

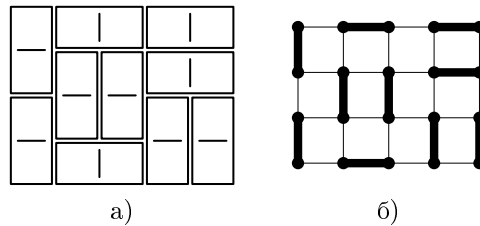
## Пфаффианы или искусство расставлять знаки. . .

М. Н. Вялый\*

В упражнении 7.51 из книги Грэхема, Кнута и Паташника «Конкретная математика» [2] приводится замечательная формула для числа разбиений прямоугольной доски на домино:

$$D_{mn}(v, h) = 2^{mn/2} \prod_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}} \left( \left( \cos^2 \frac{j\pi}{m+1} \right) v^2 + \left( \cos^2 \frac{k\pi}{n+1} \right) h^2 \right)^{1/4}. \quad (1)$$

Если разложить правую часть этого равенства по степеням  $v, h$ , то коэффициент при  $v^r h^s$  будет равен количеству способов разбиения прямоугольной доски размера  $m \times n$  на домино при условии, что используется  $r$  вертикальных домино и  $s$  горизонтальных. Например, разбиение на рис. 1а вносит в эту сумму вклад  $v^6 h^4$ .



**Рис. 1.** Переход от разбиения на домино к совершенному паросочетанию в графе прямоугольной решетки

Сразу отметим два очевидных следствия из этого утверждения: а)  $D_{mn}(v, h)$  является многочленом от  $v$  и  $h$ ; б)  $D_{mn}(1, 1)$  — целое число (количество способов всех разбиений доски  $m \times n$ ). Увидеть эти свойства  $D_{mn}(v, h)$  непосредственно из формулы (1) не очень просто.

В этой статье приводится доказательство формулы (1) и решение еще одной похожей задачи — о разбиениях на домино *ацтекского диаманта* (см. рис. 6а) на с. 140). Формула (1) и подобные ей были получены в 60-е годы прошлого века при решении задач статистической физики. Несколько позже идеи, придуманные физиками, удалось приспособить для решения многих задач перечислительной комбинаторики. Подробности можно найти в статьях Г. Куперберга [6, 7], которые являются основным источником приводимых ниже рассуждений.

\*Работа поддержана грантами РФФИ №02-01-00716 и №02-01-22001 НЦНИ\_а и грантом поддержки научных школ НШ 1721.2003.1.

Для решения задач о разбиениях на домино мы рассматриваем более общую задачу подсчета числа *совершенных паросочетаний* в графе. Совершенное паросочетание — это такое разбиение множества вершин графа на пары, что каждая пара разбиения связана ребром в графе. Разбиениям на домино взаимно однозначно соответствуют совершенные паросочетания на графе прямоугольной решетки, как можно увидеть на рис. 1.

Задача подсчета числа паросочетаний в произвольном графе трудна<sup>1)</sup>. Удивительным образом оказывается, что эта задача решается намного проще в случае *планарных* графов, т. е. таких графов, которые можно нарисовать на плоскости без пересечений ребер. Граф прямоугольной решетки очевидным образом планарен, что и будет использовано для доказательства формулы (1).

Во второй половине статьи от читателя потребуется знание линейной алгебры. Необходимые сведения можно найти, например, в учебнике Винберга [1].

## 1. ЗНАК ПЕРЕСТАНОВКИ И ПАРОСОЧЕТАНИЯ

Сначала напомним некоторые хорошо известные факты о перестановках.

*Перестановкой* множества  $\{1, \dots, v\}$  называется взаимно однозначное отображение этого множества на себя. Множество всех перестановок обозначим через  $S_v$ . Перестановки можно перемножать, произведение перестановок — это композиция отображений. *Тождественная* перестановка  $\text{id}$  оставляет все элементы на месте. Для каждой перестановки  $\pi$  однозначно определена обратная  $\pi^{-1}$ , для которой выполняется равенство  $\pi \circ \pi^{-1} = \text{id}$  (знаком  $\circ$  будем обозначать произведение перестановок).

Задать перестановку можно, указав ее разложение на циклы:

$$\pi = (a_1^1 a_2^1 \dots a_{k_1}^1)(a_1^2 a_2^2 \dots a_{k_2}^2) \dots (a_1^{c(\pi)} a_2^{c(\pi)} \dots a_{k_{c(\pi)}}^{c(\pi)}). \quad (2)$$

Внутри каждой пары скобок числа переставляются циклически:  $\pi(a_1) = a_2$ ,  $\pi(a_2) = a_3$ , ...,  $\pi(a_k) = a_1$ . Разложение на циклы определено с точностью до циклических сдвигов чисел внутри скобок. Это легко понять, если проследить за *орбитой* числа, т. е. образами числа при последовательных применениях  $\pi$ . Циклы длины 1, т. е. неподвижные точки перестановки, при записи в виде произведения циклов обычно пропускаются.

*Знак*  $\text{sgn}(\pi)$  перестановки  $\pi$  — это число  $(-1)^{n+k}$ , где  $n$  — число элементов,  $k$  — число циклов, включая циклы длины 1. Перестановка называется *четной*, если ее знак равен  $+1$ , в противном случае она называется *нечетной*.

Перестановки  $(jk)$ , меняющие местами пару чисел  $j$  и  $k$ , называются *транспозициями*. Любую перестановку можно разложить в произведение транспозиций, хотя и неоднозначно. Легко проверить, что умножение перестановки на транспозицию  $(jk)$  меняет количество циклов на 1: увеличивает, если  $j$  и  $k$  входят в один цикл; уменьшает, если  $j$  и  $k$  входят в разные циклы. Отсюда получаем следующую полезную лемму.

<sup>1)</sup> Имеется в виду, что эта задача  $\#P$ -полна. Определение класса  $\#P$  можно найти в книге Гэри и Джонсона [3] (где для этого класса используется устаревшее обозначение  $KP$ ).  $\#P$ -полноту этой задачи доказал Л. Вэлиант [9].

ЛЕММА 1. Четность числа транспозиций одинакова для всех разложений данной перестановки в произведение транспозиций.

Таким образом, при перемножении перестановок их знаки тоже перемножаются:

$$\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(\sigma). \quad (3)$$

Приведем еще несколько характеристик четности перестановки. Читателю рекомендуется самостоятельно проверить следующие утверждения.

1. *Инверсия* перестановки  $\pi$  — это такая пара  $(j, k)$ , что  $j < k$ , а  $\pi(j) > \pi(k)$ . Четность перестановки совпадает с четностью числа инверсий.
2. Четность перестановки совпадает с четностью числа циклов четной длины.
3. Четность перестановки совпадает с четностью обратной к ней перестановки.

Пусть теперь  $v$  четно. *Совершенным паросочетанием* на множестве  $\{1, \dots, v\}$  назовем разбиение этого множества на пары (слово «совершенный» иногда будем опускать). Множество всех паросочетаний на множестве  $\{1, \dots, v\}$  обозначим  $P_v$ . Паросочетания естественно отождествляются с *инволюциями без неподвижных точек*, т. е. такими перестановками, которые разлагаются на циклы длины 2. Знак любой такой перестановки равен  $(-1)^{v/2}$ . Чтобы определить знаки для паросочетаний нетривиальным образом, требуется дополнительная структура.

Рассмотрим сначала *ориентированные паросочетания*, т. е. разбиения множества  $\{1, \dots, v\}$  на упорядоченные пары (в каждой паре известно, какая из вершин является первой). Перенумерация определяет *действие* перестановок на множестве ориентированных паросочетаний:

$$\pi((p_1, p_2), \dots, (p_{v-1}, p_v)) = ((\pi(p_1), \pi(p_2)), \dots, (\pi(p_{v-1}), \pi(p_v))). \quad (4)$$

Пусть перестановка  $\pi$  переводит какое-то ориентированное паросочетание в себя. Тогда  $\pi$  разлагается в произведение перестановок, меняющих местами первые и вторые вершины. Четность этих перестановок одинакова, так как они разлагаются на одинаковое количество циклов. Поэтому  $\pi$  четна.

Отсюда следует, что четность перестановок, переводящих одно ориентированное паросочетание в другое, одинакова: если  $\pi, \sigma$  — две такие перестановки, то  $\pi\sigma^{-1}$  переводит исходную перестановку в себя.

Поскольку знак произведения перестановок равен произведению знаков, корректно следующее определение.

*Два ориентированных паросочетания имеют одинаковые знаки, если одно переводится в другое четной перестановкой; разные знаки, если одно переводится в другое нечетной перестановкой.*

Мы определили лишь отношение знаков двух ориентированных паросочетаний. Если нужно однозначно определить знаки, достаточно выбрать какое-то ориентированное паросочетание и приписать ему знак «+». Обычно полагают, что паросочетание  $(1, 2)(3, 4) \dots ((v-1), v)$  имеет знак «+».

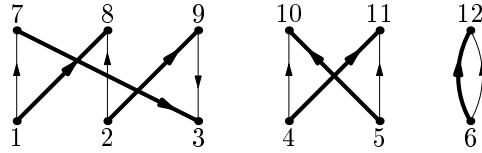


Рис. 2. Пример паросочетаний разного знака

Чтобы приписать знаки (неориентированным) паросочетаниям, зададим *ориентацию* на парах чисел, т. е. для каждой пары чисел укажем, какое из чисел является первым в этой паре. Тогда каждому паросочетанию однозначно соответствует ориентированное паросочетание с теми же парами вершин.

Пусть задана ориентация и два паросочетания  $p, q$ . Возьмем  $v$  точек и пронумеруем их числами  $1, 2, \dots, v$ . Пары, входящие в паросочетание  $p$ , соединим тонкими линиями, а пары, входящие в  $q$ , — жирными. Нарисуем ориентации: поставим стрелки, ведущие от первой вершины в паре ко второй (см. пример на рис. 2). Из каждой точки выходит ровно две линии, так что получили набор циклов четной длины.

Пусть  $a$  — общее количество ребер, ориентированных по циклу, а  $b$  — ориентированных против. Для циклов четной длины четность  $a$  и  $b$  одинакова. Число  $(-1)^{1+b}$  будем называть *знаком цикла*  $F$  и обозначать  $s(F)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Заметим, что знак цикла определен не только для циклов четной длины. Для циклов нечетной длины  $s(F) = (-1)^{1+b} = (-1)^a$  и знак цикла зависит от направления обхода цикла.

**ЛЕММА 2.** Знаки паросочетаний различаются на произведение знаков циклов, образованных этими паросочетаниями.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Получим одно паросочетание из другого в два приема. Вначале применим перестановку, сдвигающую числа вдоль циклов, образованных паросочетаниями. Четность этой перестановки совпадает с четностью количества циклов. Теперь согласуем ориентации с помощью транспозиций чисел, входящих в пары второго паросочетания. Четность количества требуемых транспозиций совпадает с четностью числа ребер, ориентированных по циклам.

Итак, четность перестановки, переводящей одно (ориентированное) паросочетание в другое, равна суммарной четности количества циклов и количества ребер, ориентированных по циклам. Но это и есть произведение знаков циклов.

## 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ И ПФАФФИАН

Естественные определения определителя и пфаффиана даются на языке линейной алгебры (см., например, [1]). Мы ограничимся здесь элементарными определениями, которые всё равно нам потребуются.

Рассмотрим матрицу  $A$  размера  $v \times v$ , в  $j$ -й строке и  $k$ -м столбце которой находится переменная  $a_{jk}$ . *Определитель*  $A$  по определению равен

$$\det A = \sum_{\pi \in S_v} \operatorname{sgn}(\pi) A(\pi), \quad \text{где } A(\pi) = \prod_{k=1}^v a_{k, \pi(k)}. \quad (5)$$

В формулу (5) входит  $v!$  слагаемых. Однако, чтобы вычислить значение определителя, не нужно делать так много операций. Хорошо известный метод исключения Гаусса позволяет найти значение определителя  $(v \times v)$ -матрицы за  $O(v^3)$  арифметических операций.

Далее считаем  $v$  четным. Рассмотрим *кососимметричную* матрицу  $A$  размера  $v \times v$ , т. е. матрицу, для которой  $a_{j,k} = -a_{k,j}$ . Нам будет удобно выделить в кососимметричной матрице «знаки» и «абсолютные величины». Сделаем это так. Введем переменные  $a_{(jk)}$ , зависящие от неупорядоченной пары индексов, и некоторую ориентацию. По ориентации построим кососимметричную матрицу  $\varepsilon$ :  $\varepsilon_{jk} = 1$ , если в паре  $(j, k)$  первой является вершина  $j$ ;  $\varepsilon_{jk} = -1$ , если первой является вершина  $k$ ; по диагонали стоят нули:  $\varepsilon_{kk} = 0$ .

Теперь полагаем  $a_{j,k} = a_{(jk)} \varepsilon_{jk}$ .

*Пфаффиан*  $A$  равен

$$\operatorname{Pf}(A) = \sum_{p \in P_v} \varepsilon(p) \tilde{A}(p), \quad (6)$$

где  $\tilde{A}(p)$  — произведение  $a_{(jk)}$  по всем парам  $(jk)$ , входящим в паросочетание  $p$ , а  $\varepsilon(p)$  — знак паросочетания  $p$  относительно ориентации  $\varepsilon$ .

Имеет место соотношение:

$$\det A = (\operatorname{Pf} A)^2. \quad (7)$$

Из него следует, что вычисление пфаффиана не сложнее вычисления определителя.<sup>2)</sup>

Формулу (7) проще доказать «по-научному», используя более осмысленные определения определителя и пфаффиана. Однако элементарное доказательство в стиле «раскроем скобки и приведем подобные», хотя и более громоздкое, также весьма поучительно. Его идея (взятая из [6]) состоит в том, что перестановки с циклами нечетной длины дают нулевой вклад в определитель кососимметричной матрицы, а перестановки с циклами четной длины естественно отождествляются с парами паросочетаний. При этом знаки согласуются.

Разберем это рассуждение подробнее. Слагаемые в формуле (5), по которой вычисляется значение определителя, разделим на три группы:

A: содержащие неподвижную точку (т. е. цикл длины 1);

B: не содержащие неподвижных точек, но содержащие цикл нечетной длины;

C: состоящие только из циклов четной длины.

<sup>2)</sup> Можно быстро вычислять и определитель, и пфаффиан, без использования не только операции извлечения квадратного корня, но даже и операции деления. См. [8].

Запишем слагаемые, составляющие определитель, через ориентации и симметричные переменные  $a_{(jk)}$ . Получаем равенство

$$\operatorname{sgn}(\pi)A(\pi) = \prod_F s(F)A(F), \quad (8)$$

где произведение берется по циклам перестановки  $\pi$ , а  $A(F)$  — произведение  $a_{(jk)}$  вдоль цикла  $F$ .

Слагаемые из группы А равны 0, так как  $a_{jj} = -a_{jj} = 0$  по определению косимметричной матрицы.

Слагаемые из группы В можно разбить на пары с противоположными значениями, так что их общий вклад в определитель равен 0. Чтобы описать такое разбиение на пары, выделим в перестановке цикл нечетной длины, который содержит наименьшее из чисел, входящих в циклы нечетной длины. Назовем этот цикл минимальным нечетным. Изменение направления обхода минимального нечетного цикла задает требуемое разбиение слагаемых на пары. В силу (8) эти слагаемые имеют противоположные значения.

Теперь перейдем к слагаемым из группы С. Сопоставим перестановкам, состоящим из циклов четной длины, упорядоченные пары паросочетаний. Циклу  $(a_1 \dots a_{2k})$  сопоставим паросочетания  $(a_1, a_2), (a_3, a_4), \dots, (a_{2k-1}, a_{2k})$  и  $(a_2, a_3), (a_4, a_5), \dots, (a_{2k}, a_1)$ . Как их упорядочить? Будем считать, что  $a_1$  — наименьшее из чисел  $a_1, \dots, a_{2k}$ , а паросочетание, в которое входит  $(a_1, a_2)$ , — первое. Это определение неприменимо к циклу длины 2, но в этом случае паросочетания совпадают и потому их порядок неважен.

Итак, мы сократили часть слагаемых в левой части равенства (7), а остальным взаимно однозначно сопоставили какие-то слагаемые в правой части (7) (разумеется, после раскрытия скобок). Описанное выше соответствие гарантирует, что соответствующие слагаемые содержат одни и те же переменные  $a_{(jk)}$ , причем в одинаковой степени. А знаки у соответствующих слагаемых совпадают по правилу определения знака паросочетания и в силу формулы (8).

### 3. ПАРСОЧЕТАНИЯ В ПЛОСКОМ ГРАФЕ

Попробуем вычислить количество совершенных паросочетаний в графе, используя пфаффиан. Для этого занумеруем вершины графа и ориентируем его рёбра, после чего сопоставим графу *ориентированную матрицу смежности*:  $A_{j,k} = \pm 1$ , если пара  $(jk)$  является ребром графа (знак определяется ориентацией);  $A_{j,k} = 0$ , если пара  $(jk)$  не является ребром графа. Пфаффиан такой матрицы равен сумме знаков совершенных паросочетаний графа.

Граф назовем *пфаффовым*, если существует ориентация его ребер, относительно которой знаки всех паросочетаний в этом графе равны. (Такую ориентацию будем называть *пфаффовой*.) Поэтому число совершенных паросочетаний в пфаффовом графе совпадает с точностью до знака с пфаффианом (т. е. квадратным корнем из определителя) ориентированной матрицы смежности.

Важным частным случаем пфаффовых графов, с которого и началась вся эта теория, являются планарные графы.<sup>3)</sup> *Планарный* граф можно нарисовать на плоскости так, чтобы линии, изображающие его рёбра, не пересекались (естественно, за исключением концов). Саму картинку, изображающую граф указанным выше способом, будем называть *плоским графом*. *Грань* плоского графа — это цикл, внутри которого не лежит ни одной вершины. *Бесконечная грань* — это цикл, вне которого не лежит ни одной вершины.

ТЕОРЕМА 1. Плоский граф является пфаффовым.

Прежде чем доказывать теорему 1, сделаем несколько упрощающих замечаний и докажем две леммы.

Заметим, что отношение знаков паросочетаний определяется знаками циклов. Поэтому достаточно рассмотреть только связные плоские графы без мостов. (*Мост* — это ребро графа, через которое не проходит ни одного цикла. Ориентации мостов не влияют на знаки паросочетаний.) Если в плоском связном графе нет мостов, то каждое его ребро смежно в точности с двумя гранями (конечными или бесконечной).

ЛЕММА 3. Пусть в ориентированном плоском связном графе без мостов  $n$  внутренних вершин (не лежащих на бесконечной грани). Тогда знак бесконечной грани равен произведению знаков конечных граней, умноженному на  $(-1)^n$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем направление обхода против часовой стрелки. Каждое ребро, не входящее в бесконечную грань, обходится в противоположных направлениях при обходах смежных с ним граней. Поэтому вклад в произведение ориентаций от такого ребра всегда равен  $-1$ . Пусть в графе  $m$  ребер на бесконечной грани,  $k$  внутренних ребер и  $f$  конечных граней.

Произведение знаков конечных граней равно  $(-1)^{k+f}a$ , где  $a$  — произведение ориентаций ребер вдоль бесконечной грани. Знак бесконечной грани равен  $-a$ . По теореме Эйлера

$$(n + m) - (m + k) + (f + 1) = 2,$$

поэтому

$$-a = (-1)^{n-k+f}a = (-1)^n(-1)^{k+f}a, \quad (9)$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 4. Существует ориентация плоского связного графа без мостов и с четным числом вершин, относительно которой знаки всех граней равны  $+1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемму проще доказать, переходя к двойственному графу. Напомним построение двойственного графа. В каждой грани исходного графа лежит ровно одна вершина двойственного графа, вершины двойственного графа соединим ребром, пересекающим ребро исходного графа, которое смежно обеим граням, соответствующим выбранным вершинам (а если такого ребра нет, не будем соединять вершины ребром).

<sup>3)</sup> По-видимому, теорему 1 впервые сформулировал и доказал П. Кастелейн [5].

По ориентации графа можно построить ориентацию двойственного графа: потребуем, чтобы кратчайший поворот от ориентированного ребра исходного графа к ориентированному ребру двойственного происходил против часовой стрелки.

Посмотрев на рис. 3, легко понять, что после перехода к двойственному графу утверждение леммы звучит так: в связном плоском графе, имеющем четное число граней, можно так ориентировать рёбра, чтобы из каждой вершины выходило нечетное число ребер. Докажем это последнее утверждение.

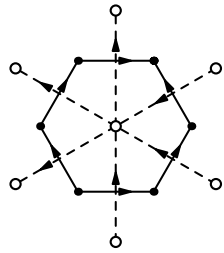


Рис. 3.

Возьмем произвольную ориентацию. Поскольку граней — четное количество, в силу теоремы Эйлера четность числа вершин и четность числа ребер совпадают. Пусть  $v_0, v_1$  — количество вершин, из которых выходит соответственно четное или нечетное количество ребер. Тогда  $v_0 + v_1 = e = v_1 \pmod{2}$ , т. е.  $v_0$  — четно. Разобьем все вершины, из которых выходит четное количество ребер, на пары и соединим каждую пару путем в графе. Поменяем ориентации ребер вдоль всех выбранных путей. Четность количества выходящих ребер в промежуточных вершинах не изменится (поскольку меняется у четного числа ребер), а конечных — изменится. Получаем искомую ориентацию.

Ориентацию, относительно которой знаки всех граней положительны, назовем *однородной*. Лемма 4 гарантирует существование однородной ориентации для плоского графа. Мы завершим доказательство теоремы 1, если докажем, что однородная ориентация плоского графа является пфафовой. Для этого используем лемму 3.

Итак, пусть паросочетания в плоском связном графе различаются на циклы  $F_1, \dots, F_m$ . Внутри каждого такого цикла находится четное количество вершин (они ведь разбиты на пары паросочетанием), поэтому в силу леммы 3 знаки этих паросочетаний относительно однородной ориентации совпадают.

Теорема 1 доказана.

#### 4. ПОДСЧЕТ ПАРОСОЧЕТАНИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ

Применим теорему 1 к исходной задаче подсчета паросочетаний в прямоугольной решетке. Прежде всего нужно указать какую-нибудь однородную ориентацию (она, как было доказано, является пфафовой). На рис. 4 указана однородная ориентация, которую мы будем использовать.

Теперь нужно составить ориентированную матрицу смежности размера  $mn \times mn$ , используя указанную ориентацию, затем вычислить ее определитель и извлечь из него квадратный корень. Полученное число и даст количество паросочетаний.

Многочлен  $\det(\lambda I - A)$  называется *характеристическим многочленом* матрицы  $A$ . Его степень равна размеру матрицы  $n$ , так что есть ровно  $n$  комплексных

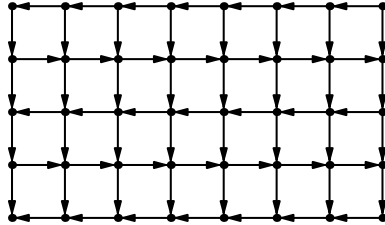


Рис. 4.

корней характеристического многочлена (с учетом кратности). Корни характеристического многочлена являются *собственными числами* матрицы  $A$ . Из теоремы Виета получаем, что определитель — это произведение собственных чисел.

Ориентированную матрицу смежности квадратной решетки  $m \times n$ , определяемую ориентацией на рис. 4, обозначим через  $A_{m,n}$ . Ее определитель мы будем выражать через произведение собственных чисел. Рассмотрим тензорное произведение  $m$ -мерного пространства, в котором выделен базис  $e_1, \dots, e_m$ , и  $n$ -мерного пространства, в котором выделен базис  $f_1, \dots, f_n$ . Первый сомножитель отвечает строкам решетки, а второй — столбцам. Будем рассматривать  $A_{m,n}$  как матрицу линейного оператора в базисе  $e_j \otimes f_k$ . Сверившись с рис. 4, действие этого оператора можно записать как

$$A_{m,n}: e_j \otimes f_k \mapsto H_m e_j \otimes f_k + (-1)^j e_j \otimes H_n f_k, \tag{10}$$

где  $H_d = -A_{1,d}$ , т. е. оператор, соответствующий матрице  $d$ -цепочки, см. рис. 5. Оператор, действующий по правилу  $e_j \mapsto (-1)^j e_j, 1 \leq j \leq d$ , обозначим через  $P_d$ .

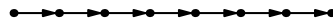


Рис. 5.

Из (10) и линейности операторов получим формулу для действия  $A_{m,n}$  на разложимом элементе (представимом в виде тензорного произведения векторов):

$$A_{m,n}: x \otimes y \mapsto H_m x \otimes y + P_n x \otimes H_n y. \tag{11}$$

Заметим, что  $P_d^2 = I$  (тождественный оператор), а  $P_d H_d + H_d P_d = 0$ , так как  $H$  меняет четность индекса у базисных векторов  $e_j$ . Поэтому

$$A_{m,n}^2: x \otimes y \mapsto H_m^2 x \otimes y + x \otimes H_n^2 y. \tag{12}$$

Оператор  $H_n^2$  — эрмитов, его собственные числа обозначим  $\lambda_{n,k}^2$ . Если  $y_k$  — собственный вектор  $H_n^2$  с собственным числом  $\lambda_{n,k}^2$ , то

$$A_{m,n}^2: x \otimes y_k \mapsto (H_m^2 + \lambda_{n,k}^2 I)x \otimes y_k. \tag{13}$$

Из (13) получаем, что собственные вектора  $A_{m,n}^2$  имеют вид  $x_j \otimes y_k$ , где  $y_k$  — собственный вектор  $H_n^2$  с собственным числом  $\lambda_{n,k}^2$ , а  $x_j$  — собственный вектор

$H_m^2$  с собственным числом  $\lambda_{m,j}^2$ . Собственные числа  $A_{m,n}^2$  равны

$$\lambda_{m,j}^2 + \lambda_{n,k}^2, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (14)$$

что уже напоминает искомую формулу (1). Определитель матрицы  $A_{m,n}$  равен произведению квадратных корней из всех этих чисел. Извлечение квадратного корня делает неопределенными знаки множителей. Однако мы знаем, что определитель должен быть неотрицательным целым числом (квадратом пфаффиана).

Осталось найти собственные числа операторов  $H_n$ . Для этого вычислим характеристический многочлен ориентированной матрицы смежности простой цепочки

$$C_n(\lambda) = \left. \begin{array}{cccccc} \lambda & -1 & 0 & \dots & & \\ 1 & \lambda & -1 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & \lambda & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\} n \text{ строк.} \quad (15)$$

Разложим определитель по первой строке, а затем по первому столбцу. Получаем рекуррентное соотношение:

$$C_n(\lambda) = \lambda C_{n-1}(\lambda) + C_{n-2}(\lambda). \quad (16)$$

Начало этой последовательности многочленов находится прямым вычислением:

$$C_1(\lambda) = \lambda, \quad C_2(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1. \quad (17)$$

Остальные члены последовательности можно выразить через многочлены Чебышёва второго рода, определяемые соотношением

$$U_n(\cos \varphi) = \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}, \quad (18)$$

которое, как легко проверяется, эквивалентно следующей рекуррентности

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad U_1(x) = 1, \quad U_2(x) = 2x. \quad (19)$$

Докажем, что

$$C_n(\lambda) = i^n U_{n+1}\left(-\frac{i\lambda}{2}\right). \quad (20)$$

В вычислениях полагаем  $-i\lambda = 2x$ . Проверим совпадение начальных членов и по индукции эквивалентность рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} C_1(\lambda) &= \lambda = i2x = iU_2(x), \\ C_2(\lambda) &= \lambda^2 + 1 = -((-i\lambda)^2 - 1) = i^2(4x^2 - 1) = i^2U_3(x), \\ C_n(\lambda) &= \lambda C_{n-1}(\lambda) + C_{n-2}(\lambda) = \\ &= i^n(-i\lambda U_n(x) - U_{n-1}(x)) = i^n U_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Корни многочлена Чебышёва  $U_{n+1}(x)$  равны  $\cos \frac{k\pi}{n+1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Поэтому корни многочлена  $C_n(\lambda)$  равны

$$\lambda_k = 2i \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (21)$$

Объединяя (14) и (21), получаем собственные числа оператора  $A_{m,n}^2$ :

$$-4 \left( \cos^2 \frac{\pi j}{m+1} + \cos^2 \frac{\pi k}{n+1} \right), \quad 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n. \quad (22)$$

Таким образом и приходим к формуле (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Внимательный читатель обратил внимание на неточность в последней фразе. Формула (1) утверждает больше, она дает производящую функцию для числа разбиений по количеству горизонтальных и вертикальных домино. На самом деле, эта формула получается совершенно аналогичными рассуждениями. Нужно приписать вертикальным ребрам вес  $v$ , горизонтальным — вес  $h$ , а вместо оператора  $A_{m,n}$  рассмотреть оператор  $\tilde{A}_{m,n}$ , который действует по правилу:

$$\tilde{A}_{m,n} : e_j \otimes f_k \mapsto vH_m e_j \otimes f_k + (-1)^j e_j \otimes hH_n f_k. \quad (23)$$

Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично: доказываем, что собственные значения оператора  $\tilde{A}_{m,n}^2$  равны

$$v^2 \lambda_{m,j}^2 + h^2 \lambda_{n,k}^2. \quad (24)$$

## 5. ЕЩЕ ОДИН ПРИМЕР: АЦТЕКСКИЙ ДИАМАНТ

Описанный выше способ подсчета числа паросочетаний в плоском графе активно используется в перечислительной комбинаторике. Заинтересованный читатель может узнать подробности в статьях [4, 6, 7], там же можно найти более подробную библиографию.

Мы ограничимся всего одним дополнительным примером: подсчетом числа разбиений на домино *ацтекского диаманта* (см. рис. 6а). Этой задаче посвящена отдельная статья [4] в этом сборнике. Интересно сравнить чисто комбинаторное решение в [4] с вычислением определителя, приводимым ниже (это вычисление взято из статьи Г. Куперберга [7]).

Ацтекский диамант 4-го порядка изображен на рис. 6а). У диаманта  $n$ -го порядка по  $2n$  вертикальных и горизонтальных рядов клеток, а всего клеток  $2n(n+1)$ . Аналогично прямоугольной доске мы рассмотрим граф соседства клеток. Это тоже плоский граф, поэтому у него есть пфаффовы ориентации. Для вычисления нам будет удобно использовать ориентацию, изображенную на рис. 6б). Вершины графа диаманта раскрасим в шахматном порядке в черный и белый цвет. На рисунке видно, что все горизонтальные рёбра ориентированы слева направо, а вертикальные — от черной вершины к белой. Пфаффовость такой ориентации проверяется легко: у каждого квадратика есть пара сонаправленных горизонтальных сторон и пара противонаправленных вертикальных сторон.

Мы воспользуемся шахматной раскраской еще и для того, чтобы упростить вычисление. Заметим, что эта раскраска — правильная, т. е. рёбра соединяют

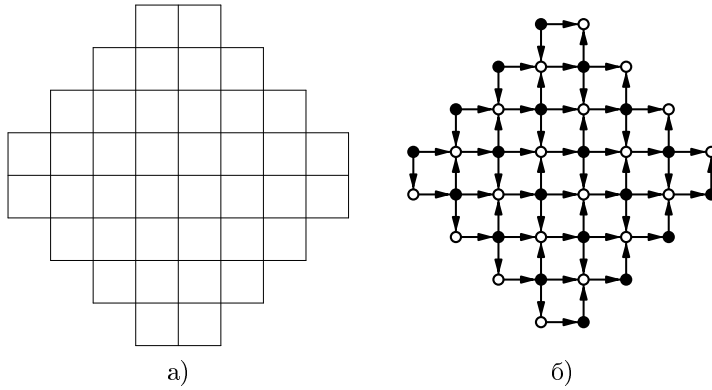


Рис. 6.

вершины разных цветов. Поэтому ориентированная матрица смежности этого графа имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & M \\ -M & 0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

здесь первая половина строк и столбцов отвечает черным вершинам, а вторая — белым. Несложная проверка показывает, что  $\det A = (\det M)^2 = (\text{Pf } A)^2$ . Поэтому искомое число есть  $|\det M|$ .

Отличные от нуля элементы матрицы  $M$  равны  $\pm 1$ . Расстановку знаков изображает рис. 7а), на котором  $+1$  изображаются сплошными линиями, а  $-1$  — штриховыми.  $M$  — это матрица линейного преобразования пространства, базис которого индексирован белыми точками, в пространство, базис которого индексирован черными точками. Как видно на рис. 7а), и те, и другие образуют прямоугольники размеров  $(n+1) \times n$  и  $n \times (n+1)$  соответственно. Обозначим

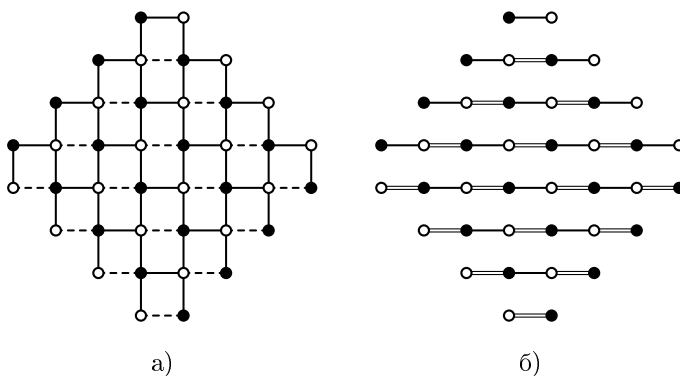


Рис. 7.

через  $V^n$  пространство с базисом  $\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$ , а через  $V^{n+1}$  — пространство с базисом  $\{e_0, \dots, e_n\}$ . Из белых вершин выходят рёбра в четырех направлениях. Если считать, что  $M$  отображает  $V^{n+1} \otimes V^n$  в  $V^n \otimes V^{n+1}$ , то его можно записать в виде следующей суммы, где каждое слагаемое отвечает сонаправленным ребрам:

$$M = -L \otimes L^T + L \otimes R^T + R \otimes R^T + R \otimes L^T. \quad (26)$$

Здесь  $L, R$  — матрицы преобразований, задаваемых следующими правилами:  $Le_n = 0, Le_j = e_j$  при  $0 \leq j \leq n-1$ ,  $Re_0 = 0, Re_j = e_{j-1}$  при  $1 \leq j \leq n$ ; а  $X^T$  обозначает транспонированную матрицу.

Определитель произведения матриц равен произведению определителей этих матриц. Умножением на подходящие матрицы упростим вычисление определителя  $M$ . Эти матрицы получаются из матриц биномиальных коэффициентов  $B(n)$ , элементы которых равны

$$B(n)_{jk} = \binom{j}{k} \quad (0 \leq j, k < n), \quad \binom{j}{k} = 0 \text{ при } j < k. \quad (27)$$

Матрицы  $B(n)$  — нижнетреугольные с единицами на главной диагонали, поэтому их определители равны 1.

Равенства

$$\begin{aligned} B(n)L &= LB(n+1), & \text{т. е. } B(n)LB(n+1)^{-1} &= L, \\ B(n)R + LB(n+1) &= RB(n+1), & \text{т. е. } B(n)RB(n+1)^{-1} &= R - L, \end{aligned}$$

проверяются непосредственным вычислением с использованием основного тождества для биномиальных коэффициентов

$$\binom{j}{k-1} + \binom{j}{k} = \binom{j+1}{k}.$$

С помощью этих равенств можно проверить, что

$$\begin{aligned} (B(n) \otimes (B(n+1)^{-1})^T) M (B(n+1)^{-1} \otimes B(n)^T) &= \\ = -L \otimes L^T + L \otimes (R-L)^T + (R-L) \otimes (R-L)^T + (R-L) \otimes L^T &= \\ = R \otimes R^T - 2L \otimes L^T. \end{aligned} \quad (28)$$

Структуру матрицы  $R \otimes R^T - 2L \otimes L^T$  можно увидеть на рис. 76), где +1 обозначены одинарными ребрами, а -2 — двойными. Видно, что матрица распалась на несколько блоков. Преобразования внутри каждого блока задаются нижнетреугольными матрицами. На главной диагонали блока из верхней половины стоят +1, а на главной диагонали блока из нижней половины стоят -2. Определитель матрицы равен произведению определителей блоков. Окончательно получаем:

$$|\det M| = 2^1 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2^n = 2^{n(n+1)/2}. \quad (29)$$

Это и есть число разбиений ацтекского диаманта на домино.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Винберг Э. Б. *Курс алгебры*. М.: Факториал, 1999.
- [2] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. *Конкретная математика*. М.: Мир, 1998.
- [3] Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. М.: Мир, 1982.
- [4] Кохась К. П. *Разбиения на домино* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 9. 2005. С. 143–163.
- [5] Kasteleyn P. W. *The statistics of dimers on a lattice* // Physica, 1961. V. 27. P. 1209–1225.
- [6] Kuperberg G. *An exploration of the permanent – determinant method*. E-print, LANL archive. math.CO/9810091. 1998.
- [7] Kuperberg G. *Kasteleyn cokernels*. E-print, LANL archive. math.CO/0108150. 2002.
- [8] Rote G. *Division-free algorithms for the determinant and the pfaffian: algebraic and combinatorial Approaches*. In: Computational Discrete Mathematics (ed. H. Alt), LNCS 2122, pp. 119–135, 2001. Springer-Verlag, 2001.
- [9] Valiant L. G. *The complexity of computing the permanent* // Theoretical Computer Science. 1979. V. 8. P. 189–201.