все возмущения горизонтального слоя монотонно затухают.

Список литературы

1. **Дементьев, О. Н.** Конвективная устойчивость среды, содержащей тяжёлую твёрдую примесь / О. Н. Дементьев // Приклад. механика и техн. физика. — 1976. № 3. — С. 105–115.
2. **Dementiev, O.** Stability of steady-state flows of a liquid with a heavy impurity / O. Dementiev // Zeitschrift fur Angevandte Math. und Mech. ICIAM95 : spec. iss. — 1996. — P. 113–115.
3. **Гершуни, Г. З.** Устойчивость конвективных течений / Г. З. Гершунин, Е. М. Жуховицкий, А. А. Непомнящий. — М. : Наука, 1989. — 320 с.
4. **Беллман, Р.** Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи / Р. Беллман, Р. Калаба. — М. : Мир, 1968. — 156 с.
5. **Бетчов, Р.** Вопросы гидродинамической устойчивости / Р. Бетчов, В. Криминале. — М. : Мир, 1971. — 351 с.

Поступила в редакцию 15.11.2014
После переработки 02.02.2016

Сведения об авторе

Дементьев Олег Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной механики и информационных технологий, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: dement@csu.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 1. P. 113–117.

STABILITY OF A HEATED FROM BELOW LIQUID LAYER WITH AN IMPURITY

O. N. Dementev

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
dement@csu.ru

The problem of convective stability of a flat layer of a medium containing setting heavy solid particles is discussed. A study is made of the stability of a layer of a medium containing an additive which is heated from below. It is shown that the presence of setting solid particles has a significant stabilizing effect on convective stability.

Keywords: *convective stability, solid particles, flat layer.*

References

1. **Dementiev O.N.** Convective stability of a medium containing a heavy solid additive. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1976, no. 3, pp. 383–391.
2. **Dementiev O.** Stability of steady-state flows of a liquid with a heavy impurity. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* ICIAM95, 1996, spec. iss., pp. 113–115.
3. **Gershuni G.Z., Zhukhovitskiy E.M., Nepomnyashchiy A.A.** *Ustoychivost' konvektivnykh techeniy* [Stability of convective flows]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 320 p. (In Russ.).
4. **Bellman R., Kalaba R.** *Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems.* New York, Elseiver Publ., 1965.
5. **Betchov R., Criminale W.O., Jr.** *Stability of Parallel Flows.* Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 10. New York, London, Academic Press Publ., 1967. xiv+330 p.

Article received 15.11.2014
Corrections received 02.02.2016