

Оглавление

Введение	7
Лекция 1. Тензорное произведение матриц	9
1.1. Тензорное произведение линейных пространств	9
1.2. Тензорное произведение нескольких пространств	13
1.2.1. Пример	14
1.3. Уравнение Янга–Бакстера	15
1.4. Явный вид матриц в пространстве $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$	16
Лекция 2. Квантовые интегрируемые системы	18
2.1. XXX цепочка Гейзенберга	18
2.2. Построение интегрируемых систем	19
2.3. Построение матрицы монодромии	21
2.4. Гамильтониан спиновой цепочки XXX	24
Лекция 3. Алгебраический анзац Бете	26
3.1. Различные L -операторы	26
3.1.1. Неоднородная XXX цепочка	26
3.1.2. Квантовое нелинейное уравнение Шрёдингера	26
3.2. Гильбертово пространство	28
3.3. Действие элементов матрицы монодромии на векторы	30
3.3.1. Коммутационные соотношения	31
3.3.2. Алгебраический анзац Бете	32
3.3.3. Действие операторов A и D на векторы Бете	32
3.3.4. Собственные векторы и уравнения Бете	35
3.3.5. Пример	36
3.4. Совместность коммутационных соотношений	36
Лекция 4. Уравнения Бете	39
4.1. Совпадающие корни	39
4.2. Уравнения Бете для XXX цепочки	41
4.2.1. Бесконечные решения	41
4.2.2. Недопустимые решения	42
Лекция 5. Тригонометрическая R-матрица и L-оператор общего вида	44
5.1. Тригонометрическая R -матрица	44
5.2. Твистованная матрица монодромии	45
5.3. Недопустимые решения для XXZ цепочки	47
5.4. Классификация L -операторов	49
Лекция 6. Шестивершинная модель	52
6.1. Определение шестивершинной модели	52
6.2. Статистическая сумма 6-вершинной модели	53
6.2.1. Общие положения	53
6.2.2. Периодические граничные условия	54
6.2.3. Неоднородная модель	57
6.3. Граничные условия доменной стенки	58

6.4. Свойства статистической суммы	60
6.4.1. Свойство убывания	61
6.4.2. Полюсы статистической суммы	62
6.4.3. Явная формула для ССДС	63
Лекция 7. Матрицы чередующихся знаков	65
7.1. Определение матриц чередующихся знаков	65
7.2. Вычисление статистической суммы	69
Лекция 8. Мультикоммутационные соотношения	73
8.1. Суммирование по разбиениям	73
8.2. Тождество для статистической суммы	73
8.3. Мультикоммутационные соотношения	76
8.4. Другие коммутационные соотношения	81
8.4.1. Еще одно тождество для ССДС	81
Лекция 9. Скалярные произведения векторов Бете	83
9.1. Дуальные векторы Бете	83
9.2. Действие операторов C на векторы Бете	84
9.2.1. Действие одного оператора C на вектор Бете	84
9.2.2. Действие произведения операторов C на вектор Бете	88
9.3. Скалярное произведение	90
9.4. Тождество для детерминантов	92
9.5. Детерминантная формула для скалярного произведения	94
9.6. Ортогональность собственных векторов	97
9.7. Норма твистованного on-shell вектора	99
9.8. Ответы к некоторым упражнениям	102
9.8.1. Доказательство предложения 8.4.2	102
9.8.2. Вычисление суммы (9.3.12)	103
Лекция 10. Квантовая обратная задача	104
10.1. Циклические перестановки в матрице монодромии	104
10.2. Обратная задача	106
10.3. Формфакторы локальных операторов	108
Лекция 11. Композитная модель	110
11.1. Обобщенная модель	110
11.1.1. Два представления для скалярного произведения	112
11.2. Композитная модель	114
11.2.1. Определение композитной модели	114
11.2.2. Мультикомпозиционная модель	117
11.3. Особый on-shell вектор Бете	119
Лекция 12. Нулевые моды	122
12.1. Нулевые моды	122
12.2. Действие нулевых мод на векторы Бете	124
12.3. Соотношения между формфакторами матричных элементов матрицы монодромии	125
12.4. Сравнение детерминантных представлений	127
12.4.1. Преобразование формфактора $\mathcal{F}_n^{(21)}(z)$	127

12.4.2. Преобразование формфактора $\mathcal{F}_n^{(22)}(z)$	129
12.5. Универсальный формфактор	131
Лекция 13. Формфакторы локальных операторов	133
13.1. Необходимые формулы	133
13.2. Формфакторы парциальных нулевых мод	134
13.3. Вычисление производящего функционала	135
13.3.1. Дифференцирование по параметрам твиста	139
13.4. Вычисление формфакторов внедиагональных элементов	141
13.5. Доказательство новых тождеств	144
Лекция 14. Формфакторы локальных операторов в квантовом нелинейном уравнении Шрёдингера	147
14.1. Квантовое нелинейное уравнение Шрёдингера	147
14.1.1. Представление для матрицы монодромии через бозонные поля	147
14.2. Нулевые моды	150
14.3. Формфакторы локальных операторов	152
14.3.1. Формфактор оператора $\Psi^\dagger(x)\Psi(x)$	152
14.4. Формфакторы полей $\Psi(x)$ и $\Psi^\dagger(x)$	153
14.5. Интегралы от осциллирующих функций	154
Лекция 15. Корреляционные функции	157
15.1. Определение корреляционных функций	157
15.2. Термодинамический предел	158
15.2.1. Резольвента интегрального оператора	162
15.3. Решения твистованных уравнений Бете	163
15.3.1. Предварительные замечания	163
15.3.2. Неоднородная модель	163
15.4. Производящий функционал	166
15.5. Суммирование формфакторов	167
15.5.1. Отсечение лишних решений	168
15.5.2. Суммирование по корням уравнений	170
15.5.3. Интегральное представление для производящего функционала	171
15.5.4. Вычисление интеграла	173
15.5.5. Термодинамический предел производящего функционала	175
15.6. Некоторые простые частные случаи	178
15.6.1. Случай $\kappa = 1$	178
15.6.2. Случай $m = 1$	178
15.6.3. Свободные фермионы	179
15.6.4. Несколько общих замечаний	181
15.7. Вероятность образования пустоты	182
15.7.1. Вероятность образования пустоты при $\Delta = 1/2$	184
Список литературы	189

Введение

Как следует из названия, в этих лекциях рассказано об алгебраическом анзаце Бете. Что это такое? Для обстоятельного ответа на этот вопрос мне потребовалось бы по крайней мере ввести основные понятия этого метода, такие как квантовая матрица монодромии, L -оператор, R -матрица и т. д. Все это будет сделано в свое время. Пока же ограничусь лишь самыми общими замечаниями.

В 1931 году Г. Бете предложил оригинальный метод построения собственных функций квантового гамильтониана спиновой цепочки Гейзенберга [1]. Этот метод получил название анзаца Бете¹ и дал начало новому подходу к изучению целого класса квантовых систем. Несмотря на то что модели, решаемые анзацем Бете, являются $(1 + 1)$ -мерными, они находят достаточно широкое применение в различных областях квантовой физики, например в физике твердого тела, моделях сверхпроводимости и нелинейной оптики. Более того, в начале XXI века неожиданно было обнаружено, что этот метод оказывается весьма эффективным при решении ряда задач и в теориях с большим числом измерений, в частности в суперсимметричных калибровочных теориях поля и теории струн.

На рубеже 70–80 годов XX века в работах Ленинградской школы под руководством Л. Д. Фаддеева был развит Квантовый метод обратной задачи (КМОЗ) [4, 5, 6]. В рамках этого метода было установлено, что многие квантовые модели, решаемые анзацем Бете и имеющие совершенно различную физическую интерпретацию, могут быть описаны с помощью одной и той же алгебры операторов, являясь по сути различными представлениями этой алгебры. При этом многие важные свойства физических систем могут быть установлены уже на уровне алгебры, без использования ее конкретного представления. Этот подход и получил название алгебраического анзаца Бете. Если совсем коротко, то алгебраический анзац Бете — это метод работы со специальным алгеброй операторов, описывающей достаточно широкий класс квантовых систем. Именно об этом и рассказано в лекциях, которые предлагаются вниманию читателя.

Несмотря на значительный объем, эти лекции ни в коей мере не претендуют на полноту. Так, в них совершенно не затронут исходный метод, предложенный Г. Бете, который после появления алгебраического анзаца стали называть координатным анзацем Бете. Я не стал этого делать, потому что по координатному анзацу Бете уже существует многочисленная и хорошая литература (см., например, [2, 3]). В лекциях также ничего не говорится об иерархическом (вложенном) анзаце Бете, но уже по другой причине — этот подход во многом еще находится в стадии разработки. Я также не упомянул родственные подходы, такие как метод разделения переменных Складина и метод Q -оператора Бакстера. Я не старался охватить наибольшее количество тем и подходов, а вместо этого сконцентрировался на одном методе, но зато постарался осветить его подробно. Я также поместил в этих лекциях ряд результатов, которые были получены буквально в последние годы и которые еще не отражены в монографиях.

Не претендует на полноту и список литературы, помещенный в конце лекций. Полагаю, что такой список составить нереально, так как литература по алгебраическому анзацу Бете чрезвычайно обширна. Поэтому к перечисленным в курсе работам следует относиться как к затравочному списку для читателя, начиная с которого можно начать погружение в предмет.

Для понимания лекций необходимо знание линейной алгебры, анализа, теории функций комплексного переменного, некоторые сведения из функционального анализа. Знание квантовой механики приветствуется, однако, как правило, это требуется лишь для физической интерпретации

¹От немецкого *ansatz* — подход, метод. В русскоязычной литературе слово анзац часто употребляется как синоним подстановки.

полученных результатов. В тексте по большей части принята двойная нумерация формул: первое число — номер раздела в данной лекции, второе число — номер формулы в данном разделе. При ссылках на формулы из других лекций вводится дополнительное число, означающее номер лекции.

В заключение я заранее приношу извинения за опечатки и неточности, которые неизбежны при составлении текста такого объема. Еще я хочу поблагодарить С. З. Пакуляка и Э. Рагуси, в соавторстве с которыми было получен ряд новых результатов, вошедших в эти лекции. Я также благодарен А. А. Гуцалюку, А. Н. Ляшику, Д. С. Рудневой и В. С. Фанаскову, которые первыми приняли на себя удар, прослушали эти лекции и внесли много ценных замечаний.

Лекция 1. Тензорное произведение матриц

Большая часть материала этой лекции является вводной. В основном в ней рассматриваются вопросы, связанные с тензорным произведением линейных пространств и действующих в них матриц. Читатель, который хорошо знаком с этими вопросами, может прочитать этот материал не слишком внимательно, обратив внимание разве что на обозначения, которых мы будем придерживаться в дальнейшем. В частности, мы используем верхние индексы для обозначения матричных элементов (например, A^{jk}), в то время как нижние индексы зарезервированы для обозначения пространств, в которых матрицы действуют нетривиально (например, матрица R_{23} нетривиально действует в пространствах с номерами 2 и 3). Непосредственное отношение к квантовым интегрируемым моделям имеет лишь раздел 3, где мы вводим уравнение Янга–Бакстера и находим одно из его решений.

1. Тензорное произведение линейных пространств

Как правило, мы будем иметь дело с тензорными произведениями линейных пространств \mathbb{C}^2 , поэтому основное изложение дано именно для этого случая. Однако обобщение на пространства иной конечной размерности достаточно очевидно.

Пусть имеется тензорное произведение $V_1 \otimes V_2$, где $V_k \sim \mathbb{C}^2$, $k = 1, 2$. Это пространство состоит из множества пар векторов $x \otimes y$, где $x \in V_1$, а $y \in V_2$. Мы можем понимать x и y как двухкомпонентные столбцы

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Базис в пространстве $V_1 \otimes V_2$ состоит из четырех векторов, например

$$e^{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

из чего следует, что $V_1 \otimes V_2$ изоморфно пространству \mathbb{C}^4 . Удобно записать тензорное произведение $x \otimes y$ в виде двухкомпонентного блок-столбца (т. е. 2×1 блок-матрицы), причем каждый блок в свою очередь является двухкомпонентным столбцом:

$$x \otimes y = \begin{pmatrix} x^1 y^1 \\ x^1 y^2 \\ x^2 y^1 \\ x^2 y^2 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Первый блок представляет из себя столбец y , умноженный на компоненту x^1 , второй блок — есть столбец y , умноженный на компоненту x^2 . В целом $x \otimes y$ является 4-компонентным столбцом. В соответствии с этим правилом компоненты тензорного произведения нумеруются двумя индексами, а именно если $z = x \otimes y$, то $z^{aj} = x^a y^j$:

$$\begin{pmatrix} z^{11} \\ z^{12} \\ z^{21} \\ z^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 y^1 \\ x^1 y^2 \\ x^2 y^1 \\ x^2 y^2 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

При этом первый индекс $a = 1, 2$ задает номер блока, а второй индекс $j = 1, 2$ задает номер элемента в блоке. Разумеется, мы могли бы нумеровать компоненты вектора z одним индексом, пробегающим значения 1, 2, 3, 4, но двухиндексная нумерация подчеркивает, что мы имеем дело с тензорным произведением двух пространств.

Рассмотрим теперь вопрос о матрицах, действующих в пространстве $V_1 \otimes V_2$. Ясно, что это матрицы 4×4 , чьи матричные элементы можно было бы задать парой индексов, принимающих значения 1, 2, 3, 4. Ясно также, что в данном случае удобнее задавать матричные элементы двумя парами индексов $A^{ab,jk}$, каждый из которых принимает значения 1, 2:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} A^{11,11} & A^{11,12} & A^{12,11} & A^{12,12} \\ A^{11,21} & A^{11,22} & A^{12,21} & A^{12,22} \\ \hline A^{21,11} & A^{21,12} & A^{22,11} & A^{22,12} \\ A^{21,21} & A^{21,22} & A^{22,21} & A^{22,22} \end{array} \right). \quad (1.5)$$

Таким образом, матрица A имеет блочную структуру. Ее можно понимать как блочную 2×2 матрицу, где каждый блок в свою очередь является матрицей 2×2 . Первая пара индексов a и b задает номер блока и соответствует первому пространству V_1 , вторая пара j и k — номер элемента в блоке и соответствует второму пространству V_2 . Тогда если $z \in V_1 \otimes V_2$, то действие матрицы A на вектор z задается формулой

$$(Az)^{aj} = A^{ab,jk} z^{bk}. \quad (1.6)$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам происходит суммирование. Легко проверить, что такое действие эквивалентно обычному действию матриц 4×4 на 4-компонентные векторы (строка на столбец)

$$\begin{pmatrix} A^{11,11} & A^{11,12} & A^{12,11} & A^{12,12} \\ A^{11,21} & A^{11,22} & A^{12,21} & A^{12,22} \\ A^{21,11} & A^{21,12} & A^{22,11} & A^{22,12} \\ A^{21,21} & A^{21,22} & A^{22,21} & A^{22,22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{11} \\ z^{12} \\ z^{21} \\ z^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{11,11} z^{11} + A^{11,12} z^{12} + A^{12,11} z^{21} + A^{12,12} z^{22} \\ A^{11,21} z^{11} + A^{11,22} z^{12} + A^{12,21} z^{21} + A^{12,22} z^{22} \\ A^{21,11} z^{11} + A^{21,12} z^{12} + A^{22,11} z^{21} + A^{22,12} z^{22} \\ A^{21,21} z^{11} + A^{21,22} z^{12} + A^{22,21} z^{21} + A^{22,22} z^{22} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

(Здесь и в дальнейшем мы не указывать явно разбиение матриц и векторов на блоки.) Такое действие на векторы диктует правила произведения матриц, действующих в $V_1 \otimes V_2$. Пусть A , B и C действуют в $V_1 \otimes V_2$. Тогда

$$\text{если } C = AB, \quad \text{то } C^{ab,jk} = A^{ac,jl} B^{cb,lk}. \quad (1.8)$$

Опять же легко проверить, что это правило эквивалентно стандартному правилу (строка на столбец) для произведения матриц 4×4 .

Важным частным случаем матриц, действующих в $V_1 \otimes V_2$, являются матрицы, которые нетривиально действуют только в одном из двух пространств, а в другом они действуют как единичный оператор. Мы будем приписывать им нижние индексы — A_1 и A_2 , которые указывают на то, в каком пространстве (V_1 или V_2) данная матрица действует нетривиально, как некоторая 2×2 матрица A :

$$A_1(x \otimes y) = (Ax) \otimes y, \quad A_2(x \otimes y) = x \otimes (Ay). \quad (1.9)$$

Очевидно, что матричные элементы A_1 и A_2 имеют вид

$$A_1^{ab,jk} = A^{ab} \delta^{jk}, \quad A_2^{ab,jk} = \delta^{ab} A^{jk}. \quad (1.10)$$

Важно понимать, что в данном случае мы фактически имеем дело с одной 2×2 матрицей A . Мы просто распространяем действие этой матрицы с пространства \mathbb{C}^2 на пространство $V_1 \otimes V_2$,

причем мы это можем сделать двумя разными способами. Для наглядности приведем явный вид матриц A_1 и A_2 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} A^{11} & 0 & A^{12} & 0 \\ 0 & A^{11} & 0 & A^{12} \\ A^{21} & 0 & A^{22} & 0 \\ 0 & A^{21} & 0 & A^{22} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & 0 & 0 \\ A^{21} & A^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^{11} & A^{12} \\ 0 & 0 & A^{21} & A^{22} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

В обоих случаях мы имеем дело с одними и теми же матричными элементами $A^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$), но расставлены они разными способами.

Здесь уместно договориться о терминологии, которой мы постоянно будем пользоваться в дальнейшем. Пусть даны некоторые матрицы A_1 и B_2 . Мы будем говорить, что эти матрицы действуют в разных пространствах. Строго говоря, это неверно, ибо обе матрицы действуют в тензорном произведении $V_1 \otimes V_2$. Однако нетривиально они действительно действуют в разных пространствах — A_1 в V_1 , а B_2 в V_2 . Для краткости мы будем опускать слово *нетривиально*.

Теперь мы можем ввести понятие тензорного произведения матриц. Пусть A и B суть матрицы 2×2 . Естественно назвать тензорным произведением $A \otimes B$ матрицу, действующую в $V_1 \otimes V_2$ следующим образом

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = (Ax) \otimes (By). \quad (1.12)$$

Введем матрицы A_1 и B_2 согласно данному выше определению. Тогда

$$A_1 B_2 (x \otimes y) = A_1 (x \otimes (B_2 y)) = (A_1 x) \otimes (B_2 y), \quad (1.13)$$

$$B_2 A_1 (x \otimes y) = B_2 ((A_1 x) \otimes y) = (A_1 x) \otimes (B_2 y). \quad (1.14)$$

Следовательно,

$$(A \otimes B) = A_1 B_2 = B_2 A_1. \quad (1.15)$$

Тот факт, что матрицы A_1 и B_2 коммутируют, следует из того, что они действуют в разных пространствах. Легко проверить это непосредственным вычислением

$$(A_1 B_2)^{ab,jk} = A_1^{ac,jl} B_2^{cb,\ell k} = A^{ac} \delta^{jl} \delta^{cb} B^{\ell k} = A^{ab} B^{jk}, \quad (1.16)$$

$$(B_2 A_1)^{ab,jk} = B_2^{ac,jl} A_1^{cb,\ell k} = \delta^{ac} B^{jl} A^{cb} \delta^{\ell k} = B^{jk} A^{ab}. \quad (1.17)$$

Таким образом, тензорным произведением матриц A и B является матрица 4×4 , имеющая блочную структуру. Каждый блок представляет из себя 2×2 матрицу B , умноженную на соответствующий элемент A^{ab} матрицы A :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A^{11} B^{11} & A^{11} B^{12} & A^{12} B^{11} & A^{12} B^{12} \\ A^{11} B^{21} & A^{11} B^{22} & A^{12} B^{21} & A^{12} B^{22} \\ A^{21} B^{11} & A^{21} B^{12} & A^{22} B^{11} & A^{22} B^{12} \\ A^{21} B^{21} & A^{21} B^{22} & A^{22} B^{21} & A^{22} B^{22} \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Вообще говоря, можно тензорно перемножать матрицы любого размера. Пусть даны матрицы A размера $N_1 \times M_1$ и B размера $N_2 \times M_2$. Тензорным произведением матриц A и B является матрица $C = A \otimes B$ размера $N_1 N_2 \times M_1 M_2$ и имеющая блочную структуру. Ее следует понимать как блочную $N_1 \times M_1$ матрицу, где каждый блок в свою очередь является матрицей $N_2 \times M_2$. Матричные элементы матрицы C нумеруются двумя парами индексов $C^{ab,jk}$. Первая пара $a = 1, \dots, N_1$ и $b = 1, \dots, M_1$ задают номер блока, вторая пара $j = 1, \dots, N_2$ и $k = 1, \dots, M_2$ — номер элемента в блоке. Сами матричные элементы равны $C^{ab,jk} = A^{ab} B^{jk}$. В частности,

именно это правило мы использовали для тензорного произведения двух 2×1 матриц x и y в формуле (1.3).

По аналогии с обозначениями A_1 и A_2 мы могли бы обозначать символом A_{12} матрицы, которые нетривиально действуют в обоих компонентах тензорного произведения $V_1 \otimes V_2$. Однако до тех пор, пока мы имеем дело с тензорным произведением лишь двух пространств, такие обозначения чаще всего оказываются избыточными. Исключения составляют случаи, когда мы имеем дело с перестановкой пространств V_1 и V_2 . Рассмотрим этот случай.

Важным объектом, действующим в пространстве $V_1 \otimes V_2$, является матрица перестановки P . Она обладает свойством

$$P(x \otimes y) = y \otimes x \quad (1.19)$$

для любых x и y , т. е.

$$P(V_1 \otimes V_2) = V_2 \otimes V_1. \quad (1.20)$$

Из соотношения (1.19) легко найти, что матричные элементы матрицы перестановки имеют вид

$$P^{ab,jk} = \delta^{ak} \delta^{bj}, \quad (1.21)$$

т. е.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Легко проверить, что $P^2 = \mathbf{1}$ и

$$P(A \otimes B)P = B \otimes A \quad (1.23)$$

для любых A и B . Если матрица C действует в $V_1 \otimes V_2$, то матрица перестановки меняет местами пары индексов

$$(PCP)^{ab,jk} = P^{ac,jl} C^{cd,\ell\ell'} P^{c'b,\ell'k} = \delta^{al} \delta^{cj} C^{cd,\ell\ell'} \delta^{c'k} \delta^{\ell'b} = C^{jk,ab}. \quad (1.24)$$

Мы будем записывать это равенство в виде

$$PC_{12}P = C_{21}, \quad \text{где} \quad C_{21}^{ab,jk} = C_{12}^{jk,ab}. \quad (1.25)$$

В данном случае наличие нижних индексов важно. Они указывают, какая пара из верхних индексов относится к первому пространству V_1 , а какая ко второму пространству V_2 . Несложно убедиться в том, что матрицы C_{12} и C_{21} отличаются друг от друга перестановкой второй и третьей строк, а также второго и третьего столбцов.

Однако, за исключением таких случаев, мы всегда будем предполагать, что первая пара из верхних индексов относится к V_1 , а вторая к V_2 , и тогда нижние индексы несущественны. В частности, не обязательно писать нижние индексы у матрицы перестановки: P_{12} . Это тем более оправдано, поскольку в силу $P^2 = \mathbf{1}$ мы имеем $P_{12} = P_{21}$ (так как по определению $P_{21} = P_{12}P_{12}P_{12}$).

В завершение этого раздела мы введем операцию взятия следа. Как обычно, мы называем следом матрицы сумму ее диагональных элементов, т. е. $\text{tr} A = A^{aa,jj}$ (напомним, что по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Однако в тензорном произведении $V_1 \otimes V_2$ есть возможность взять частичный след по одному из пространств: tr_1 — это след по пространству V_1 , tr_2 — это след по пространству V_2 . Легко догадаться, что $\text{tr}_1 A = A^{aa,jk}$, а $\text{tr}_2 A = A^{ab,jj}$. Таким образом, след матрицы A по первому пространству есть матрица, действующая во втором

пространстве, а след матрицы A по второму пространству есть матрица, действующая в первом пространстве.

Вычислим, например, след матрицы перестановки по каждому из пространств. Имеем

$$\text{tr}_1 P = P^{aa,jk} = \delta^{ak} \delta^{aj} = \delta^{jk} = \mathbf{1}_2, \quad (1.26)$$

$$\text{tr}_2 P = P^{ab,jj} = \delta^{aj} \delta^{bj} = \delta^{ab} = \mathbf{1}_1, \quad (1.27)$$

где через $\mathbf{1}_1$ и $\mathbf{1}_2$ мы обозначили единичные матрицы, которые действуют соответственно в V_1 и V_2 . Ясно, однако, что $\mathbf{1}_1 = \mathbf{1}_2 = \mathbf{1}$, поскольку обе матрицы $\mathbf{1}_1$ и $\mathbf{1}_2$ действуют как единичные в обоих пространствах. Таким образом, след матрицы перестановки по любому из пространств равен единичному оператору.

2. Тензорное произведение нескольких пространств

Рассмотрим теперь тензорное произведение нескольких пространств $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$, каждое из которых изоморфно \mathbb{C}^2 . Элементами этого пространства являются векторы $z = x_1 \otimes \cdots \otimes x_N$. Всего каждый вектор имеет 2^N компонент, которые нумеруются последовательностью индексов $z^{a_1 \dots a_N}$. Каждый индекс a_α соответствует своему пространству V_α и может принимать два значения $a_\alpha = 1, 2$.

Матрицы, действующие в этом пространстве, задаются N парами индексов: $A^{a_1 b_1, \dots, a_N b_N}$ и имеют размер $2^N \times 2^N$. Их действие на векторы вполне аналогично действию в тензорном произведении двух пространств, а именно если $w = Az$, то

$$w^{a_1 \dots a_N} = A^{a_1 b_1, \dots, a_N b_N} z^{b_1 \dots b_N}. \quad (2.1)$$

Также аналогично определяется и произведение матриц: если $C = AB$, то

$$C^{a_1 b_1, \dots, a_N b_N} = A^{a_1 c_1, \dots, a_N c_N} B^{c_1 b_1, \dots, c_N b_N}. \quad (2.2)$$

Можно понимать матрицы как систему вложенных друг в друга блоков размера 2×2 . Сначала матрица $2^N \times 2^N$ делится на четыре блока размера $2^{N-1} \times 2^{N-1}$, затем каждый блок в свою очередь делится на четыре блока размера $2^{N-2} \times 2^{N-2}$ и т. д. Первая пара индексов a_1 и b_1 нумерует самые большие блоки $2^{N-1} \times 2^{N-1}$, вторая нумерует блоки $2^{N-2} \times 2^{N-2}$ и т. д. Однако из-за громоздкости таких формул их практически никогда не используют.

Мы можем также ввести матрицу перестановки, действующую в двух из N пространств. Теперь мы обязаны снабдить ее нижними индексами, для того чтобы указать эти пространства. Так

$$P_{kn} V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \otimes \cdots \otimes V_n \otimes \cdots \otimes V_N = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \otimes \cdots \otimes V_k \otimes \cdots \otimes V_N. \quad (2.3)$$

Матрица перестановки имеет компоненты

$$P_{kn}^{a_1 b_1, \dots, a_N b_N} = \delta^{a_k b_n} \delta^{a_n b_k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, n}}^N \delta^{a_j b_j}, \quad (2.4)$$

т. е. в произведении $V_k \otimes V_n$ эта матрица действует как обычная матрица перестановки P , рассмотренная выше, а в остальных пространствах она действует как единичная матрица.

Ниже мы постоянно будем встречаться с матрицами, которые подобно матрице перестановки действуют лишь в двух пространствах. Такие матрицы мы будем снабжать двумя нижними индексами. Так

$$A_{kn}^{a_1 b_1, \dots, a_k b_k, \dots, a_n b_n, \dots, a_N b_N} = A^{a_k b_k, a_n b_n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, n}}^N \delta^{a_j b_j}. \quad (2.5)$$

В качестве примера в приложении приведен явный вид матриц, действующих в двух компонентах тензорного произведения трех пространств $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$.

Иногда нам потребуется с помощью нижних индексов подчеркнуть, что некоторая матрица Z действует нетривиально во всех N пространствах: $W_{1\dots N}$. Такие обозначения удобны, например, при записи основного свойства матрицы перестановки

$$P_{kn}W_{1\dots k\dots n\dots N}P_{kn} = W_{1\dots n\dots k\dots N}, \quad (2.6)$$

т. е. матрица перестановки P_{kn} меняет местами нижние индексы k и n .

Наконец, так же как и в случае тензорного произведения двух пространств, мы можем определить частичные следы матриц по какой-нибудь компоненте тензорного произведения:

$$\text{tr}_k A = A^{a_1 b_1, \dots, a_k a_k, \dots, a_N b_N}. \quad (2.7)$$

Легко проверить, например, что след матрицы перестановки P_{kn} по любому из пространств V_k или V_n дает единичный оператор.

2.1. Пример. В пространстве $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \otimes V_4$ вычислить

$$\text{tr}_1(P_{12}A_{13}A_{14}). \quad (2.8)$$

Способ первый. Воспользуемся тем, что $P_{12}^2 = \mathbf{1}$. Тогда

$$\text{tr}_1(P_{12}A_{13}A_{14}) = \text{tr}_1(P_{12}A_{13}A_{14}P_{12}P_{12}). \quad (2.9)$$

Подчеркнутые матрицы оказались между двумя матрицами перестановки P_{12} . Следовательно, в результате действия на них P_{12} справа и слева индекс 1 меняется на индекс 2. Мы получаем

$$\text{tr}_1(P_{12}A_{13}A_{14}) = \text{tr}_1(A_{23}A_{24}P_{12}). \quad (2.10)$$

Теперь в пространстве V_1 действует только лишь матрица P_{12} , в то время как A_{23} и A_{24} действуют в V_1 как единичные операторы. Поэтому операция взятия следа tr_1 от всего произведения сводится к взятию следа только от матрицы перестановки, что, как мы уже знаем, дает единичный оператор:

$$\text{tr}_1(P_{12}A_{13}A_{14}) = A_{23}A_{24}. \quad (2.11)$$

Способ второй. Проведем прямое вычисление следа. Имеем

$$\begin{aligned} \text{tr}_1(P_{12}A_{13}A_{14}) &= \text{tr}_1 \left(P_{12}^{a_1 c_1, a_2 c_2, a_3 c_3, a_4 c_4} A_{13}^{c_1 c'_1, c_2 c'_2, c_3 c'_3, c_4 c'_4} A_{14}^{c'_1 b_1, c'_2 b_2, c'_3 b_3, c'_4 b_4} \right) \\ &= P_{12}^{a_1 c_1, a_2 c_2, a_3 c_3, a_4 c_4} A_{13}^{c_1 c'_1, c_2 c'_2, c_3 c'_3, c_4 c'_4} A_{14}^{c'_1 a_1, c'_2 b_2, c'_3 b_3, c'_4 b_4}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Подставляя сюда (2.4), (2.5), находим

$$\text{tr}_1(P_{12}A_{13}A_{14}) = \delta^{a_1 c_2} \delta^{a_2 c_1} \delta^{a_3 c_3} \delta^{a_4 c_4} \delta^{c_2 c'_2} \delta^{c_4 c'_4} \delta^{c'_2 b_2} \delta^{c'_3 b_3} A^{c_1 c'_1, c_3 c'_3} A_{14}^{c'_1 a_1, c'_4 b_4}. \quad (2.13)$$

Суммируя δ -символы, получаем

$$\text{tr}_1(P_{12}A_{13}A_{14}) = A^{a_2 c'_1, a_3 b_3} A^{c'_1 b_2, a_4 b_4} = A_{23}A_{24}. \quad (2.14)$$

Мы видим, что второй способ, хоть и применим для решения задачи, но является более громоздким, нежели первый.

3. Уравнение Янга–Бакстера

Пусть матрица $R(u_1, u_2)$, зависящая от двух комплексных переменных u_1 и u_2 , действует в пространстве $V_1 \otimes V_2$. Рассмотрим пространство $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ и введем матрицы $R_{12}(u_1, u_2)$, $R_{13}(u_1, u_3)$, $R_{23}(u_2, u_3)$ (явный вид этих матриц дан в Приложении 1). Требуется найти решения уравнения

$$R_{12}(u_1, u_2)R_{13}(u_1, u_3)R_{23}(u_2, u_3) = R_{23}(u_2, u_3)R_{13}(u_1, u_3)R_{12}(u_1, u_2). \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) является матричным функциональным уравнением. Оно носит название уравнение Янга–Бакстера и играет исключительно важную роль в теории точно решаемых моделей. Решения этого уравнения принято называть R -матрицами. В этом упражнении мы не ставим цель найти все решения уравнения Янга–Бакстера, а попробуем найти хотя бы одно нетривиальное решение этого уравнения.

Заметим, что если $R(u_1, u_2)$ является решением (3.1), то $\varphi(u_1, u_2)R_{12}(u_1, u_2)$ тоже является решением, где $\varphi(u_1, u_2)$ — произвольная скалярная функция двух переменных. Поэтому имеет смысл искать решения уравнения (3.1) с точностью до умножения на скалярную функцию.

Очевидным решением (3.1) является единичная матрица. Вторым чуть менее очевидным решением служит матрица перестановки P . Действительно, умножая тождество

$$P_{23}P_{13} = P_{23}P_{13} \quad (3.2)$$

справа на P_{12} , мы получаем

$$P_{23}P_{13}P_{12} = P_{12}P_{12}P_{23}P_{13}P_{12} = P_{12}P_{13}P_{23}, \quad (3.3)$$

где мы воспользовались равенствами $P_{12}^2 = \mathbf{1}$ и $P_{12}P_{13}P_{23}P_{12} = P_{23}P_{13}$.

Попробуем найти решение, зависящее от разности $u_1 - u_2$ и являющееся линейной комбинацией единичной матрицы и матрицы перестановки. Пусть $u_1 - u_2 = u$ и $u_2 - u_3 = v$. Тогда $u_1 - u_3 = u + v$, и уравнение Янга–Бакстера приобретает вид

$$R_{12}(u)R_{13}(u + v)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u + v)R_{12}(u). \quad (3.4)$$

Мы ищем решение этого уравнения в виде $R(u) = \phi(u)\mathbf{1} + cP$, где $\phi(u)$ — некоторая гладкая функция, а c — произвольная константа. Из матричного уравнения (3.4) должно следовать функциональное уравнение на функцию $\phi(u)$. Выведем это уравнение. Для этого подставим $R(u) = \phi(u)\mathbf{1} + cP$ в уравнение (3.4) и разложим обе части равенства (3.4) по степеням c . При c^0 и c^3 получаем очевидные тождества. При c^1 также получаем тождество:

$$\begin{aligned} \phi(v)\phi(u + v)P_{12} + \phi(v)\phi(u)P_{13} + \phi(u)\phi(u + v)P_{23} \\ = \phi(u)\phi(u + v)P_{23} + \phi(v)\phi(u)P_{13} + \phi(v)\phi(u + v)P_{12}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Нетривиальное равенство возникает в слагаемых при c^2 :

$$\phi(u)P_{13}P_{23} + \phi(v)P_{12}P_{13} + \phi(u + v)P_{12}P_{23} = \phi(u)P_{23}P_{13} + \phi(v)P_{13}P_{12} + \phi(u + v)P_{23}P_{12}. \quad (3.6)$$

Умножим (3.6) слева на P_{12} . Тогда

$$\phi(u)P_{12}P_{13}P_{23} + \phi(v)P_{13} + \phi(u + v)P_{23} = \phi(u)P_{12}P_{23}P_{13} + \phi(v)P_{23} + \phi(u + v)P_{13}. \quad (3.7)$$

Теперь умножим получившееся равенство справа на P_{13} :

$$\phi(u)\mathbf{1} + \phi(v)\mathbf{1} + \phi(u + v)P_{23}P_{13} = \phi(u)P_{12}P_{23} + \phi(v)P_{23}P_{13} + \phi(u + v)\mathbf{1}. \quad (3.8)$$

Наконец, умножая (3.8) справа на P_{23} , получаем окончательно

$$\phi(u)P_{23} + \phi(v)P_{23} + \phi(u+v)P_{12} = \phi(u)P_{12} + \phi(v)P_{12} + \phi(u+v)P_{23}, \quad (3.9)$$

или

$$(\phi(u) + \phi(v) - \phi(u+v))P_{23} = (\phi(u) + \phi(v) - \phi(u+v))P_{12}. \quad (3.10)$$

Поскольку P_{12} и P_{23} суть разные матрицы, равенство возможно только при условии

$$\phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v) \quad (3.11)$$

для любых u и v . Хорошо известно, что единственной гладкой функцией, которая является решением функционального уравнения (3.11), является линейная функция $\phi(u) = au$, где a — произвольная константа. Эта произвольная константа может быть включена в константу c , и таким образом мы находим, что матрица

$$R(u_1, u_2) = (u_1 - u_2)\mathbf{1} + cP \quad (3.12)$$

является решением уравнения Янга–Бакстера (3.1). Это единственное решение, зависящее от разности аргументов и являющееся линейной комбинацией матрицы перестановки и единичной матрицы. Заметим также, что при выводе этого решения мы нигде не использовали тот факт, что пространства V_k изоморфны \mathbb{C}^2 . Поэтому полученное решение справедливо также и для матриц R , действующих в пространстве $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$ при произвольном N .

4. Явный вид матриц в пространстве $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$

В качестве иллюстрации мы приведем явный вид некоторых матриц, действующих в пространстве $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$. Пусть матрица R действует в $V_1 \otimes V_2$, где $V_k \sim \mathbb{C}^2$. Приведем ее явный вид:

$$R = \begin{pmatrix} R^{11,11} & R^{11,12} & R^{12,11} & R^{12,12} \\ R^{11,21} & R^{11,22} & R^{12,21} & R^{12,22} \\ R^{21,11} & R^{21,12} & R^{22,11} & R^{22,12} \\ R^{21,21} & R^{21,22} & R^{22,21} & R^{22,22} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Введем теперь матрицы R_{12} , R_{13} и R_{23} , действующие в $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$. Каждая из них действует лишь в паре пространств как матрица R с элементами $R^{ab,jk}$. В оставшемся пространстве она действует как единичная матрица. Все матрицы имеют размер 8×8 . Ниже приводится их явный вид:

$$R_{12} = \begin{pmatrix} R^{11,11} & 0 & R^{11,12} & 0 & R^{12,11} & 0 & R^{12,12} & 0 \\ 0 & R^{11,11} & 0 & R^{11,12} & 0 & R^{12,11} & 0 & R^{12,12} \\ R^{11,21} & 0 & R^{11,22} & 0 & R^{12,21} & 0 & R^{12,22} & 0 \\ 0 & R^{11,21} & 0 & R^{11,22} & 0 & R^{12,21} & 0 & R^{12,22} \\ R^{21,11} & 0 & R^{21,12} & 0 & R^{22,11} & 0 & R^{22,12} & 0 \\ 0 & R^{21,11} & 0 & R^{21,12} & 0 & R^{22,11} & 0 & R^{22,12} \\ R^{21,21} & 0 & R^{21,22} & 0 & R^{22,21} & 0 & R^{22,22} & 0 \\ 0 & R^{21,21} & 0 & R^{21,22} & 0 & R^{22,21} & 0 & R^{22,22} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

$$R_{13} = \begin{pmatrix} R^{11,11} & R^{11,12} & 0 & 0 & R^{12,11} & R^{12,12} & 0 & 0 \\ R^{11,21} & R^{11,22} & 0 & 0 & R^{12,21} & R^{12,22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^{11,11} & R^{11,12} & 0 & 0 & R^{12,11} & R^{12,12} \\ 0 & 0 & R^{11,21} & R^{11,22} & 0 & 0 & R^{12,21} & R^{12,22} \\ R^{21,11} & R^{21,12} & 0 & 0 & R^{22,11} & R^{22,12} & 0 & 0 \\ R^{21,11} & R^{21,12} & 0 & 0 & R^{22,11} & R^{22,12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^{21,21} & R^{21,22} & 0 & 0 & R^{22,21} & R^{22,22} \\ 0 & 0 & R^{21,21} & R^{21,22} & 0 & 0 & R^{22,21} & R^{22,22} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$R_{23} = \begin{pmatrix} R^{11,11} & R^{11,12} & R^{12,11} & R^{12,12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R^{11,21} & R^{11,22} & R^{12,21} & R^{12,22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R^{21,11} & R^{21,12} & R^{22,11} & R^{22,12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R^{21,21} & R^{21,22} & R^{22,21} & R^{22,22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R^{11,11} & R^{11,12} & R^{12,11} & R^{12,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R^{11,21} & R^{11,22} & R^{12,21} & R^{12,22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R^{21,11} & R^{21,12} & R^{22,11} & R^{22,12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R^{21,21} & R^{21,22} & R^{22,21} & R^{22,22} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Лекция 2. Квантовые интегрируемые системы

В этой лекции мы опишем общую схему построения квантовых интегрируемых моделей в рамках квантового метода обратной задачи (КМОЗ). Мы также рассмотрим, как работает эта схема на конкретном примере XXZ магнетика Гейзенберга.

1. XXZ цепочка Гейзенберга

Рассмотрим цепочку из N частиц спина $1/2$ (см. рис. 2.1) и предположим, что ближайшие соседи в этой цепочке взаимодействуют друг с другом.

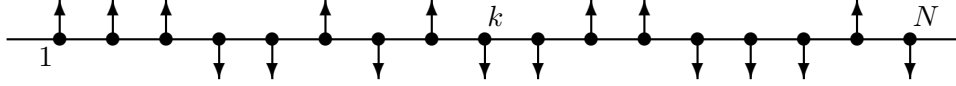


Рис. 2.1. XXZ магнетик Гейзенберга

Тогда гамильтониан такой квантовой системы можно записать в виде

$$H = \sum_{k=1}^N (J_x \sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + J_y \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + J_z \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z). \quad (1.1)$$

Здесь J_x , J_y и J_z — константы взаимодействия соответственно вдоль осей x , y и z , а $\sigma_k^{x,y,z}$ — проекции операторов спина k -й частицы на эти оси. Такую модель принято называть XYZ цепочкой (магнетиком) Гейзенберга. Если две из констант взаимодействия равны, например $J_x = J_y$, но $J_x \neq J_z$, то модель называется XXZ цепочкой Гейзенберга. Наконец, в случае $J_x = J_y = J_z$ модель носит название XXX цепочки Гейзенберга и ее гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_{k=1}^N (\sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z), \quad (1.2)$$

где мы без ограничения общности положили все константы взаимодействия равными единице.

ЗАМЕЧАНИЕ. В формулах (1.1), (1.2) мы неявно предположили существование периодических граничных условий, т. е. фактически цепочка завернута в кольцо. Действительно, в сумме по k при $k = N$ возникают проекции оператора σ_{N+1} , а этой частицы в цепочке нет. Положение можно исправить, если положить по определению $\sigma_{N+1}^{x,y,z} = \sigma_1^{x,y,z}$, и тогда цепочка представляет из себя кольцо. При этом модель по-прежнему остается одномерной в том смысле, что координата частицы на цепочке задается одним целым числом k . Вообще говоря, требование периодичности необязательно. Можно рассматривать и открытые цепочки. В этом случае надо просто заменить в формулах (1.1), (1.2) верхний предел суммирования на $N - 1$. Однако есть несколько причин, по которым мы предпочитаем иметь дело с замкнутыми цепочками. Во-первых, такие модели проще с математической точки зрения. Во-вторых, в замкнутых цепочках с самого начала обеспечено условие трансляционной инвариантности. Наконец, в-третьих, наибольший интерес

представляют из себя цепочки большой длины (формально мы устремляем $N \rightarrow \infty$). Если мы интересуемся процессами, которые происходят вдали от границ такой длинной цепочки, то по физическим соображениям они не должны зависеть от граничных условий, а значит, для описания этих физических процессов мы можем выбрать ту модель, которая имеет дело с наиболее простым математическим аппаратом.

Операторы спина $1/2$ задаются стандартными матрицами Паули

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Однако в формуле (1.2) σ -матрицы имеют дополнительный нижний индекс. Это означает, что данный оператор действует в тензорном произведении пространств $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$, где $V_k \sim \mathbb{C}^2$, причем $\sigma_k^{x,y,z}$ нетривиально действует только в V_k . Иными словами,

$$\sigma_k^\alpha = \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \sigma^\alpha \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}, \quad \alpha = x, y, z. \quad (1.4)$$

Таким образом, эти операторы являются матрицами размера $2^N \times 2^N$. Следовательно, и весь гамильтониан тоже является матрицей $2^N \times 2^N$.

Стандартная квантовомеханическая задача состоит в нахождении спектра гамильтониана квантовой системы. Поскольку в нашем случае гамильтониан — это матрица конечного порядка, то мы имеем дело с линейной алгеброй. Следовательно, мы могли бы найти собственные значения матрицы H из характеристического уравнения

$$\det(H - \lambda \mathbf{1}) = 0. \quad (1.5)$$

Представим, однако, что рассматриваемая цепочка является моделью некоторого одномерного макроскопического кристалла. Это означает, что число узлов цепочки N равно числу атомов в макроскопическом кристалле. Допустим, что $N \sim 10^6$. Тогда гамильтониан является матрицей размера $2^{10^6} \times 2^{10^6}$, а уравнение (1.5) является алгебраическим уравнением порядка 2^{10^6} . Это число настолько огромно, что его даже не с чем сравнивать. Ясно, что никакой компьютер не справится с подобной задачей. Мы приходим к выводу, что стандартные методы линейной алгебры в данном случае непригодны, и, следовательно, нужно искать какие-то обходные пути.

Такой обходной путь был предложен Г. Бете в 1931 году в работе [1]. Этот метод впоследствии получил название анзаца Бете. Читатель может ознакомиться с деталями этого подхода в монографиях [2, 3].

В конце 70-х, начале 80-х годов прошлого столетия в работах Ленинградской школы (см., например, [4, 5, 6]) был развит квантовый метод обратной задачи (КМОЗ), составной частью которого является алгебраический анзац Бете. Дабы отличить этот новый подход от исходного метода, предложенного Г. Бете, последний стали называть координатным анзацем Бете. Целью настоящих лекций является знакомство именно с алгебраическим анзацем Бете.

2. Построение интегрируемых систем

Мы в основном сосредоточимся на сравнительно недавних результатах, полученных в области алгебраического анзаца Бете. Поэтому основные положения КМОЗ будут приведены достаточно кратко, лишь в той мере, в какой это необходимо для понимания последующего материала. Более полное изложение основных положений КМОЗ и алгебраического анзаца Бете можно найти в работах [7, 3].

Опишем общую процедуру построения квантовых интегрируемых систем, которая применяется в рамках КМОЗ. Пусть нам дана 2×2 матрица $T(u)$. Ее матричные элементы $T^{ij}(u)$

являются операторами, действующими в некотором гильбертовом пространстве \mathcal{H} и зависящими от комплексной переменной u . Следуя традиции, мы часто будем обозначать эту матрицу

$$T(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Допустим, что коммутационные соотношения между операторами $T^{ij}(u)$ заданы следующим образом:

$$R_{12}(u-v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R_{12}(u-v), \quad (2.2)$$

где $R(u-v)$ является решением уравнения Янга–Бакстера (1.3.12):

$$R(u-v) = (u-v)\mathbf{I} + cP = \begin{pmatrix} u-v+c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u-v & c & 0 \\ 0 & c & u-v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u-v+c \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Соотношение (2.2) записано в тензорном произведении трех пространств $V_1 \otimes V_2 \otimes \mathcal{H}$, где $V_k \sim \mathbb{C}^2$, $k = 1, 2$. Здесь R -матрица $R_{12}(u-v)$ действует нетривиально в $V_1 \otimes V_2$ и как единичный оператор в \mathcal{H} , а матрицы T_k действуют нетривиально в $V_k \otimes \mathcal{H}$. Соотношение (2.2) иногда называют сплетающим соотношением. Мы будем называть его RTT -соотношением. По-другому формулу (2.2) можно переписать в виде

$$R(u-v)(T(u) \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes T(v)) = (\mathbf{1} \otimes T(v))(T(u) \otimes \mathbf{1})R(u-v). \quad (2.4)$$

Здесь мы опустили индексы у матриц T , явно указав, в каких пространствах действует (нетривиально) каждая из них. Иногда форма (2.4) оказывается более удобной.

В случае R -матрицы (2.3) нетрудно вывести из матричного равенства (2.2) коммутационные соотношения для отдельных матричных элементов. Действительно, запишем (2.2) в виде

$$(R_{12}(u-v))^{j\ell, \alpha\nu} (T_1(u))^{\ell n, \nu\mu} (T_2(v))^{nk, \mu\beta} = (T_2(v))^{j\ell, \alpha\nu} (T_1(u))^{\ell n, \nu\mu} (R_{12}(u-v))^{nk, \mu\beta} \quad (2.5)$$

и подставим сюда формулы для матричных элементов:

$$\begin{aligned} (R_{12}(u-v))^{jk, \alpha\beta} &= (u-v)\delta^{jk}\delta^{\alpha\beta} + c\delta^{j\beta}\delta^{k\alpha}, \\ (T_1(u))^{jk, \alpha\beta} &= T^{jk}(u)\delta^{\alpha\beta}, \\ (T_2(v))^{jk, \alpha\beta} &= T^{\alpha\beta}(v)\delta^{jk}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Тогда после несложных вычислений получим

$$[T^{ij}(u), T^{kl}(v)] = \frac{c}{u-v} (T^{kj}(v)T^{il}(u) - T^{kj}(u)T^{il}(v)). \quad (2.7)$$

Вернемся к матричному равенству (2.2). Умножим его справа на $R_{12}^{-1}(u-v)$ и возьмем след по пространству $V_1 \otimes V_2$. Тогда

$$\text{tr}_{12} T_1(u)T_2(v) = \text{tr}_{12} T_2(v)T_1(u), \quad (2.8)$$

где мы воспользовались возможностью циклической перестановки под знаком следа. Поскольку след тензорного произведения равен произведению следов, мы получаем

$$T(u)T(v) = T(v)T(u), \quad (2.9)$$

где

$$\mathcal{T}(u) = \text{tr } T(u) = A(u) + D(u). \quad (2.10)$$

Разложим оператор $\mathcal{T}(u)$ в степенной ряд по u с центром в некоторой точке u_0

$$\mathcal{T}(u) = \sum_k (u - u_0)^k I_k, \quad (2.11)$$

где коэффициенты I_k суть некоторые операторы, действующие в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . В этой формуле мы не конкретизируем область суммирования по k . Вообще говоря, сумма в (2.11) может быть как конечной, так и бесконечной. В любом случае, дифференцируя соотношение (2.9) k раз по u и n раз по v в точке u_0 , мы получим, что все операторы I_k коммутируют

$$[I_k, I_n] = 0 \quad \forall k, n. \quad (2.12)$$

Если мы теперь выберем один из этих I_k в качестве гамильтониана некоторой квантовой системы, то мы получим модель с вообще говоря бесконечным набором интегралов движения, т.е. интегрируемую систему. Такова общая схема построения интегрируемых моделей в рамках квантового метода обратной задачи.

Сделаем остановку и обсудим полученные результаты. Пока роль матрицы $R(u-v)$ довольно загадочна. В частности, непонятно, почему потребовалось выбирать ее именно в виде (2.3). Действительно, в приведенном выше выводе мы могли бы заменить эту матрицу на любую другую, и при этом ничего бы не изменилось. Забегая вперед, скажем, что такой вид R -матрицы гарантирует совместность коммутационных соотношений между матричными элементами матрицы $T(u)$. Мы обсудим этот вопрос более подробно в следующей лекции.

Необходимо также отметить, что наличие бесконечного набора интегралов движения еще не гарантирует, что полученная модель описывает какую-либо реальную физическую интегрируемую систему. Операторы I_k могут оказаться зависимыми, они, вообще говоря, не обязаны быть самосопряженными, локальными и т.д. Все эти вопросы, безусловно, важны, и они требуют отдельного изучения. Подробности читатель может найти в уже упоминавшихся работах [7, 3]. Отметим только, что для достижения локальности операторов I_k важно правильно выбрать точку разложения u_0 . Кроме того, вместо оператора $\mathcal{T}(u)$ чаще всего удобнее разлагать в ряд какую-нибудь функцию от этого оператора. Ниже мы это продемонстрируем на конкретном примере.

Наконец, из коммутационных соотношений (2.7) следует, что каждый оператор $T^{ij}(u)$ коммутирует сам с собой при любых значениях аргумента

$$[T^{ij}(u), T^{ij}(v)] = 0. \quad (2.13)$$

Поэтому мы могли бы вместо следа $\text{tr } T(u)$ взять любой матричный элемент матрицы $T(u)$ и построить из него набор коммутирующих операторов точно по той же схеме, что мы использовали выше. И действительно, так иногда поступают. Выбор следа $\text{tr } T(u)$ в качестве производящей функции для интегралов движения обусловлен тем, что мы хотим получить модель с периодическими граничными условиями. Как мы увидим чуть позже, такие граничные условия автоматически возникнут, благодаря свойству цикличности следа.

3. Построение матрицы монодромии

В квантовом методе обратной задачи принято называть матрицу $T(u)$ квантовой матрицей монодромии. Этот термин заимствован из классического метода обратной задачи рассеяния, где аналог матрицы $T(u)$ представляет собой данные рассеяния. След матрицы монодромии $\mathcal{T}(u) = \text{tr } T(u)$ называется трансфер-матрицей. В данном случае слово “матрица” следует понимать в смысле “оператор” (аналогично случаю S -матрицы).

Возникает вопрос, а существуют ли такие $T(u)$, которые удовлетворяют соотношению (2.2)? Понятно, что единичная матрица удовлетворяет этому соотношению, но этот пример не представляет большого интереса. На самом деле один нетривиальный пример мы уже имеем — это R -матрица. Действительно, в силу уравнения Янга–Бакстера

$$R_{12}(u-v)R_{13}(u-w)R_{23}(v-w) = R_{23}(v-w)R_{13}(u-w)R_{12}(u-v), \quad (3.1)$$

мы вполне можем сказать, что $T(u) = R(u-w)$. Надо только договориться о том, как мы понимаем это равенство. Мы знаем, что $R(u-w)$ — это матрица 4×4 . Но мы можем понимать ее как матрицу 2×2 , чьи элементы являются операторами, действующими в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Иными словами, эти операторы суть тоже матрицы 2×2 . Положим для удобства $w = c/2$. Тогда имеем

$$R(u - \frac{c}{2}) = \begin{pmatrix} u + \frac{c}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u - \frac{c}{2} & c & 0 \\ 0 & c & u - \frac{c}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u + \frac{c}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \frac{c}{2}\sigma^z & c\sigma^- \\ c\sigma^+ & u - \frac{c}{2}\sigma^z \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где $\sigma^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y)$. Таким образом,

$$R_{12}(u-v)R_{13}(u-\frac{c}{2})R_{23}(v-\frac{c}{2}) = R_{23}(v-\frac{c}{2})R_{13}(u-\frac{c}{2})R_{12}(u-v), \quad (3.3)$$

и мы видим, что мы можем положить

$$T(u) = \begin{pmatrix} u + \frac{c}{2}\sigma^z & c\sigma^- \\ c\sigma^+ & u - \frac{c}{2}\sigma^z \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Можно непосредственным вычислением проверить, что матричные элементы этой матрицы монодромии удовлетворяют коммутационным соотношениям (2.7). Например,

$$[T^{12}(u), T^{21}(v)] = c^2[\sigma^-, \sigma^+] = -c^2\sigma^z. \quad (3.5)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{c}{u-v}(T^{22}(v)T^{11}(u) - T^{22}(u)T^{11}(v)) &= \frac{c}{u-v}((v - \frac{c}{2}\sigma^z)(u + \frac{c}{2}\sigma^z) - (u - \frac{c}{2}\sigma^z)(v + \frac{c}{2}\sigma^z)) \\ &= \frac{c}{u-v}(\frac{c}{2}\sigma^z(v-u) - \frac{c}{2}\sigma^z(u-v)) = -c^2\sigma^z. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Несмотря на то что нам удалось найти нетривиальный пример матрицы $T(u)$, квантовая модель, построенная по этой матрице монодромии, по-прежнему бедна, поскольку

$$\mathcal{T}(u) = (u + \frac{c}{2}\sigma^z) + (u - \frac{c}{2}\sigma^z) = 2u\mathbf{1}. \quad (3.7)$$

Тем не менее этот пример не является бесполезным, потому что из него можно построить содержательную модель. Для этого рассмотрим две матрицы $X(u)$ и $Y(u)$ размера 2×2 , зависящие от комплексного аргумента u . Пусть также матричные элементы $X^{jk}(u)$ являются операторами, действующими в некотором пространстве \mathcal{H}_x , а матричные элементы $Y^{jk}(u)$ суть операторы, действующие в пространстве \mathcal{H}_y . Эти два пространства могут быть конечномерными или даже бесконечномерными. Важным является то, что эти пространства различны и, следовательно, $[X^{jk}(u_1), Y^{\ell m}(u_2)] = 0$ при любых u_1 и u_2 .

Рассмотрим пространства $V_1 \otimes V_2 \otimes \mathcal{H}_x$ и $V_1 \otimes V_2 \otimes \mathcal{H}_y$, где $V_k \sim \mathbb{C}^2$, $k = 1, 2$. Как обычно, мы можем ввести матрицы X_k и Y_k с $k = 1, 2$, действующие нетривиально только в $V_k \otimes \mathcal{H}_x$ и $V_k \otimes \mathcal{H}_y$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Допустим, что обе матрицы X и Y удовлетворяют соотношению (2.2)

$$\begin{aligned} R_{12}(u_1 - u_2)X_1(u_1)X_2(u_2) &= X_2(u_2)X_1(u_1)R_{12}(u_1 - u_2), \\ R_{12}(u_1 - u_2)Y_1(u_1)Y_2(u_2) &= Y_2(u_2)Y_1(u_1)R_{12}(u_1 - u_2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Тогда их произведение XY также удовлетворяет соотношению (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим произведение XY в левую часть соотношения (2.2)

$$R_{12}(u_1 - u_2)X_1(u_1)Y_1(u_1)X_2(u_2)Y_2(u_2) = R_{12}(u_1 - u_2)X_1(u_1)X_2(u_2)Y_1(u_1)Y_2(u_2). \quad (3.9)$$

Мы воспользовались тем, что $Y_1(u_1)$ действует в пространстве $V_1 \otimes \mathcal{H}_y$, а $X_2(u_2)$ действует в пространстве $V_2 \otimes \mathcal{H}_x$, следовательно, эти две матрицы коммутируют. Теперь в силу (3.8) мы можем пронести матрицу $R_{12}(u_1 - u_2)$ направо

$$R_{12}(u_1 - u_2)X_1(u_1)Y_1(u_1)X_2(u_2)Y_2(u_2) = X_2(u_2)X_1(u_1)Y_2(u_2)Y_1(u_1)R_{12}(u_1 - u_2). \quad (3.10)$$

Остается поменять местами $X_1(u_1)$ и $Y_2(u_2)$, и мы приходим к

$$R_{12}(u_1 - u_2)X_1(u_1)Y_1(u_1)X_2(u_2)Y_2(u_2) = X_2(u_2)Y_2(u_2)X_1(u_1)Y_1(u_1)R_{12}(u_1 - u_2), \quad (3.11)$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь пространство \mathcal{H} , которое является тензорным произведением N пространств \mathbb{C}^2 , т. е. $\mathcal{H} = V_1 \otimes \dots \otimes V_N$, где каждое $V_n \sim \mathbb{C}^2$. Построим матрицы

$$L_n(u) = \begin{pmatrix} u + \frac{c}{2}\sigma_n^z & c\sigma_n^- \\ c\sigma_n^+ & u - \frac{c}{2}\sigma_n^z \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

где σ_n^α определены формулой (1.4). Матрицы $L_n(u)$ будем называть L -операторами. Матричный элемент каждого L -оператора в свою очередь является оператором, который действует в пространстве \mathcal{H} , причем нетривиально он действует только в V_n . Ясно, что матричные элементы каждого L -оператора $L_n^{ij}(u)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (2.7). Следовательно, каждая матрица $L_n(u)$ удовлетворяет RTT -соотношению (2.4)

$$R(u - v)(L_n(u) \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes L_n(v)) = (\mathbf{1} \otimes L_n(v))(L_n(u) \otimes \mathbf{1})R(u - v). \quad (3.13)$$

Определим теперь матрицу монодромии следующим образом:

$$T(u) = L_N(u) \dots L_2(u)L_1(u). \quad (3.14)$$

В силу предложения 3.1 построенная матрица $T(u)$ удовлетворяет соотношению (2.4).

Рассмотрим пример, когда матрица $T(u)$ является произведением двух L -операторов: $T(u) = L_2(u)L_1(u)$. Легко видеть, что в этом случае

$$\mathcal{T}(u) = (u + \frac{c}{2}\sigma_2^z)(u + \frac{c}{2}\sigma_1^z) + (u - \frac{c}{2}\sigma_2^z)(u - \frac{c}{2}\sigma_1^z) + c^2\sigma_2^- \sigma_1^+ + c^2\sigma_2^+ \sigma_1^-. \quad (3.15)$$

Полагая здесь $u = 0$, получаем

$$\frac{4}{c^2}\mathcal{T}(0) = 2\sigma_2^z \sigma_1^z + 4\sigma_2^- \sigma_1^+ + 4\sigma_2^+ \sigma_1^-, \quad (3.16)$$

или, воспользовавшись равенствами $\sigma_k^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma_k^y)$,

$$\frac{4}{c^2}\mathcal{T}(0) = 2(\sigma_2^x \sigma_1^x + \sigma_2^y \sigma_1^y + \sigma_2^z \sigma_1^z). \quad (3.17)$$

Мы видим, что мы получили гамильтониан спиновой цепочки XXX , состоящей из двух узлов.

4. Гамильтониан спиновой цепочки XXX

Покажем теперь, как с помощью матрицы монодромии (3.14) получить гамильтониан XXX цепочки в общем случае. Легко проверить, что гамильтониан (1.2) может быть записан в виде

$$H = 2 \sum_{k=1}^N P_{kk+1} - N, \quad (4.1)$$

где мы для краткости опустили единичный оператор при N . Действительно, оператор

$$h_{kk+1} = \sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z \quad (4.2)$$

нетривиально действует в тензорном произведении $V_k \otimes V_{k+1}$, а в остальных пространствах он действует как единичный оператор. Поэтому в пространстве $V_k \otimes V_{k+1}$ мы можем записать его в виде матрицы 4×4

$$h_{kk+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2P_{kk+1} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad (4.3)$$

откуда и следует (4.1).

Докажем, что гамильтониан XXX цепочки (1.2) может быть получен из трансфер-матрицы матрицы монодромии (3.14) по формуле

$$H = 2c \frac{dT(u)}{du} \Big|_{u=\frac{c}{2}} T^{-1}(u) \Big|_{u=\frac{c}{2}} - N. \quad (4.4)$$

Сначала договоримся об обозначениях. Элементы матрицы монодромии (3.14) действуют в пространстве $\mathcal{H} = V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$, где каждое $V_k \sim \mathbb{C}^2$. Но сама матрица монодромии является матрицей 2×2 и действует в некотором пространстве \mathbb{C}^2 . Обозначим это пространство V_0 . Пространство V_0 принято называть вспомогательным линейным пространством. Таким образом, матрица монодромии $T(u)$ является оператором, действующим в тензорном произведении $N+1$ пространств $V_0 \otimes V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$, и в соответствии с принятыми соглашениями мы можем записать $T(u) = T_{01\dots N}(u)$. Каждый L -оператор (3.12) нетривиально действует в пространстве $V_0 \otimes V_n$ и совпадает с R -матрицей: $L_n(u) = R_{0n}(u - \frac{c}{2})$. Тогда в силу (3.14) мы имеем

$$T(u) = L_N(u) \cdots L_1(u) = R_{0N}(u - \frac{c}{2}) \cdots R_{01}(u - \frac{c}{2}), \quad (4.5)$$

откуда

$$T(u) = \text{tr}_0(R_{0N}(u - \frac{c}{2}) \cdots R_{01}(u - \frac{c}{2})), \quad (4.6)$$

где след берется по вспомогательному пространству. Поскольку под знаком следа мы можем делать циклические перестановки, мы видим, что трансфер-матрица (4.6) заведомо обеспечивает периодические граничные условия.

Вычислим производную от $T(u)$ в точке $u = \frac{c}{2}$. При этом учтем, что $R_{0k}(0)$ с точностью до множителя c совпадает с матрицей перестановки P_{0k} . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dT(u)}{du} \Big|_{u=\frac{c}{2}} &= \frac{d}{du} \text{tr}_0(R_{0N}(u - \frac{c}{2}) \cdots R_{01}(u - \frac{c}{2})) \Big|_{u=\frac{c}{2}} \\ &= c^{N-1} \sum_{k=1}^N \text{tr}_0(P_{0N} \cdots R'_{0k}(0) \cdots P_{01}) \\ &= c^{N-1} \sum_{k=1}^N \text{tr}_0(R'_{0k}(0) P_{0k-1} \cdots P_{0k+1}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Мы воспользовались возможностью циклической перестановки матриц под знаком следа. Теперь умножим получившееся произведение справа на единичную матрицу P_{0k+1}^2 и снова используем циклическую перестановку

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{T}(u)}{du} \Big|_{u=\frac{c}{2}} &= c^{N-1} \sum_{k=1}^N \text{tr}_0(R'_{0k}(0)P_{0k-1} \cdots P_{0k+1}P_{0k+1}^2) \\ &= c^{N-1} \sum_{k=1}^N \text{tr}_0(P_{0k+1}[R'_{0k}(0)P_{0k-1} \cdots P_{0k+1}]P_{0k+1}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Согласно общему правилу, в произведении матриц, которые находятся между двумя матрицами перестановки P_{0k+1} , мы должны заменить пространство V_0 на пространство V_{k+1} , т. е.

$$\frac{d\mathcal{T}(u)}{du} \Big|_{u=\frac{c}{2}} = c^{N-1} \sum_{k=1}^N \text{tr}_0(R'_{k+1k}(0)P_{k+1k-1} \cdots P_{k+1k+2}P_{0k+1}). \quad (4.9)$$

Теперь в пространстве V_0 действует всего лишь одна матрица P_{0k+1} , и мы знаем, что ее след по пространству V_0 равен единице. Отсюда получаем окончательно

$$\frac{d\mathcal{T}(u)}{du} \Big|_{u=\frac{c}{2}} = c^{N-1} \sum_{k=1}^N R'_{k+1k}(0)P_{k+1k-1} \cdots P_{k+1k+2} = c^{N-1} \sum_{k=1}^N P_{k+1k-1} \cdots P_{k+1k+2}, \quad (4.10)$$

поскольку $R'_{k+1k}(0) = \mathbf{1}$.

Вычислим теперь трансфер-матрицу в точке $u = \frac{c}{2}$. Имеем

$$\mathcal{T}\left(\frac{c}{2}\right) = c^N \text{tr}_0(P_{0N} \cdots P_{01}). \quad (4.11)$$

Для вычисления следа зафиксируем произвольное k и повторим все выкладки, которые мы проделали при выводе формулы для производной от трансфер-матрицы. Тогда получим

$$\mathcal{T}\left(\frac{c}{2}\right) = c^N P_{k+1k} P_{k+1k-1} \cdots P_{k+1k+2}. \quad (4.12)$$

Отсюда, с учетом $P_{ab}^2 = \mathbf{1}$, находим

$$\mathcal{T}^{-1}\left(\frac{c}{2}\right) = c^{-N} P_{k+1k+2} \cdots P_{k+1k-1} P_{k+1k}. \quad (4.13)$$

Важно подчеркнуть, что в формулах (4.12), (4.13) индекс k является произвольным из набора $\{1, \dots, N\}$. Поэтому, когда мы умножаем матрицу $\mathcal{T}'\left(\frac{c}{2}\right)$ справа на $\mathcal{T}^{-1}\left(\frac{c}{2}\right)$, мы всегда можем подобрать для каждого слагаемого в сумме по k в формуле (4.10) такой же индекс k в формуле (4.13). Следовательно,

$$2c \frac{d\mathcal{T}(u)}{du} \mathcal{T}^{-1}(u) \Big|_{u=\frac{c}{2}} = 2 \sum_{k=1}^N P_{k+1k}, \quad (4.14)$$

и мы действительно воспроизводим (4.1) с точностью до слагаемого, пропорционального единичной матрице.

Отметим, что в рассмотренном примере мы фактически разложили в ряд не саму трансфер-матрицу $\mathcal{T}(u)$, а ее логарифм. Исключительно важным является также то, что разложение велось в той точке, в которой L -оператор превращается в матрицу перестановки. Именно эти два обстоятельства в конечном итоге обеспечили локальность полученного гамильтониана, который оказался суммой операторов, описывающих взаимодействие только ближайших соседей.

Лекция 3. Алгебраический анзац Бете

В этой лекции мы переходим к непосредственному знакомству с методом алгебраического анзаца Бете. Мы покажем, как в рамках этого метода строятся собственные векторы трансфер-матрицы, и получим систему уравнений Бете, которая описывает эти векторы. Одним из основных достоинств алгебраического анзаца Бете является его универсальность: он опирается только на RTT -соотношение и без каких-либо изменений применим к целому классу моделей, которые могут иметь различную физическую интерпретацию. С точки зрения этого подхода можно сказать, что различные физические модели являются разными представлениями одной и той же алгебры. Мы также вернемся к уравнению Янга–Бакстера и поговорим о его роли в алгебраическом анзаце Бете.

1. Различные L -операторы

В этом разделе мы приведем примеры еще двух матриц монодромии, удовлетворяющих RTT -соотношению с R -матрицей (2.2.3).

1.1. Неоднородная XXX цепочка. Воспользуемся тем, что R -матрица (2.2.3) зависит от разности $u - v$. Отсюда следует, что L -оператор $L_n(u - \xi_n)$ также удовлетворяет RTT -соотношению

$$R(u, v)(L_n(u - \xi_n) \otimes I)(I \otimes L_n(v - \xi_n)) = (I \otimes L_n(v - \xi_n))(L_n(u - \xi_n) \otimes I)R(u, v) \quad (1.1)$$

при любом ξ_n . Тогда матрица

$$T(u) = L_N(u - \xi_N) \dots L_1(u - \xi_1) \quad (1.2)$$

должна удовлетворять RTT -соотношению. Важно подчеркнуть, что здесь в разных узлах цепочки переменная u сдвинута на разные ξ_n . Параметры ξ_n называются параметрами неоднородности, а модель, построенная по матрице монодромии (1.2), называется неоднородной XXX цепочкой. Следуя стандартной процедуре, можно построить набор коммутирующих операторов, разлагая в ряд трансфер-матрицу этой модели. Однако придать физический смысл этим операторам трудно, поскольку в каждом из них любой спиновый оператор взаимодействует со всеми остальными операторами цепочки, а не только с соседними (нелокальность). Действительно, как мы уже отмечали, для достижения локальности разложение трансфер-матрицы производилось в точке $u = c/2$, в которой все L -операторы превращались в матрицу перестановки. В случае неоднородной цепочки, полагая $u = \xi_n + c/2$, мы можем добиться того, что *только один* L -оператор L_n станет матрицей перестановки, что в конечном итоге и приводит к потере локальности.

Тем не менее эта модель иногда оказывается очень полезной в промежуточных вычислениях при работе с обычной (однородной) XXX цепочкой, которую можно рассматривать как частный случай неоднородной цепочки при всех $\xi_n = 0$.

1.2. Квантовое нелинейное уравнение Шрёдингера. Приведем еще один пример L -оператора, который удовлетворяет RTT -соотношению, но порождает совсем другую физическую модель. Рассмотрим набор операторов ψ_n и ψ_n^\dagger ($n = 1, \dots, N$), удовлетворяющих коммутационным соотношениям

$$[\psi_n, \psi_m^\dagger] = \frac{\delta_{nm}}{\Delta}, \quad (1.3)$$

где Δ — некоторое число. Вообще говоря, это число может быть комплексным, однако в физических приложениях оно является вещественным и положительным. Операторы ψ_n и ψ_n^\dagger можно рассматривать как дискретизацию бозонных полей¹. Действительно, рассмотрим бозонные поля $\Psi(x)$ и $\Psi^\dagger(x)$, зависящие от одномерной переменной x и удовлетворяющие каноническим перестановочным соотношениям

$$[\Psi(x), \Psi^\dagger(y)] = \delta(x - y). \quad (1.4)$$

Рассмотрим также некоторый интервал $[0, L]$ и выберем на нем N точек x_1, \dots, x_N , так что $x_n = \Delta n$ и $x_N = L$. Тогда мы можем положить

$$\psi_n = \frac{1}{\Delta} \int_{x_{n-1}+0}^{x_n-0} \Psi(x) dx, \quad \psi_n^\dagger = \frac{1}{\Delta} \int_{x_{n-1}+0}^{x_n-0} \Psi^\dagger(x) dx. \quad (1.5)$$

Легко проверить, что построенные таким образом операторы ψ_n и ψ_n^\dagger действительно удовлетворяют соотношениям (1.3).

Как обычно, мы считаем, что рассмотренные выше операторы действуют в фоковском пространстве с вакуумом $|0\rangle$, причем

$$\Psi(x)|0\rangle = 0, \quad \psi_n|0\rangle = 0. \quad (1.6)$$

Рассмотрим L -оператор вида

$$L_n(u) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{iu\Delta}{2} + \frac{\varkappa\Delta^2}{2}\psi_n^\dagger\psi_n & -i\Delta\psi_n^\dagger\rho_n^+ \\ i\Delta\rho_n^-\psi_n & 1 + \frac{iu\Delta}{2} + \frac{\varkappa\Delta^2}{2}\psi_n^\dagger\psi_n \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

где \varkappa — некоторый параметр. В формуле (1.7) также появились операторы ρ_n^\pm , на которые наложены два условия. Во-первых, они зависят только от комбинации $\psi_n^\dagger\psi_n$, т. е. $\rho_n^\pm = \rho_n^\pm(\psi_n^\dagger\psi_n)$. Во-вторых,

$$\rho_n^+\rho_n^- = \varkappa + \frac{\varkappa^2\Delta^2}{4}\psi_n^\dagger\psi_n. \quad (1.8)$$

Других ограничений на операторы ρ_n^\pm нет. Можно, например, положить один из них равным единице, тогда второй равен правой части равенства (1.8). Можно положить их равными корню квадратному из правой части (1.8) и т. д. Независимо от конкретного выбора ρ_n^\pm , L -оператор (1.7) удовлетворяет RTT -соотношению, если параметр \varkappa определенным образом зависит от константы c , входящей в R -матрицу. Убедитесь в этом самостоятельно.

По L -оператору (1.7) можно построить матрицу монодромии (2.3.14), по ней — трансфер-матрицу, а из последней — набор коммутирующих операторов. Получившаяся модель оказывается решеточной версией квантового нелинейного уравнения Шрёдингера. В непрерывном пределе $\Delta \rightarrow 0$ мы получим гамильтониан

$$H = \int_0^L \left(\partial_x \Psi^\dagger(x) \partial_x \Psi(x) + \varkappa \Psi^\dagger(x) \Psi^\dagger(x) \Psi(x) \Psi(x) \right) dx, \quad (1.9)$$

где параметр \varkappa играет роль константы связи. Процедура получения гамильтониана (1.9) из трансфер-матрицы гораздо более сложная, чем вывод гамильтониана XXX цепочки. Подробнее с ней можно ознакомиться в главе VII книги [3].

¹Опять же, по традиции используется обозначение ψ , хотя обычно этим символом обозначают фермионы.

2. Гильбертово пространство

Мы познакомились с примерами конкретных матриц монодромии и порождающими их L -операторами. Напомним, что элементы матрицы монодромии действуют в некотором гильбертовом пространстве \mathcal{H} , которое мы пока еще не обсуждали. В методе алгебраического анзаца Бете об этом пространстве предполагается очень немногое. А именно, необходимо, чтобы в нем существовал вакуумный вектор² $|0\rangle$ такой, что

$$A(u)|0\rangle = a(u)|0\rangle, \quad D(u)|0\rangle = d(u)|0\rangle, \quad C(u)|0\rangle = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $a(u)$ и $d(u)$ суть некоторые функции u , конкретный вид которых зависит от конкретной модели. Иными словами, вектор $|0\rangle$ является собственным для операторов $A(u)$ и $D(u)$, и он уничтожается оператором $C(u)$. Действие оператора $B(u)$ на вакуум является свободным, и предполагается, что, действуя этим оператором на $|0\rangle$, мы тем самым порождаем все пространство \mathcal{H} (с учетом замыкания, если пространство бесконечномерное).

В рассмотренных выше примерах вакуумный вектор существует. В случае решеточной версии квантового нелинейного уравнения Шрёдингера он совпадает с фоковским вакуумом (1.6). В случае ХХХ цепочки — это состояние со всеми спинами вверх (ферромагнитное состояние):

$$|0\rangle = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_1 \otimes \cdots \otimes \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_N. \quad (2.2)$$

Проверим это. Для этого докажем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть матрица монодромии $T(u)$ задана равенством (2.3.14), а каждый L -оператор имеет вид

$$L_n(u) = \begin{pmatrix} \alpha_n(u) & \beta_n(u) \\ \gamma_n(u) & \delta_n(u) \end{pmatrix}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

Допустим, что существует вектор $|0\rangle$ такой, что

$$\alpha_n(u)|0\rangle = \hat{\alpha}_n(u)|0\rangle, \quad \delta_n(u)|0\rangle = \hat{\delta}_n(u)|0\rangle, \quad \gamma_n(u)|0\rangle = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.4)$$

где $\hat{\alpha}_n(u)$ и $\hat{\delta}_n(u)$ суть некоторые функции переменной u . Тогда действие элементов матрицы монодромии на $|0\rangle$ дается формулами (2.1), причем

$$a(u) = \prod_{n=1}^N \hat{\alpha}_n(u), \quad d(u) = \prod_{n=1}^N \hat{\delta}_n(u). \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем каждый L -оператор на сумму двух слагаемых $L_n = L_n^{(+)} + L_n^{(-)}$, где

$$L_n^{(+)}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_n(u) & \beta_n(u) \\ 0 & \delta_n(u) \end{pmatrix}, \quad L_n^{(-)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_n(u) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Тогда матрица монодромии записывается в виде

$$\begin{aligned} T &= (L_N^{(+)} + L_N^{(-)}) \cdots (L_1^{(+)} + L_1^{(-)}) \\ &= L_N^{(+)} \cdots L_1^{(+)} + Y \\ &= T^{(+)} + Y. \end{aligned} \quad (2.7)$$

²Другие названия — псевдовакуум, циклический вектор.

В этой формуле мы явно выделили произведение всех $L_n^{(+)}$ и обозначили его $T^{(+)}$. Сумму всех остальных слагаемых мы обозначили через Y . Легко доказать, что действие любого элемента матрицы Y на $|0\rangle$ дает нуль. Действительно, всякий матричный элемент Y^{jk} является линейной комбинацией операторов вида $y_N \cdots y_1$, где каждый y_ℓ обозначает один из операторов $\alpha_\ell, \beta_\ell, \gamma_\ell$ или δ_ℓ . Ясно, что среди этих y_ℓ найдется по крайней мере один оператор $\gamma_n(u)$ (где $n = 1, \dots, N$). Этот оператор коммутирует со всеми остальными y_ℓ при $\ell \neq n$, и, следовательно, он может быть передвинут в крайнюю правую позицию $y_N \cdots y_1 \gamma_n$. Но поскольку $\gamma_n(u)|0\rangle = 0$, то и $Y^{jk}|0\rangle = 0$.

Отсюда следует, что если

$$T^{(+)}(u) = \begin{pmatrix} A^{(+)}(u) & B^{(+)}(u) \\ C^{(+)}(u) & D^{(+)}(u) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

то

$$\begin{aligned} A(u)|0\rangle &= A^{(+)}(u)|0\rangle, & B(u)|0\rangle &= B^{(+)}(u)|0\rangle, \\ C(u)|0\rangle &= C^{(+)}(u)|0\rangle, & D(u)|0\rangle &= D^{(+)}(u)|0\rangle. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В свою очередь, матричные элементы матрицы $T^{(+)}(u)$ легко вычисляются

$$\begin{aligned} A^{(+)}(u) &= \prod_{n=1}^N \alpha_n(u), \\ D^{(+)}(u) &= \prod_{n=1}^N \delta_n(u), \\ C^{(+)}(u) &= 0, \\ B^{(+)}(u) &= \sum_{k=1}^N \left(\prod_{n=k+1}^N \alpha_n(u) \right) \beta_k(u) \left(\prod_{n=1}^{k-1} \delta_n(u) \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Эти формулы элементарно доказываются с помощью индукции по N . Отсюда мы и выводим формулы (2.1) и (2.5).

Легко видеть, что в случае неоднородной XXX цепочки функции $\hat{\alpha}_n(u)$ и $\hat{\delta}_n(u)$ имеют вид

$$\hat{\alpha}_n(u) = u - \xi_n + \frac{c}{2}, \quad \hat{\delta}_n(u) = u - \xi_n - \frac{c}{2}. \quad (2.11)$$

Поэтому

$$a(u) = \prod_{n=1}^N \left(u - \xi_n + \frac{c}{2} \right), \quad d(u) = \prod_{n=1}^N \left(u - \xi_n - \frac{c}{2} \right), \quad (2.12)$$

а действие оператора $B(u)$ на $|0\rangle$ дается формулой

$$B(u)|0\rangle = c \sum_{k=1}^N \prod_{n=k+1}^N \left(u - \xi_n + \frac{c}{2} \right) \prod_{n=1}^{k-1} \left(u - \xi_n - \frac{c}{2} \right) \cdot \sigma_k^- |0\rangle. \quad (2.13)$$

В случае однородной цепочки следует просто положить в этих формулах все $\xi_n = 0$.

В решеточной модели нелинейного уравнения Шрёдингера мы имеем

$$\hat{\alpha}_n(u) = 1 - \frac{iu\Delta}{2}, \quad \hat{\delta}_n(u) = 1 + \frac{iu\Delta}{2}. \quad (2.14)$$

Следовательно,

$$a(u) = \left(1 - \frac{iu\Delta}{2} \right)^N, \quad d(u) = \left(1 + \frac{iu\Delta}{2} \right)^N, \quad (2.15)$$

а действие оператора $B(u)$ на $|0\rangle$ имеет вид (при выборе $\rho_n^+ = \rho_n^-$)

$$B(u)|0\rangle = -i\Delta\sqrt{\varkappa} \sum_{k=1}^N \left(1 - \frac{i u \Delta}{2}\right)^{N-k} \left(1 + \frac{i u \Delta}{2}\right)^{k-1} \cdot \psi_k^\dagger |0\rangle. \quad (2.16)$$

Нетрудно проверить, что в непрерывном пределе $\Delta \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, $N\Delta = L = \text{const}$ мы получим

$$a(u) = e^{-iuL/2}, \quad d(u) = e^{iuL/2}, \quad (2.17)$$

и

$$B(u)|0\rangle = -i\sqrt{\varkappa} e^{-iuL/2} \int_0^L e^{iux} \Psi^\dagger(x) dx |0\rangle. \quad (2.18)$$

3. Действие элементов матрицы монодромии на векторы

В предыдущем разделе мы видели, что пространство \mathcal{H} , в котором действуют элементы матрицы монодромии, может быть как конечномерным (XX цепочка), так и бесконечномерным (квантовое нелинейное уравнение Шрёдингера). В рамках алгебраического анзаца Бете это пространство не конкретизируется. Также не конкретизируются функции $a(u)$ и $d(u)$. Тем не менее имеющихся данных уже достаточно для того, чтобы сформулировать некоторые условия на собственные векторы трансфер-матрицы $\mathcal{T}(u) = A(u) + D(u)$. Напомним, что трансфер-матрица $\mathcal{T}(u)$ является производящей функцией интегралов движения модели. По построению собственные функции (векторы) оператора $\mathcal{T}(u)$ одновременно являются собственными для всех интегралов движения, в том числе и для гамильтониана. Поэтому вместо того, чтобы искать собственные функции гамильтониана некоторой конкретной модели, мы будем искать собственные функции трансфер-матрицы.

Прежде всего договоримся об обозначениях. Наборы (множества) переменных будем обозначать чертой:

$$\bar{u} = \{u_1, \dots, u_n\}, \quad \bar{v} = \{v_1, \dots, v_m\} \quad \text{и т. п.} \quad (3.1)$$

Если необходимо указать количество переменных в наборе, то будем это делать в специальных комментариях.

Введем две новые функции

$$f(u, v) = \frac{u - v + c}{u - v} \quad \text{и} \quad g(u, v) = \frac{c}{u - v} \quad (3.2)$$

и запишем R -матрицу в виде

$$R(u, v) = \mathbf{I} + \frac{c}{u - v} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} f(u, v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g(u, v) & 0 \\ 0 & g(u, v) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(u, v) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Обратите внимание, что R -матрица (3.3) отличается от (2.2.3) множителем $(u - v)$. Как уже объяснялось, умножение R -матрицы на произвольную скалярную функцию всегда возможно. Это не нарушает ни уравнения Янга–Бакстера, ни RTT -соотношения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Следуя традиции, мы не подчеркиваем тот факт, что функции $f(u, v)$, $g(u, v)$ и сама R -матрица (3.3) фактически зависят от разности аргументов $u - v$. В некоторых случаях, с которыми мы встретимся в дальнейшем, это оказывается полезным.

Мы также будем применять сокращенные обозначения для произведений операторов $T^{ij}(u)$, функций $a(u)$ и $d(u)$, а также функций $f(u, v)$ и $g(u, v)$ (3.2). А именно, если такой оператор или функция зависит от набора переменных, то это означает, что нужно взять произведение этих операторов или функций по соответствующему набору. Например:

$$B(\bar{u}) = \prod_{u_j \in \bar{u}} B(u_j), \quad C(\bar{u}) = \prod_{u_j \in \bar{u}} C(u_j), \quad a(\bar{v}) = \prod_{v_i \in \bar{v}} a(v_i) \quad \text{и т. п.} \quad (3.4)$$

Аналогично для функций $g(u, v)$ и $f(u, v)$ имеем

$$g(u, \bar{v}) = \prod_{v_i \in \bar{v}} g(u, v_i), \quad f(\bar{u}, \bar{v}) = \prod_{u_j \in \bar{u}} \prod_{v_i \in \bar{v}} f(u_j, v_i). \quad (3.5)$$

Во втором случае мы имеем дело с двойным произведением.

Часто мы будем встречаться с наборами, в которых отсутствует один из элементов, например $\{u_1, \dots, u_n\} \setminus u_k$. Подобные наборы будем обозначать $\bar{u}_k = \{u_1, \dots, u_n\} \setminus u_k$. Соответственно, имеем

$$B(\bar{u}_k) = \prod_{\substack{u_j \in \bar{u} \\ j \neq k}} B(u_j), \quad f(u_k, \bar{u}_k) = \prod_{\substack{u_i \in \bar{u} \\ i \neq k}} f(u_k, u_i) \quad \text{и т. п.} \quad (3.6)$$

И наконец, условимся, что произведение по пустому набору равно единице. В случае двойного произведения будем также считать его равным единице, если хотя бы один из наборов пуст.

3.1. Коммутационные соотношения. Все коммутационные соотношения между операторами $T^{jk}(u)$ следуют из RTT -соотношения и даются формулой (2.2.7). Приведем их теперь более подробно:

$$[T^{jk}(u), T^{jk}(v)] = 0, \quad j, k = 1, 2, \quad (3.7)$$

$$[A(u), D(v)] = g(u, v)(C(v)B(u) - C(u)B(v)), \quad (3.8)$$

$$[D(u), A(v)] = g(u, v)(B(v)C(u) - B(u)C(v)), \quad (3.9)$$

$$[C(u), B(v)] = g(u, v)(A(v)D(u) - A(u)D(v)), \quad (3.10)$$

$$[B(u), C(v)] = g(u, v)(D(v)A(u) - D(u)A(v)), \quad (3.11)$$

$$A(v)B(u) = f(u, v)B(u)A(v) + g(v, u)B(v)A(u), \quad (3.12)$$

$$B(v)A(u) = f(u, v)A(u)B(v) + g(v, u)A(v)B(u), \quad (3.13)$$

$$D(v)C(u) = f(u, v)C(u)D(v) + g(v, u)C(v)D(u), \quad (3.14)$$

$$C(v)D(u) = f(u, v)D(u)C(v) + g(v, u)D(v)C(u), \quad (3.15)$$

$$A(u)C(v) = f(u, v)C(v)A(u) + g(v, u)C(u)A(v), \quad (3.16)$$

$$C(u)A(v) = f(u, v)A(v)C(u) + g(v, u)A(u)C(v), \quad (3.17)$$

$$B(u)D(v) = f(u, v)D(v)B(u) + g(v, u)D(u)B(v), \quad (3.18)$$

$$D(u)B(v) = f(u, v)B(v)D(u) + g(v, u)B(u)D(v). \quad (3.19)$$

Часть из этих соотношений повторяет друг друга, например (3.9) следует из (3.8) и (3.10). Можно также проверить согласованность некоторых соотношений, например, применив (3.13) к правой части (3.12), мы воспроизводим левую часть (3.12).

3.2. Алгебраический анзац Бете. Алгебраический анзац Бете состоит в том, что собственные векторы трансфер-матрицы ищутся в виде $B(\bar{u})|0\rangle$. При этом набор $\bar{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$, вообще говоря, может содержать произвольное количество элементов, а параметры u_k могут принимать произвольные комплексные значения.

Напомним, что пространство \mathcal{H} состоит из векторов вида $B(\bar{u})|0\rangle$ и их линейных комбинаций. Анзац состоит в том, что мы исключаем из рассмотрения линейные комбинации. Иными словами, мы предполагаем, что собственный вектор трансфер-матрицы представим в виде монома из операторов B , примененного к вакууму. Мы будем называть векторы такого вида векторами Бете. Нам требуется, во-первых, проверить, действительно ли векторы Бете могут являться собственными векторами оператора $T(u)$. Во-вторых, при каких условиях это возможно. В-третьих, образуют ли полученные векторы базис в гильбертовом пространстве \mathcal{H} .

Строго говоря, последний вопрос выходит за рамки алгебраического анзаца Бете. Для ответа на него нам нужно знать гораздо больше о пространстве \mathcal{H} . Мы же не знаем даже конечномерное оно или нет. Интересно, однако, отметить, что даже если пространство \mathcal{H} является конечномерным, вопрос о полноте построенной системы собственных векторов может оказаться отнюдь не тривиальным. Примером тому является XXX цепочка. В общем случае цепочки произвольной длины исчерпывающее доказательство полноты на сегодняшний день отсутствует. В то же время, в модели квантового нелинейного уравнения Шрёдингера, в которой гильбертово пространство бесконечномерно, полнота системы векторов Бете доказана по крайней мере при положительной константе связи [2].

3.3. Действие операторов A и D на векторы Бете. Вычислим действие оператора $A(v)$ на вектор $B(\bar{u})|0\rangle$

$$A(v)B(\bar{u})|0\rangle, \quad (3.20)$$

предполагая, что параметры v, u_1, \dots, u_n являются комплексными числами в общем положении (т. е. среди них нет совпадающих, они не отвечают особым точкам функции $a(u)$ и т. д.). Формально, у нас есть для этого все необходимое. С помощью перестановочных соотношений (3.12) мы можем двигать оператор A направо до тех пор, пока он не окажется в крайней правой позиции. После этого останется подействовать на вакуумный вектор с помощью (2.1). Таким образом, действие $A(v)$ на вектор Бете сводится к n -кратному применению формулы (3.12). Ясно, однако, что на каждом шаге мы будем получать два слагаемых, так что в конечном итоге у нас будет всего 2^n слагаемых, и при большом n такой результат сложно не только получить, но и просто записать. Для решения этой проблемы сформулируем основные правила алгебраического анзаца Бете, которых следует придерживаться при перестановках большого количества операторов.

- Следует представить себе общую структуру конечного результата. А именно, надо понять, как ответ зависит от операторов $T^{jk}(u)$ (или их собственных значений $a(u)$ и $d(u)$). На этой стадии мы не обращаем внимания на функции $f(u, v)$ и $g(u, v)$, которые возникают при перестановках операторов.
- Нужно зафиксировать конкретное слагаемое в конечном результате и постараться получить именно его, пренебрегая всеми остальными вкладами. Для того чтобы это сделать, часто оказывается полезным переупорядочить операторы в исходном произведении.

Посмотрим, как эти правила работают на практике. Применяя первое правило к формуле (3.20), мы видим, что количество линейно независимых слагаемых в конечном ответе в любом случае не превосходит $n + 1$:

$$A(v)B(\bar{u})|0\rangle = a(v)\Lambda(v|\bar{u})B(\bar{u})|0\rangle + \sum_{k=1}^n a(u_k)\Lambda_k(v|\bar{u})B(v)B(\bar{u}_k)|0\rangle. \quad (3.21)$$

Здесь $\Lambda(v|\bar{u})$ и $\Lambda_k(v|\bar{u})$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

В самом деле, из (3.12) следует, что при перестановке операторов A и B они либо сохраняют исходные аргументы, либо обмениваются ими. Однако “закон сохранения аргументов” в любом случае соблюдается: если в левой части операторы имеют аргументы u и v , то и в правой части они имеют те же самые аргументы. Новые аргументы не возникают, а исходные аргументы не исчезают. В нашем случае в левой части формулы (3.21) аргументами операторов являются параметры v, u_1, \dots, u_n . Поэтому точно такие же параметры должны возникнуть и в правой части. Легко понять, что формула (3.21) является наиболее общей формулой такого вида. В ней есть слагаемое, в котором после перемещения $A(v)$ направо все операторы сохранили свои исходные аргументы. При этом оператор $A(v)$, действуя на вакуум, дал функцию $a(v)$. Кроме того, в (3.21) есть слагаемые, где, двигаясь направо, оператор $A(v)$ один или несколько раз обменялся своим аргументом с операторами $B(u_i)$. Переместившись в крайнюю правую позицию, оператор A имел аргумент u_k и, действуя на вакуум, в итоге дал функцию $a(u_k)$. При этом в конечном произведении операторов $B(u_i)$ один из них исчез, и вместо него возник $B(v)$. При перестановках операторов возникали функции $f(u, v)$ и $g(u, v)$, но мы пока не обращали на них внимания, просто обозначив коэффициенты в конечном ответе через $\Lambda(v|\bar{u})$ и $\Lambda_k(v|\bar{u})$. В дальнейшем нам предстоит их найти.

На этом заканчивается первый этап. Мы определили общую структуру конечного ответа. Заметим, что в нем оказалось всего $n + 1$ слагаемое вместо первоначальных 2^n слагаемых.

ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле, в конкретных моделях слагаемых может оказаться еще меньше. Дело в том, что мы считали линейно независимыми векторы Бете, в которых наборы аргументов не совпадают. Ясно, что это, вообще говоря, не так. Например, в модели ХХХ число линейно независимых векторов не может превышать размерность гильбертова пространства, т. е. 2^N , где N — число узлов цепочки. С другой стороны, мы можем взять вектор $B(\bar{u})|0\rangle$, зафиксировать параметры u_2, \dots, u_n , а переменную u_1 двигать по всей комплексной плоскости. Если при каждом новом значении u_1 мы получаем вектор, линейно независимый от всех предыдущих, то количество таких векторов, очевидно, бесконечно. Тем не менее данное наблюдение не отменяет справедливости формулы (3.21). Она остается в силе, однако если среди векторов в правой части имеются линейно зависимые, то количество слагаемых в этой формуле может быть уменьшено.

Перейдем теперь ко второму этапу. Будем называть первое слагаемое в правой части равенства (3.12) первой схемой коммутации (когда операторы сохраняют свои аргументы). Слагаемое, в котором операторы обмениваются аргументами, будем называть второй схемой коммутации.

Вычислим коэффициент $\Lambda(v|\bar{u})$, т. е. коэффициент при векторе $a(v)B(\bar{u})|0\rangle$. Очевидно, что данный вклад в ответ (3.21) может возникнуть тогда и только тогда, когда, переставляя операторы $A(v)$ и $B(u_j)$, мы всегда пользуемся первой схемой коммутации. Действительно, допустим, что хотя бы раз оператор $A(v)$ обменялся аргументом с каким-то оператором $B(u_j)$. Тогда мы получим вектор

$$B(u_1) \dots B(u_{j-1})B(v)A(u_j)B(u_{j+1}) \dots B(u_n)|0\rangle. \quad (3.22)$$

Ясно, что при дальнейшем движении направо оператор $A(u_j)$ не сможет приобрести аргумент v , который остался слева. Поэтому в конечном ответе не может возникнуть функция $a(v)$. Кроме того, в ответе будет присутствовать оператор $B(v)$, а его в интересующем нас слагаемом нет.

Итак, для получения слагаемого $a(v)B(\bar{u})|0\rangle$ мы можем пользоваться только первой схемой коммутации. Тогда при каждой перестановке операторов $A(v)$ и $B(u_j)$ будет возникать коэффициент $f(u_j, v)$. После всех перестановок возникнет произведение $f(u_j, v)$ по всем u_j , а оператор $A(v)$, дойдя до крайней правой позиции и действуя на вакуум, даст функцию $a(v)$. В результате получим

$$\Lambda(v|\bar{u}) = f(\bar{u}, v). \quad (3.23)$$

Найдем теперь коэффициенты $\Lambda_k(v|\bar{u})$, т. е. коэффициенты, которые возникают при векторах $a(u_k)B(v)B(\bar{u}_k)|0\rangle$, $k = 1, \dots, n$. Для этого зафиксируем некоторое k . Воспользовавшись тем, что все операторы B коммутируют друг с другом, перепорядочим произведение $B(\bar{u})$ так, чтобы оператор $B(u_k)$ стоял в крайней левой позиции:

$$A(v)B(\bar{u})|0\rangle = A(v)B(u_k)B(\bar{u}_k)|0\rangle. \quad (3.24)$$

Теперь, для того чтобы получить вклад, пропорциональный $a(u_k)$, необходимо при перестановке операторов $A(v)$ и $B(u_k)$ воспользоваться второй схемой коммутации. Действительно, в противном случае мы получим вектор

$$B(u_k)A(v)B(\bar{u}_k)|0\rangle, \quad (3.25)$$

и мы видим, что при дальнейшем движении направо оператор $A(v)$ не сможет приобрести аргумент u_k , который остался слева. Кроме того, в ответ войдет оператор $B(u_k)$, а его в интересующем нас слагаемом нет. Таким образом, мы получаем

$$A(v)B(u_k)B(\bar{u}_k)|0\rangle = g(v, u_k)B(v)A(u_k)B(\bar{u}_k)|0\rangle + \mathcal{Z}, \quad (3.26)$$

где через \mathcal{Z} обозначены слагаемые, которые заведомо не дают вклада в искомый коэффициент. Теперь при дальнейшем движении направо оператор $A(u_k)$ должен сохранять свой аргумент, т. е. мы должны пользоваться только первой схемой. Действительно, если хотя бы раз произойдет обмен, то аргумент u_k останется слева, и мы не сможем получить в ответе функцию $a(u_k)$. При каждой перестановке с операторами $B(u_j)$ у нас будет возникать множитель $f(u_j, u_k)$, и в результате получим

$$\Lambda_k(v|\bar{u}) = g(v, u_k)f(\bar{u}_k, u_k). \quad (3.27)$$

Итак, мы нашли действие оператора $A(v)$ на вектор Бете $B(\bar{u})|0\rangle$. Оно описывается формулой (3.21), в которой коэффициенты $\Lambda(v|\bar{u})$ и $\Lambda_k(v|\bar{u})$ соответственно даны равенствами (3.23) и (3.27).

Вычисление действия оператора $D(v)$ на вектор Бете $B(\bar{u})|0\rangle$ происходит совершенно аналогично. Можно, однако, поступить еще проще. Обратим внимание, что коммутационные соотношения операторов D и B (3.19) получаются из соотношений между A и B (3.12) при формальной замене константы c на $-c$. Действительно, легко видеть, что

$$f(u, v)\Big|_{c \rightarrow -c} = f(v, u), \quad g(u, v)\Big|_{c \rightarrow -c} = g(v, u). \quad (3.28)$$

Поэтому действие оператора $D(v)$ на вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ дается формулой (3.21), в которой следует заменить c на $-c$ и функцию a на функцию d :

$$D(v)B(\bar{u})|0\rangle = d(v)\tilde{\Lambda}(v|\bar{u})B(\bar{u})|0\rangle + \sum_{k=1}^n d(u_k)\tilde{\Lambda}_k(v|\bar{u})B(v)B(\bar{u}_k)|0\rangle, \quad (3.29)$$

где

$$\tilde{\Lambda}(v|\bar{u}) = f(v, \bar{u}), \quad \tilde{\Lambda}_k(v|\bar{u}) = g(u_k, v)f(u_k, \bar{u}_k). \quad (3.30)$$

Действие оператора $C(v)$ на вектор Бете $B(\bar{u})|0\rangle$ будет вычислено в лекции 9. Однако мы рекомендуем читателю попробовать сделать это самостоятельно, поскольку все необходимое для такого вычисления уже есть.

3.4. Собственные векторы и уравнения Бете. Теперь мы знаем действие трансфер-матрицы на вектор $B(\bar{u})|0\rangle$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(v)B(\bar{u})|0\rangle &= \left(a(v)\Lambda(v|\bar{u}) + d(v)\tilde{\Lambda}(v|\bar{u}) \right) B(\bar{u})|0\rangle \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left(a(u_k)\Lambda_k(v|\bar{u}) + d(u_k)\tilde{\Lambda}_k(v|\bar{u}) \right) B(v)B(\bar{u}_k)|0\rangle. \end{aligned} \quad (3.31)$$

В первой строке этого равенства в правой части мы имеем тот же самый вектор $B(\bar{u})|0\rangle$, что и в левой части. Во второй строке мы имеем сумму векторов, в которых один из операторов B зависит от переменной v . Таких векторов в левой части нет. Однако если мы наложим условия

$$a(u_k)\Lambda_k(v|\bar{u}) + d(u_k)\tilde{\Lambda}_k(v|\bar{u}) = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.32)$$

то сумма во второй строке формулы (3.31) исчезает. Тогда вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ становится собственным вектором оператора $\mathcal{T}(v)$ с собственным значением

$$\tau(v|\bar{u}) = a(v)\Lambda(v|\bar{u}) + d(v)\tilde{\Lambda}(v|\bar{u}) = a(v)f(\bar{u}, v) + d(v)f(v, \bar{u}). \quad (3.33)$$

В свою очередь, условие (3.32) обычно принято записывать следующим образом:

$$\frac{a(u_k)}{d(u_k)} = \frac{f(u_k, \bar{u}_k)}{f(\bar{u}_k, u_k)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.34)$$

Система (3.34) носит название системы уравнений Бете, а вектор $B(\bar{u})|0\rangle$, в котором параметры \bar{u} удовлетворяют системе (3.34), часто называют on-shell вектором Бете. Таким образом, on-shell вектор Бете — синоним собственного вектора трансфер-матрицы.

Важно подчеркнуть, что полученные on-shell векторы Бете являются собственными для оператора $\mathcal{T}(v)$ при любом значении v :

$$\mathcal{T}(v)B(\bar{u})|0\rangle = \tau(v|\bar{u})B(\bar{u})|0\rangle \quad \forall v \in \mathbb{C}. \quad (3.35)$$

Поэтому если интегралы движения I_k рассматриваемой модели возникают при разложении

$$\mathcal{T}(v) = \sum_k (v - v_0)^k I_k, \quad (3.36)$$

то их собственные значения $\hat{I}_k(\bar{u})$ возникают при аналогичном разложении собственного значения трансфер-матрицы

$$\tau(v|\bar{u}) = \sum_k (v - v_0)^k \hat{I}_k(\bar{u}). \quad (3.37)$$

Дифференцируя k раз соотношение (3.35) по v в точке $v = v_0$, мы получаем

$$I_k B(\bar{u})|0\rangle = \hat{I}_k(\bar{u}) B(\bar{u})|0\rangle. \quad (3.38)$$

Таким образом, если мы решаем систему уравнений Бете, мы тем самым находим собственные значения всех интегралов движения рассматриваемой модели и соответствующие собственные векторы.

Отметим, что процедура вывода уравнений Бете является универсальной в том смысле, что она не зависит от выбора конкретной модели. Мы пользовались только перестановочными соотношениями между элементами матрицы монодромии (по сути — RTT -соотношением) и формулами действия операторов на вакуум. При рассмотрении конкретной модели нам остается

только подставить конкретные значения функций $a(u)$ и $d(u)$ в систему (3.34). Так, для ХХХ цепочки система уравнений Бете имеет вид

$$\left(\frac{u_k + \frac{c}{2}}{u_k - \frac{c}{2}}\right)^N = \frac{f(u_k, \bar{u}_k)}{f(\bar{u}_k, u_k)}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.39)$$

а для модели квантового нелинейного уравнения Шрёдингера (в непрерывном пределе)

$$e^{-iu_k L} = \frac{f(u_k, \bar{u}_k)}{f(\bar{u}_k, u_k)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.40)$$

По решениям этих систем в каждой из рассматриваемых моделей можно построить on-shell векторы $B(\bar{u})|0\rangle$. Вопрос о том, образуют ли построенные векторы базис, разумеется, остается пока открытым.

3.5. Пример. Рассмотрим однородную ХХХ цепочку и рассмотрим вектор Бете $B(u)|0\rangle$, зависящий только от одной переменной u . Для такого вектора у нас есть явное представление (см. (2.13))

$$B(u)|0\rangle = c \sum_{k=1}^N \left(u + \frac{c}{2}\right)^{N-k} \left(u - \frac{c}{2}\right)^{k-1} \cdot \sigma_k^- |0\rangle. \quad (3.41)$$

Оператор σ_k^- , действуя на $|0\rangle$, переворачивает спин в узле с номером k :

$$\sigma_k^- |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_k \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_N. \quad (3.42)$$

Таким образом, вектор $B(u)|0\rangle$ является линейной комбинацией состояний с одним спином вниз и $N - 1$ спином вверх.

Рассмотрим подпространство, натянутое на эти векторы. Очевидно, оно является N -мерным, и векторы (3.41) лежат в этом подпространстве. Допустим, что вектор Бете (3.41) является on-shell, т. е. параметр u удовлетворяет системе уравнений Бете (3.39) при $n = 1$:

$$\left(\frac{u + \frac{c}{2}}{u - \frac{c}{2}}\right)^N = 1. \quad (3.43)$$

Очевидно, что это уравнение допускает явное решение. Мы предлагаем читателю самостоятельно доказать, что система on-shell векторов Бете, построенных по решениям уравнения (3.39), образует ортогональный базис в подпространстве с одним спином вниз.

4. Совместность коммутационных соотношений

Запишем формулу действия оператора $A(v)$ на вектор Бете $B(\bar{u})|0\rangle$ (3.21) более подробно:

$$A(v)B(\bar{u})|0\rangle = a(v)f(\bar{u}, v)B(\bar{u})|0\rangle + \sum_{k=1}^n a(u_k)g(v, u_k)f(\bar{u}_k, u_k)B(v)B(\bar{u}_k)|0\rangle. \quad (4.1)$$

Эта формула является следствием перестановочного соотношения (3.12), в правой части которого есть два слагаемых, одно из которых пропорционально функции f , а другое — функции g . Действуя оператором $A(v)$ на вектор $B(\bar{u})|0\rangle$, мы применяем перестановочное соотношение (3.12) несколько раз. Поэтому в формуле (4.1) возникают различные произведения функций f . Удивительно, однако, что подобное не происходит с функцией g . Эта функция входит в действие (4.1) только линейно. В чем причина такого неравноправия между функциями f и g ?

Конечно, мы можем сказать, что $f = 1 + g$, а значит, любое выражение, содержащее эти две функции, может быть преобразовано к виду, в котором будет фигурировать только одна из них. Однако настоящая причина неравноправия лежит гораздо глубже. Так, в лекции 5 мы познакомимся с тригонометрической R -матрицей, которая тоже может быть записана в виде (3.3), но функции f и g уже другие и являются независимыми. Для моделей с такой R -матрицей перестановочное соотношение (3.12) по-прежнему справедливо, следовательно, действие (4.1) также остается в силе. Таким образом мы вновь сталкиваемся с неравноправием, но теперь уже нельзя сослаться на зависимость между функциями f и g .

Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим перестановочные соотношения одного оператора $A(v)$ с произведением двух операторов $B(u_1)$ и $B(u_2)$. Воспользовавшись соотношением (3.12), получаем

$$A(v)B(u_1)B(u_2) = \left(f(u_1, v)B(u_1)A(v) + g(v, u_1)B(v)A(u_1) \right) B(u_2). \quad (4.2)$$

Применив (3.12) еще раз, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} A(v)B(u_1)B(u_2) &= f(u_1, v)f(u_2, v)B(u_1)B(u_2)A(v) \\ &\quad + g(v, u_1)f(u_2, u_1)B(v)B(u_2)A(u_1) \\ &\quad + \left(g(v, u_2)f(u_1, v) + g(v, u_1)g(u_1, u_2) \right) B(v)B(u_1)A(u_2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

С другой стороны, операторы $B(u_1)$ и $B(u_2)$ коммутируют между собой, поэтому

$$A(v)B(u_1)B(u_2) = A(v)B(u_2)B(u_1). \quad (4.4)$$

Следовательно, выражение (4.3) не должно измениться, если в нем заменить u_1 на u_2 , т. е.

$$\begin{aligned} A(v)B(u_1)B(u_2) &= f(u_1, v)f(u_2, v)B(u_1)B(u_2)A(v) \\ &\quad + g(v, u_2)f(u_1, u_2)B(v)B(u_1)A(u_2) \\ &\quad + \left(g(v, u_1)f(u_2, v) + g(v, u_2)g(u_2, u_1) \right) B(v)B(u_2)A(u_1). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Сравнивая (4.3) и (4.5), мы видим, что, вообще говоря, эти выражения отличаются друг от друга. Первые слагаемые в этих формулах совпадают, а вторые и третьи имеют разные структуры. Для того чтобы имело место полное совпадение, мы должны потребовать, чтобы выполнялось тождество

$$g(v, u_2)f(u_1, v) + g(v, u_1)g(u_1, u_2) = g(v, u_2)f(u_1, u_2). \quad (4.6)$$

Легко проверить, что если подставить сюда $f(v, u) = \frac{v-u+c}{v-u}$ и $g(v, u) = \frac{c}{v-u}$, то тождество (4.6) действительно справедливо. Это равенство демонстрирует механизм, с помощью которого выражения, квадратичные по g (т. е. слагаемое $g(v, u_1)g(u_1, u_2)$), сводятся к выражениям, линейным по g .

Рассмотренный пример ставит вопрос о совместности коммутационных соотношений. Действительно, мы рассмотрели случай, когда один оператор $A(v)$ переставляется с двумя операторами $B(u_1)B(u_2)$. Но мы могли бы взять другую тройку операторов, например $C(v)$ и произведение $D(u_1)D(u_2)$, и имели бы ту же самую проблему, а именно, нам следовало бы проверить, что результат перестановки не зависит от порядка операторов D : либо $D(u_1)D(u_2)$, либо $D(u_2)D(u_1)$. Ясно, что при этом мы получим какое-то тождество на функции f и g , которое придется доказывать.

Вместо того чтобы перебирать всевозможные тройки операторов, проще работать с одним коммутационным соотношением для матрицы монодромии. Действительно, все скалярные коммутационные соотношения содержатся в одном матричном RTT -соотношении.

Рассмотрим произведение трех матриц монодромии $T_1(u_1)T_2(u_2)T_3(u_3)$, каждая из которых действует в своем вспомогательном пространстве. Пользуясь RTT -соотношением, мы можем переставить их в обратном порядке $T_3(u_3)T_2(u_2)T_1(u_1)$. При этом мы можем действовать двумя различными способами: мы можем сначала пронести T_1 направо, а потом переставить T_2 и T_3 , либо мы можем сначала пронести T_3 налево, а потом переставить T_1 и T_2 :

$$\begin{aligned} T_1(u_1)T_2(u_2)T_3(u_3) &\rightarrow T_2(u_2)T_1(u_1)T_3(u_3) \rightarrow T_2(u_2)T_3(u_3)T_1(u_1) \rightarrow T_3(u_3)T_2(u_2)T_1(u_1), \\ T_1(u_1)T_2(u_2)T_3(u_3) &\rightarrow T_1(u_1)T_3(u_3)T_2(u_2) \rightarrow T_3(u_3)T_1(u_1)T_2(u_2) \rightarrow T_3(u_3)T_2(u_2)T_1(u_1). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Каждая перестановка двух матриц монодромии осуществляется с помощью R -матрицы

$$R_{jk}(u_j, u_k)T_j(u_j)T_k(u_k)R_{jk}^{-1}(u_j, u_k) = T_k(u_k)T_j(u_j), \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (4.8)$$

Первый способ переупорядочения матриц T_j приводит нас к формуле

$$\begin{aligned} R_{23}(u_2, u_3)R_{13}(u_1, u_3)R_{12}(u_1, u_2)T_1(u_1)T_2(u_2)T_3(u_3)R_{12}^{-1}(u_1, u_2)R_{13}^{-1}(u_1, u_3)R_{23}^{-1}(u_2, u_3) \\ = T_3(u_3)T_2(u_2)T_1(u_1). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Второй способ дает

$$\begin{aligned} R_{12}(u_1, u_2)R_{13}(u_1, u_3)R_{23}(u_2, u_3)T_1(u_1)T_2(u_2)T_3(u_3)R_{23}^{-1}(u_2, u_3)R_{13}^{-1}(u_1, u_3)R_{12}^{-1}(u_1, u_2) \\ = T_3(u_3)T_2(u_2)T_1(u_1). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Мы видим, что если потребовать

$$R_{23}(u_2, u_3)R_{13}(u_1, u_3)R_{12}(u_1, u_2) = R_{12}(u_1, u_2)R_{13}(u_1, u_3)R_{23}(u_2, u_3), \quad (4.11)$$

то результаты обоих способов перестановки совпадают. Но равенство (4.11) является уравнением Янга–Бакстера, которому R -матрица безусловно удовлетворяет. Таким образом, совместность коммутационных соотношений гарантирована уравнением Янга–Бакстера. В свою очередь, тождество (4.6) — это всего одно из скалярных тождеств, которые содержатся в матричном тождестве (4.11).

Здесь уместно провести аналогию с алгебрами Ли. Если скобка элементов алгебры e_i и e_j задана с помощью структурных констант c_{ij}^k

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \quad (4.12)$$

то свойства скобки (антисимметрия, тождество Якоби) налагают определенные ограничения на структурные константы. R -матрицу можно рассматривать как некий аналог структурных констант. Тогда RTT -соотношение (2.2.4) налагает определенное ограничение на R -матрицу, которым и является уравнение Янга–Бакстера. Правда следует оговориться, что уравнение Янга–Бакстера является не необходимым, а лишь достаточным условием совместности коммутационных соотношений между элементами матрицы монодромии. Однако примеры R -матриц, обеспечивающие такую совместность, но не удовлетворяющие уравнению Янга–Бакстера, неизвестны.

Теперь становится понятным, почему в разделе 2.2 была выбрана вполне конкретная R -матрица (2.2.3). Разумеется, коммутативность трансфер-матриц следует из RTT -соотношения при любой R -матрице, но само RTT -соотношение налагает на R -матрицу весьма жесткие требования.

Лекция 4. Уравнения Бете

В предыдущей лекции мы получили систему уравнений Бете. Корни этой системы определяют спектр трансфер-матрицы и, следовательно, спектр гамильтониана рассматриваемой модели. Разумеется, в подавляющем большинстве случаев явно найти эти корни невозможно. Этого и не следовало ожидать. Действительно, предположим, что мы нашли решения системы уравнений Бете для модели XXZ . Это означало бы, что таким обходным маневром нам удалось явно решить алгебраическое уравнение степени 2^N . Надеяться на такую удачу было бы наивно.

Тем не менее, даже при отсутствии явного решения, уравнения Бете позволяют получить много полезной информации о квантовой системе, спектр которой они описывают. В частности, удается найти основное состояние системы, описать возбуждения над ним, а в случаях, если система состоит из большого числа частиц, можно описать ее термодинамические свойства. Кроме того, система уравнений Бете вполне поддается численному решению, что в конечном итоге дает возможность сравнивать результаты теоретических расчетов с экспериментальными данными, полученными в реальных физических системах.

Основной вопрос, связанный с уравнениями Бете, заключается в том, описывают ли ее решения полный набор собственных функций гамильтониана. Ответ на этот вопрос зависит от конкретной модели. В ряде случаев полнота доказана, но, например, в модели XXZ магнетика Гейзенберга математически строгое доказательство на сегодняшний день отсутствует. Еще один интересный вопрос в этой области связан с наличием “лишних” решений. Это такие корни, которые формально удовлетворяют уравнениям Бете, однако векторы, построенные по таким решениям, не являются on-shell векторами. В этой лекции мы рассмотрим несколько примеров подобных “лишних” решений.

1. Совпадающие корни

Формально система уравнений Бете

$$\frac{a(u_k)}{d(u_k)} = \frac{f(u_k, \bar{u}_k)}{f(\bar{u}_k, u_k)} \equiv \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{u_k - u_j + c}{u_k - u_j - c}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

может иметь совпадающие корни. Например, мы можем искать решение (1.1), в котором все корни равны друг другу $u_j = u$, $j = 1, \dots, n$. Тогда система превращается в одно уравнение

$$\frac{a(u)}{d(u)} = (-1)^n. \quad (1.2)$$

В конкретных примерах, рассмотренных выше (XXZ цепочка и нелинейное уравнение Шрёдингера), мы получаем

$$\left(\frac{u + \frac{c}{2}}{u - \frac{c}{2}} \right)^N = (-1)^n, \quad (1.3)$$

$$e^{-iuL} = (-1)^n,$$

и мы видим, что эти уравнения имеют решения. Однако вектор $B(\bar{u})|0\rangle$, построенный по таким решениям, вообще говоря, не будет собственным. Дело в том, что при выводе уравнений Бете мы

молчаливо предполагали, что все корни u_j различны. Вернемся к формуле действия трансфер-матрицы на вектор Бете (3.3.31)

$$\mathcal{T}(v)B(\bar{u})|0\rangle = \tau(v|\bar{u})B(\bar{u})|0\rangle + \sum_{k=1}^n g(v, u_k) \left(a(u_k)f(\bar{u}_k, u_k) - d(u_k)f(u_k, \bar{u}_k) \right) B(v)B(\bar{u}_k)|0\rangle. \quad (1.4)$$

Рассмотрим для простоты случай $n = 2$. Тогда формула (1.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(v)B(\bar{u})|0\rangle &= \tau(v|\bar{u})B(\bar{u})|0\rangle \\ &+ \frac{c}{(v-u_1)(u_2-u_1)} \left(a(u_1)(u_2-u_1+c) - d(u_1)(u_2-u_1-c) \right) B(v)B(u_2)|0\rangle \\ &- \frac{c}{(v-u_2)(u_2-u_1)} \left(a(u_2)(u_1-u_2+c) - d(u_2)(u_1-u_2-c) \right) B(v)B(u_1)|0\rangle. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ясно, что при $u_1 = u_2$ возникает неопределенность. Вычисляя предел $u_1 \rightarrow u_2 = u$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(v)B^2(u)|0\rangle &= \tau(v|\bar{u})B^2(u)|0\rangle + \frac{c^2}{v-u} \left(a(u) + d(u) \right) B(v)B'(u)|0\rangle \\ &+ \frac{c}{v-u} \left(2(a(u) - d(u)) - c(a'(u) - d'(u)) - \frac{c}{v-u} (a(u) + d(u)) \right) B(v)B(u)|0\rangle. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Мы видим, что в ответе помимо исходного вектора $B^2(u)|0\rangle$ возникают еще два вектора. Во-первых, это вектор $B(v)B(u)|0\rangle$. Во-вторых, это вектор $B(v)B'(u)|0\rangle$, содержащий производную от оператора $B(u)$. Коэффициенты при обоих векторах следует положить равными нулю, иначе исходный вектор не будет on-shell. Отсюда получаем два условия

$$\begin{aligned} a(u) + d(u) &= 0, \\ 2(a(u) - d(u)) - c(a'(u) - d'(u)) &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Итак, хотя количество переменных уменьшилось (вместо u_1 и u_2 возникла одна переменная u), мы по-прежнему имеем два уравнения. Первое из этих уравнений формально совпадает с уравнениями Бете при $u_1 = u_2 = u$. Но к нему добавляется второе уравнение, и система оказывается переопределенной. Разрешимость такой переопределенной системы зависит от конкретных значений параметров рассматриваемой модели. Например, в случае нелинейного уравнения Шрёдингера система (1.7) имеет решение при условии $\varkappa L = -4$, где $\varkappa = -ic$ — константа связи. Видно, что при положительной константе связи решений нет. Однако и при отрицательной константе связи решение существует только в исключительном случае. Любое отклонение длины интервала L от заданного значения приводит к неразрешимой системе (1.7).

Понятно теперь, что происходит в случае, когда вектор Бете $B(\bar{u})|0\rangle$ зависит от n переменных u_1, \dots, u_n . При совпадающих $u_j = u_k$ в формуле (1.4) возникнет неопределенность из-за наличия функций $f(u_j, u_k)$. После раскрытия неопределенности мы получим векторы, содержащие производную от оператора B . Легко проверить, что в итоге мы всегда будем иметь n векторов различного типа, коэффициенты при которых следует положить равными нулю. Поэтому мы всегда будем получать систему из n уравнений. В то же время количество переменных уменьшается. Поэтому полученная система будет переопределенной. Вообще говоря, такая переопределенная система неразрешима.

Подчеркнем еще раз, что система (1.1) может иметь совпадающие корни. Однако, как мы убедились, вектор Бете, построенный по такому решению, вообще говоря, не является on-shell.

2. Уравнения Бете для ХХХ цепочки

Для ХХХ цепочки Гейзенберга система уравнений Бете имеет вид (при $c = i$)

$$\left(\frac{u_j + \frac{i}{2}}{u_j - \frac{i}{2}} \right)^N = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{u_j - u_k + i}{u_j - u_k - i}. \quad (2.1)$$

Здесь мы положили $c = i$. Вообще, в модели ХХХ константа c не играет существенной роли, и не случайно она не входит в гамильтониан. Мы всегда можем сделать замену переменных $u \rightarrow \alpha u$, что приведет к замене $c \rightarrow c/\alpha$. Выбор $c = i$ сделан исключительно для удобства, чтобы иметь вещественные решения системы уравнений Бете.

Анализ системы (2.1) является достаточно сложной задачей, и ему посвящена многочисленная литература (см., например, недавнюю статью [8] и ссылки в этой работе). В этом разделе мы проиллюстрируем некоторые тонкости, скрытые в системе (2.1).

2.1. Бесконечные решения. Если в системе (2.1) устремить один параметр к бесконечности (например, u_n), то одно из уравнений обратится в тождество, а из оставшихся уравнений этот параметр исчезнет. Система просто перейдет точно в такую же систему, но на $n - 1$ переменную. Возникает вопрос, нужно ли рассматривать подобные бесконечные корни.

Косвенный ответ на этот вопрос дает случай $n = 1$, когда система (2.1) сводится к одному уравнению

$$\left(\frac{u + \frac{i}{2}}{u - \frac{i}{2}} \right)^N = 1. \quad (2.2)$$

Отсюда находим

$$\frac{u + \frac{i}{2}}{u - \frac{i}{2}} = e^{\frac{2\pi i k}{N}}, \quad k = 0, \dots, N. \quad (2.3)$$

В частности, при $k = 0$ получаем, что u стремится к бесконечности. Если мы не будем учитывать это решение, то останется только $N - 1$ корней, и, как следствие, мы построим только $N - 1$ собственных векторов. В то же время подпространство состояний с одним спином вниз (см. пример из раздела 3.4) N -мерно, следовательно, базис должен насчитывать N векторов.

Строго говоря, наличие бесконечных корней — это вопрос параметризации. Сделав замену переменных

$$\frac{u_j + \frac{i}{2}}{u_j - \frac{i}{2}} = z_j, \quad (2.4)$$

мы приведем систему (2.1) к виду

$$z_j^N = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^n \frac{1 - 2z_j + z_j z_k}{1 - 2z_k + z_j z_k}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Ясно, что в этом случае $u_n \rightarrow \infty$ соответствует корню $z_n = 1$. Однако и при такой параметризации система уравнений Бете может иметь бесконечные решения, которые необходимо учитывать при построении базиса.

Еще одна особенность бесконечных решений (в исходной параметризации) состоит в том, что несколько корней могут стремиться к разным бесконечностям. Например, мы можем устремить $u_1 \rightarrow \infty$ и $u_2 \rightarrow \infty$, но разность $u_1 - u_2$ может при этом быть как конечной, так и бесконечной. Однако если мы перейдем к переменным z_j (2.5), то в пределе получим совпадающие корни $z_1 = z_2 = 1$. Вопрос о том, будет ли вектор Бете, построенный по такому решению, on-shell вектором, требует отдельного анализа.

2.2. Недопустимые решения. Запись уравнений Бете в форме (1.1) является традиционной, но не совсем правильной. Действительно, из формулы (1.4) следует, что условия обращения в нуль коэффициентов при нежелательных векторах имеют вид

$$a(u_k)f(\bar{u}_k, u_k) = d(u_k)f(u_k, \bar{u}_k), \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Система (2.6) эквивалентна системе (1.1), если обе части равенств (2.6) не обращаются в нуль для всех $k = 1, \dots, n$. Однако в модели спиновой цепочки XXZ можно найти такие решения системы (2.6), когда обе части одновременно равны нулю. Снова рассмотрим случай $n = 2$ и положим $c = i$. Тогда система (2.6) принимает вид

$$\begin{aligned} (u_1 + \frac{i}{2})^N (u_2 - u_1 + i) &= (u_1 - \frac{i}{2})^N (u_2 - u_1 - i), \\ (u_2 + \frac{i}{2})^N (u_1 - u_2 + i) &= (u_2 - \frac{i}{2})^N (u_1 - u_2 - i). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Легко видеть, что значения $u_1 = \frac{i}{2}$ и $u_2 = -\frac{i}{2}$ являются корнями системы (2.7). Априори эти корни не хуже и не лучше всех других возможных корней, однако с этими корнями связана очень любопытная особенность системы (2.7). Дело в том, что вектор Бете, построенный по решению $u_1 = \frac{i}{2}$ и $u_2 = -\frac{i}{2}$, оказывается нуль-вектором. Полное доказательство этого факта будет дано позже, когда мы научимся вычислять скалярные произведения векторов Бете. А пока мы рассмотрим конкретный пример цепочки, состоящей из четырех узлов. Вообще, этот пример ($N = 4, n = 2$) замечателен тем, что, с одной стороны, он является нетривиальным, а с другой стороны, уравнения Бете решаются явно.

Итак, мы хотим построить вектор $B(-\frac{i}{2})B(\frac{i}{2})|0\rangle$. Сначала найдем вектор $|\phi\rangle = B(\frac{i}{2})|0\rangle$. Действие оператора $B(u)$ на вакуум нам известно:

$$B(u)|0\rangle = i \sum_{k=1}^4 (u + \frac{i}{2})^{4-k} (u - \frac{i}{2})^{k-1} \cdot \sigma_k^- |0\rangle. \quad (2.8)$$

Полагая здесь $u = \frac{i}{2}$, мы видим, что в сумме выживает лишь одно слагаемое с $k = 1$, поэтому

$$|\phi\rangle = \sigma_1^- |0\rangle \quad (2.9)$$

или, что то же самое,

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_3 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_4. \quad (2.10)$$

Теперь найдем оператор $B(-\frac{i}{2})$. При $u = -\frac{i}{2}$ L -оператор имеет вид

$$L_n(-\frac{i}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{i}{2}(1 - \sigma_n^z) & i \sigma_n^- \\ i \sigma_n^+ & -\frac{i}{2}(1 + \sigma_n^z) \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Удобно перейти от матриц Паули к элементарным единицам E^{jk} :

$$E^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Иными словами, в матрице E^{jk} на пересечении j -й строки и k -го столбца стоит единица, а все остальные матричные элементы равны нулю. В терминах матриц E^{jk} L -оператор записывается в виде

$$L_n(-\frac{i}{2}) = i \begin{pmatrix} -E_n^{22} & E_n^{21} \\ E_n^{12} & -E_n^{11} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Перемножая L -операторы по четырем узлам цепочки, мы находим явное выражение для $B(-\frac{i}{2})$:

$$B(-\frac{i}{2}) = -(E_4^{22} E_3^{22} + E_4^{21} E_3^{12})(E_2^{22} E_1^{21} + E_2^{21} E_1^{11}) - (E_4^{22} E_3^{21} + E_4^{21} E_3^{11})(E_2^{12} E_1^{21} + E_2^{11} E_1^{11}). \quad (2.14)$$

Остается подействовать этим оператором на вектор $|\phi\rangle$ (2.10). Принимая во внимание очевидные соотношения

$$\begin{aligned} E_k^{22}|\phi\rangle &= 0, & E_k^{12}|\phi\rangle &= 0, & k > 2, \\ E_1^{11}|\phi\rangle &= 0, & E_1^{21}|\phi\rangle &= 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

мы легко убеждаемся в том, что $B(-\frac{i}{2})|\phi\rangle = 0$.

Итак, вектор Бете, построенный по решению $u_1 = \frac{i}{2}$, $u_2 = -\frac{i}{2}$, оказался нулевым. Казалось бы, положение нетрудно исправить. Действительно, мы можем взять вектор $B(u_1)B(u_2)|0\rangle$ и вычислить его норму $\mathcal{N}(u_1, u_2)$ в случае, когда параметры u_1 и u_2 являются комплексными числами в общем положении. Тогда вектор

$$\frac{1}{\mathcal{N}(u_1, u_2)} B(u_1)B(u_2)|0\rangle \quad (2.16)$$

имеет единичную норму при любых u_1 и u_2 и, следовательно, он не может обращаться в нуль. Нам останется лишь взять предел $u_1 \rightarrow \frac{i}{2}$, $u_2 \rightarrow -\frac{i}{2}$ в формуле (2.16). Проблема, однако, в том, что данный предел зависит от того, как именно u_1 и u_2 стремятся к своим предельным значениям. Ситуация вполне аналогична пределу

$$\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y}, \quad (2.17)$$

который может принимать любое наперед заданное значение в зависимости от того, как именно x и y стремятся к нулю. У нас же нет никаких дополнительных предписаний о том, как именно u_1 и u_2 стремятся к $\frac{i}{2}$ и $-\frac{i}{2}$. Одним из возможных способов решения проблемы является введение в уравнения Бете дополнительного параметра. Мы познакомимся с этим способом в следующей лекции, где продолжим рассмотрение примера цепочки из 4 узлов.

Лекция 5. Тригонометрическая R -матрица и L -оператор общего вида

В этой лекции мы изучим разные модификации уже знакомых объектов. Во-первых, мы познакомимся с тригонометрической R -матрицей. Во-вторых, мы опишем деформацию матрицы монодромии, позволяющую ввести в нее дополнительный параметр. Роль этого дополнительного параметра будет показана на примере уравнений Бете. Наконец, в-третьих, мы построим матрицу монодромии наиболее общего вида, имеющую вакуум и удовлетворяющую RTT -соотношению с R -матрицей $R(u, v) = \mathbf{I} + g(u, v)\mathbf{P}$.

1. Тригонометрическая R -матрица

В разделе 3.4 мы убедились в том, что если R -матрица удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера, то коммутационные соотношения между матричными элементами матрицы монодромии гарантированно совместны. Однако R -матрица, которой пользовались до сих пор, является далеко не единственным решением уравнения Янга–Бакстера. Рассмотрим R -матрицу, которая в терминах функций f и g имеет точно такой же вид, как и прежде

$$R(u, v) = \begin{pmatrix} f(u, v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g(u, v) & 0 \\ 0 & g(u, v) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(u, v) \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

однако на этот раз положим

$$f(u, v) = \frac{\operatorname{sh}(u - v + \eta)}{\operatorname{sh}(u - v)} \quad \text{и} \quad g(u, v) = \frac{\operatorname{sh} \eta}{\operatorname{sh}(u - v)}, \quad (1.2)$$

где η — некоторая константа. Данная R -матрица тоже удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера и называется тригонометрической R -матрицей¹. Обратите внимание, что если прежняя R -матрица фактически зависела от одной функции g , то тригонометрическая R -матрица зависит уже от двух функций, поскольку $f \neq 1 + g$. Тем не менее тождества между функциями f и g , которые мы получали ранее, остаются в силе. Например, можно проверить, что так же как и для рациональных функций f и g (см. (3.4.6)), справедливо тождество

$$g(v, u_2)f(u_1, v) + g(v, u_1)g(u_1, u_2) = g(v, u_2)f(u_1, u_2). \quad (1.3)$$

Напомним, что это тождество является одним из скалярных соотношений, которые возникают, если записать матричное уравнение Янга–Бакстера в компонентах.

Легко видеть также, что в пределе $u = \epsilon u'$, $v = \epsilon v'$, $\eta = \epsilon s$, $\epsilon \rightarrow 0$ тригонометрическая R -матрица переходит в рациональную R -матрицу. Кстати сказать, многие авторы предпочитают другую форму записи для тригонометрической R -матрицы. А именно, если сделать замену переменных $e^{2u} = \lambda$, $e^{2v} = \mu$ и $e^\eta = q$, то функции f и g принимают вид

$$f(\lambda, \mu) = \frac{q\lambda - q^{-1}\mu}{\lambda - \mu} \quad \text{и} \quad g(\lambda, \mu) = \frac{(q - q^{-1})\sqrt{\lambda\mu}}{\lambda - \mu}. \quad (1.4)$$

¹Писать в формулах (1.2) тригонометрический синус или гиперболический — дело вкуса. Зачастую выбор той или иной функции обусловлен желанием иметь вещественные корни системы уравнений Бете.

Можно также специальным преобразованием подобия избавиться от корня в функции g , и тогда тригонометрическая R -матрица будет зависеть от рациональных функций. Поэтому на самом деле адекватность применения терминов “тригонометрическая” и “рациональная” зависит от параметризации. Заметим также, что будучи записаны в форме (1.4), функции f и g уже не зависят от разности аргументов. Именно по этой причине мы пишем $f(u, v)$ и $g(u, v)$, не подчеркивая зависимость от разности, даже если это действительно так.

Теперь мы можем рассматривать матрицы монодромии, удовлетворяющие RTT -соотношению (2.2.2) с тригонометрической R -матрицей. Очевидно, что все коммутационные соотношения между операторами A, B, C и D остаются неизменными, если они записаны в терминах функций f и g . Не изменяются также и формулы действия операторов на векторы Бете, и, следовательно, система уравнений Бете по-прежнему имеет вид

$$\frac{a(u_k)}{d(u_k)} = \frac{f(u_k, \bar{u}_k)}{f(\bar{u}_k, u_k)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.5)$$

В дальнейшем мы убедимся, что и формулы для скалярных произведений обладают подобной универсальностью: все они остаются справедливыми как для моделей с рациональной R -матрицей, так для моделей с тригонометрической R -матрицей, если записаны через функции f и g . Поэтому мы и в дальнейшем будем придерживаться этих универсальных обозначений.

Что касается физических моделей, описываемых тригонометрической R -матрицей, то к наиболее известным относятся XXZ цепочка Гейзенберга и модель Син-Гордон. В частности, построение гамильтониана XXZ цепочки полностью аналогично случаю XXX цепочки, рассмотренному выше. R -матрица (1.1) с функциями (1.2) порождает L -оператор

$$L_n(u) = \begin{pmatrix} \text{sh}(u + \frac{\eta}{2}\sigma_n^z) & \sigma_n^- \text{sh } \eta \\ \sigma_n^+ \text{sh } \eta & \text{sh}(u - \frac{\eta}{2}\sigma_n^z) \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Напомним, что всякая функция от матрицы понимается в смысле соответствующего ряда Тэйлора, что приводит к

$$\text{sh}(u \pm \frac{\eta}{2}\sigma_n^z) = \text{sh } u \text{ch } \frac{\eta}{2} \pm \sigma_n^z \text{ch } u \text{sh } \frac{\eta}{2}. \quad (1.7)$$

Матрица монодромии является произведением L -операторов по всем узлам цепочки (см. (2.3.14)), а гамильтониан строится из трансфер-матрицы по формуле

$$H = 2 \text{sh } \eta \frac{dT(u)}{du} \mathcal{T}^{-1}(u) \Big|_{u=\frac{\eta}{2}} - N\Delta, \quad (1.8)$$

где $\Delta = \text{ch } \eta$. Читатель легко самостоятельно убедится в том, что формула (1.8) приводит к гамильтониану

$$H = \sum_{k=1}^N \left(\sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + \Delta \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z \right). \quad (1.9)$$

Заменяя в формуле (2.3.14) каждый L -оператор $L_n(u)$ на $L_n(u - \xi_n)$, мы получаем неоднородную цепочку XXZ . Также как и в случае XXX , такая неоднородная цепочка не имеет физического смысла, однако она оказывается очень полезной в промежуточных вычислениях.

Построение квантовой модели Син-Гордон описано в главе VII книги [3].

2. Твистованная матрица монодромии

Пусть числовая матрица \hat{k} размера 2×2 такова, что ее тензорный квадрат коммутирует с R -матрицей

$$[\hat{k}_1 \hat{k}_2, R_{12}(u, v)] = 0. \quad (2.1)$$

Тогда если матрица монодромии $T(u)$ удовлетворяет RTT -соотношению, то матрица $\hat{\kappa}T(u)$ также удовлетворяет этому соотношению

$$R_{12}(u, v)(\hat{\kappa}T(u))_1(\hat{\kappa}T(v))_2 = (\hat{\kappa}T(v))_2(\hat{\kappa}T(u))_1R_{12}(u, v). \quad (2.2)$$

Для доказательства достаточно умножить исходное RTT -соотношение на $\hat{\kappa}_1\hat{\kappa}_2$, например, слева. Тогда в левой части RTT -соотношения получаем

$$\hat{\kappa}_1\hat{\kappa}_2R_{12}(u, v)T_1(u)T_2(v) = R_{12}(u, v)\hat{\kappa}_1\hat{\kappa}_2T_1(u)T_2(v) = R_{12}(u, v)(\hat{\kappa}T(u))_1(\hat{\kappa}T(v))_2. \quad (2.3)$$

Мы воспользовались условием (2.1) и тем, что матричные элементы числовой матрицы $\hat{\kappa}$ коммутируют со всеми матричными элементами матрицы монодромии, откуда следует, что $\hat{\kappa}_2T_1(u) = T_1(u)\hat{\kappa}_2$. В правой части RTT -соотношения имеем

$$\hat{\kappa}_1\hat{\kappa}_2T_1(u)T_2(v)R_{12}(u, v) = (\hat{\kappa}T(v))_2(\hat{\kappa}T(u))_1R_{12}(u, v), \quad (2.4)$$

и мы приходим к соотношению (2.2). Легко проверить, что исходную матрицу монодромии можно умножать на $\hat{\kappa}$ и справа, и при этом новая матрица $T(u)\hat{\kappa}$ также будет удовлетворять RTT -соотношению.

Очевидно, что R -матрица $R(u, v) = \mathbf{I} + g(u, v)\mathbf{P}$ коммутирует с $\hat{\kappa}_1\hat{\kappa}_2$ при любой $\hat{\kappa}$ размера 2×2 . По этой причине данную R -матрицу называют $GL(2)$ -инвариантной. Однако в результате умножения $T(u)$ на $\hat{\kappa}$ мы можем нарушить свойства вакуума. Действительно, если

$$\hat{\kappa} = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

то

$$\hat{\kappa}T(u) = \begin{pmatrix} A_\kappa(u) & B_\kappa(u) \\ C_\kappa(u) & D_\kappa(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_{11}A(u) + \kappa_{12}C(u) & \kappa_{11}B(u) + \kappa_{12}D(u) \\ \kappa_{21}A(u) + \kappa_{22}C(u) & \kappa_{21}B(u) + \kappa_{22}D(u) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Видно, что вакуумный вектор $|0\rangle$ более не уничтожается оператором $C_\kappa(u)$ и не является собственным вектором для оператора $D_\kappa(u)$. Если, однако, мы возьмем диагональную матрицу $\hat{\kappa} = \text{diag}(\kappa_1, \kappa_2)$, то свойства вакуума не нарушатся. На самом деле без ограничения общности можно в качестве матрицы $\hat{\kappa}$ взять матрицу $\hat{\kappa} = \text{diag}(1, \kappa)$, поскольку умножение матрицы монодромии на произвольную константу заведомо не существенно.

Если матрица $\hat{\kappa}$ диагональна, то ее тензорный квадрат коммутирует и с тригонометрической R -матрицей. Поэтому и в этом случае мы можем рассматривать подобную деформацию исходной матрицы монодромии.

Полученная таким образом новая матрица $\hat{\kappa}T(u)$ называется твистованной матрицей монодромии, а ее след $A(u) + \kappa D(u)$ называется твистованной трансфер-матрицей. Параметр κ называется параметром твиста. Свойства твистованной матрицы монодромии полностью аналогичны свойствам исходной матрицы монодромии. Меняется лишь значение функции $d(u)$. Действительно, легко видеть, что

$$D_\kappa(u)|0\rangle = \kappa d(u)|0\rangle. \quad (2.7)$$

Поэтому в действии оператора $D_\kappa(v)$ на векторы Бете $B(\bar{u})$ возникает параметр κ , что в конечном итоге приводит к появлению этого параметра в уравнениях Бете

$$\frac{a(u_k)}{d(u_k)} = \kappa \frac{f(u_k, \bar{u}_k)}{f(\bar{u}_k, u_k)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

Собственные векторы твистованной трансфер-матрицы называются твистованными on-shell векторами. Они по-прежнему имеют вид $B(\bar{u})|0\rangle$, но параметры \bar{u} должны удовлетворять твистованным уравнениям Бете (2.8).

Читатель вправе задать вопрос: а зачем? Зачем нужно вводить в матрицу монодромии дополнительный параметр? Для возможных физических приложений имеет смысл рассматривать $\kappa = e^{i\varphi}$, где φ — вещественное число. Тогда мы можем изучать модели не только с периодическими, но и с квазипериодическими граничными условиями. Однако и другие значения параметра твиста тоже оказываются полезными, в чем мы убедимся уже в следующем разделе.

3. Недопустимые решения для XXZ цепочки

Появление в уравнениях Бете дополнительного параметра κ приводит к совершенно неожиданным эффектам. Чтобы проиллюстрировать это, мы вернемся к рассмотрению примера цепочки, состоящей из четырех узлов: $N = 4$. Ради общности, пусть теперь это будет XXZ цепочка. Построим вектор Бете $B(u_1)B(u_2)|0\rangle$, зависящий от двух параметров u_1 и u_2 . Этот вектор лежит в подпространстве, в котором два спина направлены вверх и два спина направлены вниз. Размерность этого подпространства равна $\binom{4}{2} = 6$.

Потребуем, чтобы параметры u_1 и u_2 удовлетворяли твистованным уравнениям Бете, которые мы запишем в виде, аналогичном (4.2.7):

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^4(u_1 + \eta/2) \operatorname{sh}(u_1 - u_2 - \eta) &= \kappa \operatorname{sh}^4(u_1 - \eta/2) \operatorname{sh}(u_1 - u_2 + \eta), \\ \operatorname{sh}^4(u_2 + \eta/2) \operatorname{sh}(u_2 - u_1 - \eta) &= \kappa \operatorname{sh}^4(u_2 - \eta/2) \operatorname{sh}(u_2 - u_1 + \eta). \end{aligned} \quad (3.1)$$

В разделе 4.2.2 было показано, что с некоторыми решениями уравнений Бете могут возникнуть проблемы при построении соответствующего on-shell вектора. То же самое может произойти и с твистованными уравнениями Бете. Вообще, согласно результатам работы [9] собственные векторы твистованной трансфер-матрицы соответствует таким решениям системы (3.1), для которых $u_1 \neq u_2$ и обе части уравнений не обращаются в нуль. Таким образом, решение $u_1 = \eta/2$ и $u_2 = -\eta/2$ является запрещенным в том смысле, что вектор, построенный по этому решению, не является твистованным on-shell вектором. Заметим, что это решение существует для любого κ , и оно является аналогом решения $u_1 = \frac{i}{2}$ и $u_2 = -\frac{i}{2}$ системы (4.2.7). Мы видели, что вектор, построенный по такому решению, является нуль-вектором.

Если же обе части уравнений (3.1) не обращаются в нуль, то мы можем переписать их в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\operatorname{sh}(u_1 + \eta/2)}{\operatorname{sh}(u_1 - \eta/2)} \right)^4 \frac{\operatorname{sh}(u_1 - u_2 - \eta)}{\operatorname{sh}(u_1 - u_2 + \eta)} &= \kappa, \\ \left(\frac{\operatorname{sh}(u_2 + \eta/2)}{\operatorname{sh}(u_2 - \eta/2)} \right)^4 \frac{\operatorname{sh}(u_2 - u_1 - \eta)}{\operatorname{sh}(u_2 - u_1 + \eta)} &= \kappa. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Полагая $\kappa = \theta^{-2}$ и

$$\frac{\operatorname{sh}(u_j - \eta/2)}{\operatorname{sh}(u_j + \eta/2)} = w_j, \quad (3.3)$$

мы получаем новую систему на w_1 и w_2 :

$$\begin{aligned} w_1^4 \cdot \frac{1 + w_1 w_2 - 2\Delta w_2}{1 + w_1 w_2 - 2\Delta w_1} &= -\theta^2, \\ w_2^4 \cdot \frac{1 + w_1 w_2 - 2\Delta w_1}{1 + w_1 w_2 - 2\Delta w_2} &= -\theta^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\Delta = \operatorname{ch} \eta$. Заметим, что в такой параметризации система уравнений Бете одинаково пригодна как для цепочки XXZ , так и для цепочки XXX . В последнем случае следует просто положить $\Delta = 1$.

Перемножая оба уравнения, мы получаем $(w_1 w_2)^4 = \theta^4$. Следовательно, существует четыре возможности: $w_1 w_2 = \pm i\theta$ и $w_1 w_2 = \pm \theta$.

Пусть $w_2 = \pm i\theta/w_1$. Подставляя это в первое уравнение (3.4), получим

$$[w_1^2 \mp i\theta][(1 \pm i\theta)(w_1^2 \pm i\theta) \mp 2i\Delta\theta w_1] = 0. \quad (3.5)$$

Если $w_1^2 = \pm i\theta$, то $w_1 = w_2$, и такое решение не соответствует собственному вектору твистованной трансфер-матрицы. Таким образом, нам остается решить квадратное уравнение

$$(1 \pm i\theta)(w_1^2 \pm i\theta) \mp 2i\Delta\theta w_1 = 0. \quad (3.6)$$

При $w_1 w_2 = i\theta$ мы получаем решение

$$w_1 = \frac{i\Delta\theta}{1+i\theta} + \sqrt{-i\theta - \frac{\Delta^2\theta^2}{(1+i\theta)^2}}, \quad w_2 = \frac{i\Delta\theta}{1+i\theta} - \sqrt{-i\theta - \frac{\Delta^2\theta^2}{(1+i\theta)^2}}. \quad (3.7)$$

Обратите внимание, что здесь речь идет о решениях системы (3.4), а не уравнения (3.6). Само уравнение (3.6) при $w_1 w_2 = i\theta$ имеет два корня w_1^+ и w_1^- , которые отличаются знаком перед радикалом. В решении (3.7) мы выбрали $w_1 = w_1^+$. Легко видеть, что если бы мы положили $w_1 = w_1^-$, то это было бы эквивалентно замене w_1 на w_2 в решении системы (3.4). Но мы не различаем решения системы уравнений Бете, которые отличаются друг от друга только перестановкой, поскольку им соответствует один и тот же собственный вектор.

Аналогично для $w_1 w_2 = -i\theta$ находим

$$w_1 = \frac{-i\Delta\theta}{1-i\theta} + \sqrt{i\theta - \frac{\Delta^2\theta^2}{(1-i\theta)^2}}, \quad w_2 = \frac{-i\Delta\theta}{1-i\theta} - \sqrt{i\theta - \frac{\Delta^2\theta^2}{(1-i\theta)^2}}. \quad (3.8)$$

Пусть теперь $w_1 w_2 = \pm\theta$. Тогда на параметр w_1 возникает следующее уравнение:

$$(1 \pm \theta)(w_1^4 + \theta^2) \mp 2\Delta\theta w_1(w_1^2 \pm \theta) = 0. \quad (3.9)$$

Разделив это уравнение на w_1^2 и положив

$$x = w_1 \pm \theta/w_1, \quad (3.10)$$

мы получим квадратное уравнение на x :

$$(1 \pm \theta)(x^2 \mp 2\theta) \mp 2\Delta\theta x = 0. \quad (3.11)$$

Таким образом, в случае $w_1 w_2 = \theta$ мы получаем два решения

$$w_1 = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - \theta}, \quad w_2 = \frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} - \theta}, \quad (3.12)$$

где x может принимать два значения

$$x = \frac{\Delta\theta}{1+\theta} \pm \sqrt{\frac{\Delta^2\theta^2}{(1+\theta)^2} + 2\theta}. \quad (3.13)$$

Точно так же в случае $w_1 w_2 = -\theta$ имеем

$$w_1 = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + \theta}, \quad w_2 = \frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} + \theta}, \quad (3.14)$$

где

$$x = -\frac{\Delta\theta}{1-\theta} \pm \sqrt{\frac{\Delta^2\theta^2}{(1-\theta)^2} - 2\theta}. \quad (3.15)$$

Таким образом, мы получили 6 решений твистованных уравнений Бете, по которым мы можем построить 6 собственных векторов твистованной трансфер-матрицы. Разумеется, необходимо еще проверить линейную независимость этих векторов, но по крайней мере их количество совпадает с размерностью подпространства, в котором два спина направлены вверх и два спина направлены вниз. Поэтому есть шанс, что эта система векторов образует базис.

Посмотрим теперь, что было бы, если бы мы с самого начала рассматривали обычную систему уравнений Бете, а не твистованную. Для этого надо просто положить в уравнениях (3.4) $\theta = 1$. Тогда при $w_1w_2 = -1$ уравнение (3.9) принимает вид

$$w_1(w_1^2 - 1) = 0, \quad (3.16)$$

откуда следует всего одно решение системы уравнений Бете: $w_1 = 1$ и $w_2 = -1$ (или наоборот). Решение $w_1 = 0$ нас, судя по всему, не устраивает, так как в этом случае мы не можем обеспечить выполнение условия $w_1w_2 = -1$. Однако, глядя на формулу (3.14) при $\theta \neq 1$, мы сразу же видим, что это решение отбрасывать нельзя. Действительно, при $w_1w_2 = -1$ и $\theta \rightarrow 1$ мы получаем либо $x = 0$, либо $x = \infty$. В первом случае мы воспроизводим решение $w_1 = 1$ и $w_2 = -1$, а во втором получаем $w_1 = 0$ и $w_2 = \infty$, причем нам нужно обеспечить, чтобы произведение нуля и бесконечности равнялось -1 . Ясно, что мы не могли бы найти такое “странное решение”, если бы с самого начала работали с обычной системой уравнений Бете. И тогда мы получили бы всего пять решений, и соответственно пять on-shell векторов, что заведомо не может образовывать базис в 6-мерном пространстве.

Возвращаясь к исходным переменным u_1 и u_2 , мы видим, что решение $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$ как раз соответствует запрещенным значениям $u_1 = \eta/2$, $u_2 = -\eta/2$. Таким образом, мы имеем дело с весьма любопытной ситуацией. При $\kappa \neq 1$ имеется 6 допустимых решений уравнений Бете. Однако в пределе $\kappa \rightarrow 1$ одно из этих допустимых решений стремится к недопустимому решению $u_1 = \eta/2$, $u_2 = -\eta/2$, которое, еще раз напомним, существует при любом κ . Если бы мы с самого начала рассматривали обычные уравнения Бете (с $\kappa = 1$), то мы не смогли бы различить допустимое и недопустимое решение, и тогда мы построили бы всего 5 решений уравнений, что заведомо недостаточно для построения базиса.

Мы уже упоминали, что если нормировать исходный вектор $B(u_1)B(u_2)|0\rangle$ и потом рассмотреть предел $u_1 \rightarrow \eta/2$, $u_2 \rightarrow -\eta/2$, то результат зависит от того, как именно параметры u_1 и u_2 стремятся к своим предельным значениям. Рассмотренный выше пример подсказывает, как можно выйти из создавшейся ситуации. Надо рассмотреть твистованные уравнения Бете и выбрать такое решение $u_1(\kappa)$ и $u_2(\kappa)$, которое при $\kappa \rightarrow 1$ стремится к недопустимому. Тогда предел для нормированного вектора Бете должен быть определен однозначно, поскольку на этот раз способ стремления u_1 и u_2 к предельным значениям зафиксирован. Мы убедимся в этом позднее.

4. Классификация L -операторов

Ясно, что умножение матрицы монодромии на произвольную скалярную функцию $T(u) \rightarrow \phi(u)T(u)$ приводит лишь к изменению функций $a(u) \rightarrow \phi(u)a(u)$ и $d(u) \rightarrow \phi(u)d(u)$. Поэтому существенно различные матрицы монодромии параметризуются различными отношениями $a(u)/d(u)$. Неслучайно в уравнения Бете входит именно это отношение. В этом разделе мы рассмотрим модели с R -матрицей вида $R(u, v) = \mathbf{I} + g(u, v)\mathbf{P}$ и покажем, что можно построить матрицу монодромии, у которой отношение $a(u)/d(u)$ является отношением двух произвольных полиномов одинаковой степени.

Мы уже знакомы с L -оператором решеточной версии квантового нелинейного уравнения Шрёдингера

$$L_n(u) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{i u \Delta_n}{2} + \frac{\varkappa \Delta_n^2}{2} \psi_n^\dagger \psi_n & -i \Delta_n \psi_n^\dagger \rho_n^+ \\ i \Delta_n \rho_n^- \psi_n & 1 + \frac{i u \Delta_n}{2} + \frac{\varkappa \Delta_n^2}{2} \psi_n^\dagger \psi_n \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Напомним, что здесь $\rho_n^\pm = \rho_n^\pm(\psi_n^\dagger \psi_n)$ и

$$\rho_n^+ \rho_n^- = \varkappa + \frac{\varkappa^2 \Delta_n^2}{4} \psi_n^\dagger \psi_n, \quad (4.2)$$

а параметр \varkappa связан с константой c , входящей в R -матрицу, равенством $c = -i\varkappa$. Константа Δ_n является произвольным комплексным числом², поэтому мы приписали индекс n , подчеркивая тем самым, что в разных узлах решетки этот параметр может принимать разные значения. Мы можем ввести в L -оператор (4.1) еще три произвольные константы. Во-первых, можно сдвинуть переменную u на некоторое число ξ_n , поскольку R -матрица зависит от разности аргументов. Во-вторых, можно умножить L -оператор на матрицу $\hat{\kappa}_n = \text{diag}(\kappa_{n1}, \kappa_{n2})$. В результате получим

$$\tilde{L}_n(u) = \begin{pmatrix} \kappa_{n1} \left(1 - \frac{i(u-\xi_n)\Delta_n}{2} + \frac{\varkappa \Delta_n^2}{2} \psi_n^\dagger \psi_n \right) & -i \kappa_{n1} \Delta_n \psi_n^\dagger \rho_n^+ \\ i \kappa_{n2} \Delta_n \rho_n^- \psi_n & \kappa_{n2} \left(1 + \frac{i(u-\xi_n)\Delta_n}{2} + \frac{\varkappa \Delta_n^2}{2} \psi_n^\dagger \psi_n \right) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В принципе, мы можем рассмотреть и случай, когда один из параметров κ_{nj} равен нулю, но понятно, что тогда мы получим слишком бедную модель. Поэтому мы будем считать параметры κ_{n1} и κ_{n2} произвольными, но отличными от нуля.

Действие диагональных матричных элементов на вакуум $|0\rangle$ теперь дается формулами

$$\tilde{L}_n^{11}(u)|0\rangle = (a_n^{(1)}u + a_n^{(0)})|0\rangle, \quad \tilde{L}_n^{22}(u)|0\rangle = (d_n^{(1)}u + d_n^{(0)})|0\rangle, \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} a_n^{(1)} &= -\frac{i \kappa_{n1} \Delta_n}{2}, & a_n^{(0)} &= \kappa_{n1} + \frac{i \kappa_{n1} \xi_n \Delta_n}{2}, \\ d_n^{(1)} &= \frac{i \kappa_{n2} \Delta_n}{2}, & d_n^{(0)} &= \kappa_{n2} - \frac{i \kappa_{n2} \xi_n \Delta_n}{2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Поскольку Δ_n , κ_{n1} , κ_{n2} и ξ_n — произвольные комплексные числа, то и $a_n^{(0)}$, $d_n^{(0)}$ — тоже произвольны, а $a_n^{(1)}$, $d_n^{(1)}$ — произвольные не равные нулю (см. замечание выше).

Теперь построим матрицу монодромии по обычному правилу:

$$\tilde{T}(u) = \tilde{L}_N(u) \cdots \tilde{L}_1(u). \quad (4.6)$$

Ясно, что у такой матрицы монодромии отношение вакуумных собственных значений операторов $A(u)$ и $D(u)$ имеет вид

$$\frac{a(u)}{d(u)} = \prod_{n=1}^N \frac{a_n^{(1)}u + a_n^{(0)}}{d_n^{(1)}u + d_n^{(0)}}, \quad (4.7)$$

где N — произвольное натуральное число. Таким образом, мы построили матрицу монодромии, у которой отношение $a(u)/d(u)$ является произвольной рациональной функцией, ограниченной на бесконечности ненулевой константой. Более того, в пределе $N \rightarrow \infty$ можно получить функции,

²Не спутайте эту константу с параметром анизотропии в XXZ цепочке Гейзенберга (1.9), который по традиции обозначается тем же символом.

имеющие существенные особенности, разрезy и т. д. Таким образом, если не рассматривать экзотические функции $a(u)/d(u)$, то матрица $T(u)$ (4.6) является матрицей монодромии наиболее общего вида, удовлетворяющей RTT -соотношению и имеющей вакуум.

В частном случае мы должны воспроизвести матрицу монодромии XXX цепочки. Это действительно возможно. Пусть

$$\tilde{L}_n(u) = \frac{2i}{\Delta} \sigma^z L_n(u) = \begin{pmatrix} u + \frac{2i}{\Delta} + i\kappa \Delta \psi_n^\dagger \psi_n & 2\Delta \psi_n^\dagger \rho_n^+ \\ 2\Delta \rho_n^- \psi_n & u - \frac{2i}{\Delta} - i\kappa \Delta \psi_n^\dagger \psi_n \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

где мы положили $\Delta_n = \Delta$ для всех n . Легко видеть, что L -оператор (4.8) представим в виде

$$\tilde{L}_n(u) = u - i\kappa \sum_{\alpha=x,y,z} \sigma^\alpha t_n^\alpha, \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} t_n^x &= \frac{i}{\kappa} (\psi_n^\dagger \rho_n^+ + \rho_n^- \psi_n), \\ t_n^y &= \frac{1}{\kappa} (\rho_n^- \psi_n - \psi_n^\dagger \rho_n^+), \\ t_n^z &= -\frac{2}{\kappa \Delta} - \Delta \psi_n^\dagger \psi_n. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Прямым вычислением убеждаемся в том, что операторы t_n^α удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[t_n^\alpha, t_n^\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} t_n^\gamma. \quad (4.11)$$

Здесь $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — полностью антисимметричный тензор. Кроме того, несложно проверить, что

$$(t^n)^2 \equiv (t_n^x)^2 + (t_n^y)^2 + (t_n^z)^2 = s(s+1), \quad \text{где} \quad s = -\frac{2}{\kappa \Delta}, \quad (4.12)$$

и, следовательно, мы получили представление алгебры $su(2)$ с произвольным спином. Фактически мы воспроизвели известное преобразование Гольштейна–Примакова от операторов рождения и уничтожения к спиновым операторам [10]. Вообще говоря, построенное представление бесконечномерно, но в частном случае $s = 1/2$ мы можем положить $t_n^\alpha = \frac{\sigma_n^\alpha}{2}$, $\alpha = x, y, z$. Тогда с учетом $-i\kappa = c$ мы действительно воспроизведем L -оператор XXX цепочки.

Лекция 6. Шестивершинная модель

Эта лекция посвящена шестивершинной модели. На первый взгляд, это шаг в сторону от описания метода алгебраического анзаца Бете. На самом деле все совсем наоборот. Основная задача этой лекции — продемонстрировать, что шестивершинная модель не просто теснейшим образом связана с XXZ и XXX цепочками Гейзенберга, но по большому счету это одно и то же.

1. Определение шестивершинной модели

Рассмотрим квадратную $N \times N$ решетку, на ребрах которой живет некоторая классическая переменная, принимающая два значения. Будем считать, что эти значения равны 1 и 2. Сопоставим этим значениям стрелки. Если переменная имеет значение 1, то ей сопоставим стрелки \rightarrow или \uparrow , в зависимости от того, на горизонтальном или вертикальном ребре находится данная переменная. Аналогично, пусть значению 2 соответствуют стрелки \leftarrow и \downarrow . Мы получаем решетку, на ребрах которой расставлены стрелки.

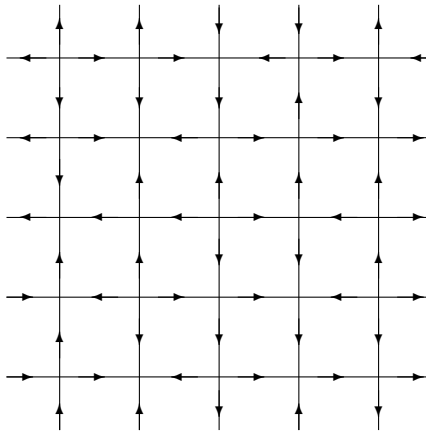


Рис. 6.1. 16-вершинная модель

Поскольку в каждой вершине сходятся четыре ребра, на каждом из которых стрелка может иметь одно из двух направлений, то всего существует 16 типов различных вершин. Такую модель называют 16-вершинной¹ по количеству различных типов вершин (см. рис. 6.1).

Наложим на вершины дополнительное условие. Пусть в каждой вершине число входящих стрелок равно числу выходящих (т. е. и тех, и других ровно две). Если понимать стрелки как графическое изображение некоего потока, то можно сказать, что поток через каждую вершину равен нулю. Легко сообразить, что существует шесть типов вершин, обладающих таким свойством. Действительно, два ребра с входящими стрелками можно выбрать $\binom{4}{2} = 6$ способами. На оставшихся двух ребрах стрелки автоматически должны быть выходящими. Такую модель естественно назвать 6-вершинной. На рис. 6.2 приведены все шесть типов вершин. На верхнем

¹Правильнее было бы назвать ее “16-типов-вершинной” моделью, но такое название слишком громоздко.

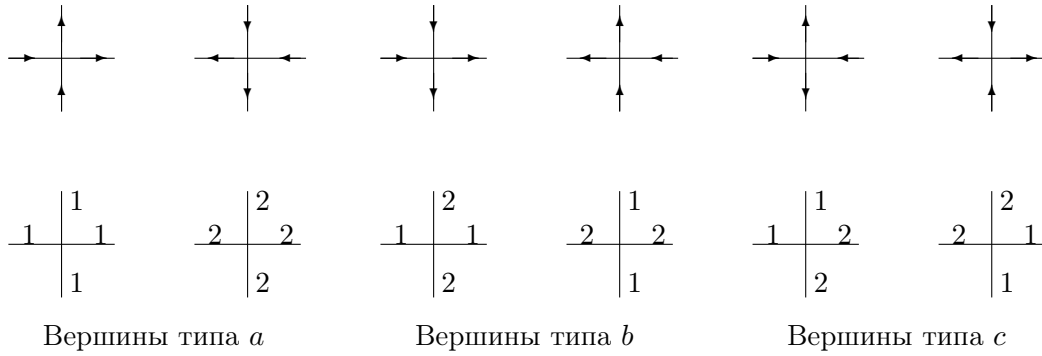


Рис. 6.2. Шесть типов вершин

рисунке изображены стрелки, а на нижнем вместо стрелок даны соответствующие значения переменной.

Общий вид решетки, соответствующей 6-вершинной модели, показан на рис. 6.3.

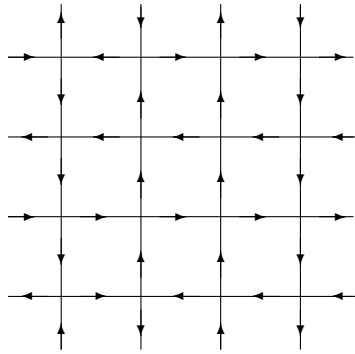


Рис. 6.3. 6-вершинная модель

2. Статистическая сумма 6-вершинной модели

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о вычислении статистической суммы 6-вершинной модели. Наша основная задача — показать, что в этой модели естественным образом возникают уже знакомые объекты: R -матрица, матрица монодромии и трансфер-матрица.

2.1. Общие положения. Традиционным объектом статистической механики являются системы, состоящие из большого числа частиц. Пусть некоторая система имеет набор состояний s , так что каждому состоянию отвечает энергия $E(s)$. Для нахождения термодинамических свойств системы достаточно вычислить ее статистическую сумму, определяемую выражением

$$Z = \sum_s e^{(-E(s)/T)}, \tag{2.1}$$

где T — температура, измеряемая в единицах энергии, и суммирование ведется по всем возможным состояниям системы.

Согласно принципу Гиббса, вероятность обнаружить систему в состоянии s равна

$$p(s) = Z^{-1} e^{(-E(s)/T)} = Z^{-1} W(s), \tag{2.2}$$

где величина $W(s) = e^{(-E(s)/T)}$ называется статистическим весом состояния s . Пусть X — некоторая измеряемая характеристика системы (энергия, намагниченность и т. п.), и пусть в состоянии s она имеет значение $X(s)$. Тогда среднее термодинамическое значение величины X равно

$$\langle X \rangle = Z^{-1} \sum_s X(s) e^{(-E(s)/T)}. \quad (2.3)$$

2.2. Периодические граничные условия. Для того чтобы поставить задачу о вычислении статистической суммы 6-вершинной модели, нам следует приписать каждому типу вершин некоторый статистический вес. Сделаем дополнительное предположение, что значения 1 и 2 равновероятны. Тогда статистический вес вершины не должен меняться при одновременном изменении направления всех стрелок. В этом случае имеется три статистических веса, которые мы по традиции, введенной Р. Бакстером, будем обозначать a , b и c . Соответствующие им вершины будем называть вершинами типа a , b или c (см. рис. 6.2). На языке стрелок вершины типа c характеризуются тем, что в них стрелка, проходя через вершину, меняет направление. В вершинах типа a и b стрелки сохраняют направление при проходе через вершину. На языке индексов вершины типа a отличаются от всех остальных тем, что у них все четыре индекса одинаковы.

Для вычисления статистической суммы следует сначала зафиксировать некоторую конфигурацию стрелок на всей решетке. Энергия такой конфигурации складывается из энергий всех входящих в нее вершин, следовательно, ее статистический вес равен произведению статистических весов всех вершин. После этого нужно взять сумму по всем возможным конфигурациям стрелок на всей решетке. Таким образом, статистическая сумма Z_N имеет вид

$$Z_N = \sum_{\text{конфигурации}} \prod_{\text{вершины}} W_{ij}. \quad (2.4)$$

Здесь W_{ij} — статистический вес вершины, находящейся на пересечении i -й горизонтальной и j -й вертикальной линии. В зависимости от типа вершины, он может принимать три значения — либо a , либо b , либо c .

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим 6-вершинную модель, в которой все статистические веса умножены на общую константу γ . Ясно, что статистическая сумма этой новой модели связана со статистической суммой старой модели простым соотношением

$$Z_N(\gamma a, \gamma b, \gamma c) = \gamma^{N^2} Z_N(a, b, c). \quad (2.5)$$

Поэтому существенно различными следует считать модели, в которых имеется разное отношение статистических весов, например a/c и b/c . Таким образом, существенно различные 6-вершинные модели параметризуются двумя параметрами, а не тремя.

Мы можем суммировать по всем возможным конфигурациям, включая различные ориентации стрелок на граничных ребрах. В таком случае говорят о свободных граничных условиях. Другая возможность — зафиксировать направления стрелок на граничных ребрах и суммировать по всем возможным конфигурациям внутри решетки. Можно также считать, что решетка нарисована на торе, и тогда фактически она не имеет границы (периодические граничные условия). Последний вариант рассматривается наиболее часто, поскольку именно в этом случае мы с самого начала обеспечиваем трансляционную инвариантность физических величин. В этом разделе мы рассмотрим случай периодических граничных условий.

Начнем с того, что слегка изменим определение 6-вершинной модели. Пусть разрешены все 16 типов вершин, однако у тех вершин, в которых число входящих стрелок не равно числу выходящих, статистические веса тождественно равны нулю. Равенство нулю статистического веса

означает, что такая вершина встречается с вероятностью нуль. Ясно поэтому, что новое определение эквивалентно старому. Теперь, однако, мы формально имеем 16 статистических весов (десять из которых тождественно равны нулю), которые мы можем записать в виде матрицы 4×4 .



Рис. 6.4. Одна вершина и две соседние вершины

Рассмотрим вершину, изображенную на рис. 6.4 а). На горизонтальной линии она имеет индексы α и β , которые могут принимать два значения 1 или 2. Аналогично, на вертикальной линии она имеет индексы j и k , которые также могут принимать значения 1 или 2. Сопоставим этой вершине статистический вес $R^{\alpha\beta,jk}$, который является матричным элементом некоторой матрицы R , которую следует понимать как блочную матрицу 2×2 , где каждый блок в свою очередь является матрицей 2×2 . Первая пара индексов задает номер блока, вторая — номер элемента блока. Ненулевые матричные элементы равны

$$\begin{aligned} R^{11,11} &= R^{22,22} = a, \\ R^{11,22} &= R^{22,11} = b, \\ R^{12,21} &= R^{21,12} = c. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Остальные матричные элементы равны нулю. Сама матрица R , которую естественно называть матрицей статистических весов, имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Мы видим, что по построению матрица статистических весов R действует в тензорном произведении двух пространств $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Принято называть первое пространство \mathbb{C}^2 горизонтальным пространством (поскольку индексы α и β находятся на горизонтальных ребрах вершины), а второе пространство \mathbb{C}^2 — вертикальным пространством (поскольку индексы j и k находятся на вертикальных ребрах вершины).

Невооруженным глазом видно, что структура матрицы статистических весов совпадает со структурой R -матрицы. Действительно, достаточно сделать замену переменных

$$a = \gamma f(u, \xi) = \gamma \frac{\text{sh}(u - \xi + \eta)}{\text{sh}(u - \xi)}, \quad b = \gamma, \quad c = \gamma g(u, \xi) = \frac{\gamma \text{sh } \eta}{\text{sh}(u - \xi)}, \quad (2.8)$$

и матрица статистических весов приобретает знакомый вид

$$R = R(u, \xi) = \gamma \begin{pmatrix} f(u, \xi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g(u, \xi) & 0 \\ 0 & g(u, \xi) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(u, \xi) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Заметьте, что именно тригонометрическая R -матрица отвечает случаю, когда все три статистических веса a , b и c являются независимыми. Рациональная R -матрица описывает 6-вершинную модель с дополнительным условием $(c + 1)/a = 1$.

Сделаем теперь маленькое упражнение — вычислим статистическую сумму на решетке, состоящей из двух вершин (см. рис. 6.4 б)). Для вычисления статистической суммы мы должны для каждой конфигурации посчитать произведение статистических весов всех вершин, после чего просуммировать получившиеся произведения по всем возможным конфигурациям. Мы предположим, что индексы на внешних ребрах фиксированы. Тогда существует всего две конфигурации: в первой на промежуточном горизонтальном ребре индекс $\alpha' = 1$, во второй $\alpha' = 2$. В первом случае произведение статистических весов равно $R^{\alpha 1, j_2 k_2} R^{1 \beta, j_1 k_1}$, во втором $R^{\alpha 2, j_2 k_2} R^{2 \beta, j_1 k_1}$. Таким образом, статистическая сумма Z равна

$$Z = R^{\alpha \alpha', j_2 k_2} R^{\alpha' \beta, j_1 k_1}, \quad (2.10)$$

где, как обычно, по повторяющемуся индексу α' ведется суммирование. Таким образом, процедура вычисления статистической суммы сводится к умножению матриц, действующих в тензорном произведении пространств. Пусть горизонтальной линии на рис. 6.4 б) соответствует пространство V_0 , а двум вертикальным — пространства V_2 и V_1 . Тогда

$$Z = (R_{02} R_{01})^{\alpha \beta, j_2 k_2, j_1 k_1}, \quad (2.11)$$

т. е. статистическая сумма двух вершин равна некоторому матричному элементу произведения $R_{02} R_{01}$.

Полученный результат очевидным образом обобщается на вычисление статистической суммы горизонтальной линии, состоящей из N вершин (см. рис. 6.5). Мы вводим пространство

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} & k_N & k_{N-1} & k_{N-2} & \dots & \dots & \dots & \dots & k_1 \\ \alpha & \gamma_N & \gamma_{N-1} & \gamma_{N-2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \gamma_1 & \beta \\ & j_N & j_{N-1} & j_{N-2} & \dots & \dots & \dots & \dots & j_1 & \end{array}$$

Рис. 6.5. Матрица монодромии и трансфер-матрица

$V_0 \otimes V_1 \otimes \dots \otimes V_N$, где V_0 ассоциируется с горизонтальной линией, а остальные V_k соответствуют вертикальным. После этого достаточно взять тензорное произведение R -матриц по всем вершинам. Матричный элемент $(R_{0N} \dots R_{01})^{\alpha \beta, j_N k_N, \dots, j_1 k_1}$ и является искомой статистической суммой.

Мы видим, что при фиксированных внешних индексах α и β статистическая сумма равна матричному элементу $T^{\alpha \beta}$ матрицы монодромии XXZ цепочки. В случае периодических граничных условий мы должны положить $\alpha = \beta$ и просуммировать полученный результат по значениям $\alpha = 1, 2$. Иными словами, следует взять след по пространству V_0 , т. е. мы приходим к трансфер-матрице

$$\mathcal{T} = \text{tr}_0 R_{0N} \dots R_{01}. \quad (2.12)$$

Очевидно, что \mathcal{T} является $2^N \times 2^N$ матрицей, действующей в пространстве $V_1 \otimes \dots \otimes V_N$. С точки зрения 6-вершинной модели она задает переход от вертикальных ребер, прилегающих снизу к одной горизонтальной линии, к ребрам, прилегающим к той же горизонтальной линии сверху. Поэтому естественно назвать \mathcal{T} трансфер-матрицей горизонтальной линии.

Для того чтобы вычислить статистическую сумму двух соседних горизонтальных линий, достаточно просто перемножить соответствующие матрицы \mathcal{T} (рис. 6.6). Действительно, в этом

α_2	k_N	k_{N-1}	k_{N-2}	— — — —	k_1	α_2
	ℓ_N	ℓ_{N-1}	ℓ_{N-2}	— — — —	ℓ_1	
α_1	j_N	j_{N-1}	j_{N-2}	— — — —	j_1	α_1

Рис. 6.6. Две трансфер-матрицы

случае различные конфигурации соответствуют различным значениям переменных ℓ_k на промежуточных вертикальных ребрах, т. е.

$$Z = \mathcal{T}^{j_N \ell_N, \dots, j_1 \ell_1} \mathcal{T}^{\ell_N k_N, \dots, \ell_1, k_1} = (\mathcal{T}\mathcal{T})^{j_N k_N, \dots, j_1 k_1}. \quad (2.13)$$

Продолжая этот процесс далее, мы получаем с учетом периодических граничных условий

$$Z_N = \text{tr}(\mathcal{T}^N), \quad (2.14)$$

где след берется по всему пространству $V_1 \otimes \dots \otimes V_N$.

Если мы приведем трансфер-матрицу \mathcal{T} к диагональному виду, то

$$Z_N = \text{tr}(\mathcal{T})^N = \sum_{k=1}^{2^N} \Lambda_k^N, \quad (2.15)$$

где Λ_k суть собственные значения трансфер-матрицы. Таким образом, задача о вычислении статистической суммы свелась к нахождению собственных значений трансфер-матрицы XXZ цепочки, а эта задача, в свою очередь, решается с помощью алгебраического анзаца Бете.

Итак, мы показали, что 6-вершинная модель теснейшим образом связана с моделью спиновой цепочки XXZ . В обеих моделях возникают одни и те же объекты: R -матрица, матрица монодромии и трансфер-матрица. Более того, задача о вычислении статистической суммы 6-вершинной модели с периодическими граничными условиями по сути совпадает с задачей исследования спектра гамильтониана XXZ цепочки. Мы отсылаем интересующегося читателя к книге [11], где эти вопросы освещены более подробно. Там же можно узнать о том, как решалась задача о статистической сумме 6-вершинной модели до возникновения квантового метода обратной задачи.

2.3. Неоднородная модель. Допустим, что параллельно плоскости решетки действует некоторое поле. Тогда энергия каждой вершины (и, соответственно, ее статистический вес) может зависеть не только от типа вершины, но и от ее места на решетке, т. е. $W = W_{ij}$, где i и j являются номерами горизонтальной и вертикальной линии. Такая модель называется неоднородной. В общем случае статистическая сумма неоднородной модели точно не вычисляется. Однако при специальной зависимости статистических весов от номера вершины это сделать можно.

Припишем каждой горизонтальной линии с номером i параметр u_i , а каждой вертикальной линии с номером j — параметр ξ_j , как показано на рисунке 6.7. Пусть матрица статистических весов в каждой вершине имеет вид

$$R(u_i, \xi_j) = \gamma \begin{pmatrix} f(u_i, \xi_j) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g(u_i, \xi_j) & 0 \\ 0 & g(u_i, \xi_j) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(u_i, \xi_j) \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

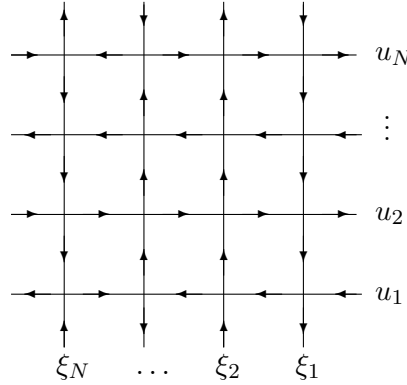


Рис. 6.7. Неоднородная 6-вершинная модель

т. е.

$$a_{ij} = \gamma f(u_i, \xi_j), \quad b_{ij} = \gamma, \quad c_{ij} = \gamma g(u_i, \xi_j). \quad (2.17)$$

Тогда статистическая сумма каждой горизонтальной линии является трансфер-матрицей неоднородной XXZ цепочки

$$\mathcal{T}(u_i) = \mathcal{T}(u_i | \bar{\xi}) = \text{tr}_0(R_{0N}(u_i, \xi_N) \dots R_{02}(u_i, \xi_2) R_{01}(u_i, \xi_1)), \quad (2.18)$$

а вся статистическая сумма дается выражением

$$Z_N(\bar{u} | \bar{\xi}) = \text{tr}(\mathcal{T}(u_N) \dots \mathcal{T}(u_2) \mathcal{T}(u_1)), \quad (2.19)$$

где след берется по всему пространству $V_1 \otimes \dots \otimes V_N$. Мы знаем, что трансфер-матрицы неоднородной XXZ цепочки коммутируют друг с другом при любых значениях аргументов u_k . Поэтому все они одновременно приводимы к диагональному виду, а значит, задача снова сводится к нахождению собственных значений трансфер-матрицы.

3. Граничные условия доменной стенки

В этом разделе мы рассмотрим еще один частный случай 6-вершинной модели, введенной в работе [12], который носит название модели с граничными условиями доменной стенки. Суть данных граничных условий очень проста: на боковых гранях все стрелки входят в решетку, а на верхней и нижней грани стрелки выходят из решетки (см. рис. 6.8 а)). Название “доменная стенка” происходит еще от одного возможного графического изображения переменной, находящейся на ребрах решетки. Мы можем сопоставить двум ее значениям стрелку, перпендикулярные плоскости решетки. Например, значению 1 поставим в соответствие стрелку вверх (черный кружок на рис. 6.9), а значению 2 — стрелку вниз (белый кружок на рис. 6.9). Если мы теперь посмотрим на решетку под некоторым углом, то на нижней и правой грани все стрелки будут направлены вниз, а на левой и верхней грани все стрелки будут направлены вверх (см. рис. 6.10).

Таким образом, решетка разделяет две области (домена): в одной из них все “спиные” направлены вниз, в другой — вверх. Сама решетка играет роль доменной стенки.

В дальнейшем, чтобы избежать слишком длинной терминологии, мы будем использовать сокращение ССДС (статистическая сумма доменной стенки). Эта статистическая сумма играет исключительно важную роль при вычислениях скалярных произведений векторов Бете. Как мы увидим ниже, перестановочные соотношения операторов, входящих в матрицу монодромии, также записываются с помощью ССДС.

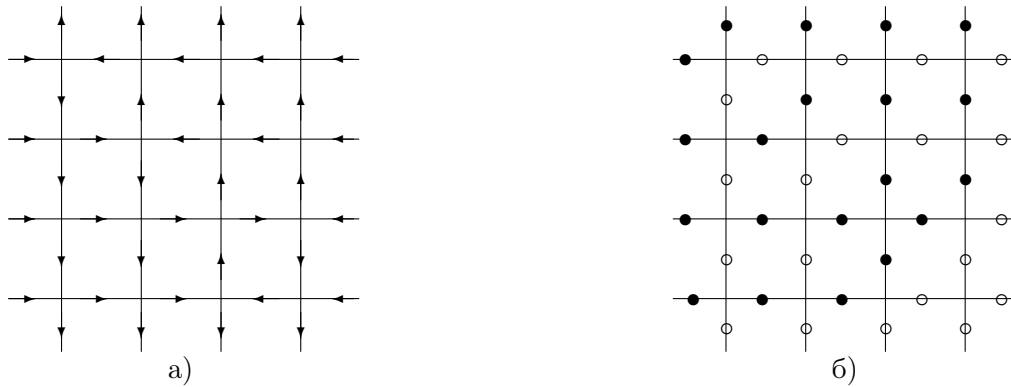


Рис. 6.8. 6-вершинная модель с граничными условиями доменной стенки. На рисунке а) переменная, живущая на ребрах решетки, показана стрелками, в соответствии со стандартными обозначениям. На рисунке б) той же самой переменной сопоставлены стрелки, перпендикулярные плоскости решетки: ● — стрелка вверх (т. е. переменная имеет значение 1); ○ — стрелка вниз (т. е. переменная имеет значение 2)



Рис. 6.9. отождествление двух вершин в стандартной и новой параметризации

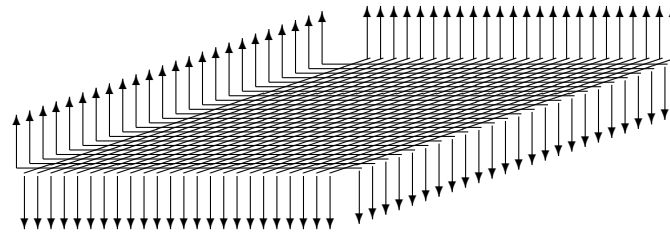


Рис. 6.10. Доменная стенка

Рассмотрим неоднородную модель (см. рис. 6.11 б)). Будем считать, что матрица статистических весов вершины, расположенной на пересечении i -й и j -й горизонтальных линий, задана формулой (2.16) и действует в тензорном произведении пространств $V_i \otimes V_j$ (см. рис. 6.11 б)). Положим для простоты $\gamma = 1$ в формуле (2.16) (т. е. вес $b = 1$). Статистическую сумму такой модели обозначим символом $K_N(\bar{u}|\bar{\xi})$.

Как мы уже видели в предыдущем разделе, произведение R -матриц вдоль одной горизонтальной линии с номером i дает матрицу монодромии неоднородной XXZ модели:

$$T(u_i|\bar{\xi}) = R_{iN}(u_i, \xi_N) \cdots R_{i2}(u_i, \xi_2) R_{i1}(u_i, \xi_1). \tag{3.1}$$

В случае периодических граничных условий нам нужно было взять след матрицы монодромии, т. е. $A(u_i) + D(u_i)$. Теперь, в силу граничных условий доменной стенки (см. рис. 6.11 а)), мы должны просто взять матричный элемент $T^{12}(u_i)$, т. е. $B(u_i)$. Для вычисления статистической суммы необходимо перемножить вклады от каждой горизонтальной линии, т. е. взять произведение $B(u_N) \cdots B(u_1)$. В силу граничных условий на верхней и нижней гранях решетки, ССДС

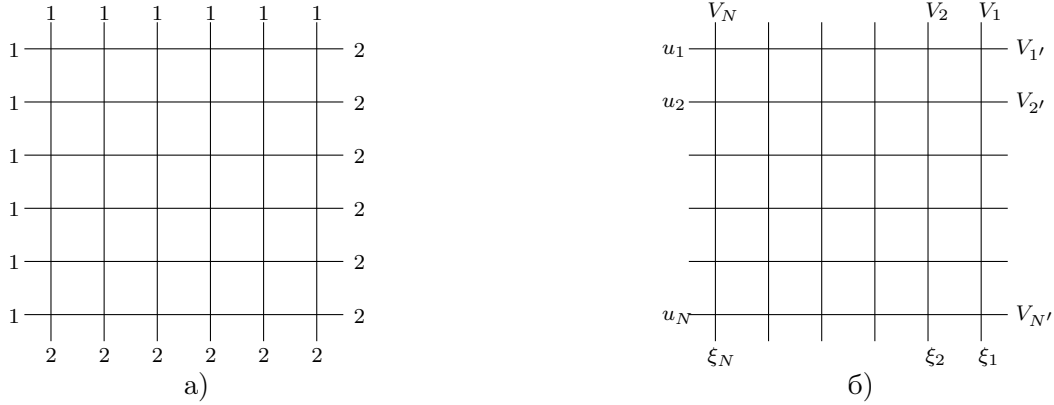


Рис. 6.11. 6-вершинная модель: а) граничные условия доменной стенки; б) параметры неоднородностей и пространства, в которых действуют R -матрицы

равна матричному элементу получившегося произведения

$$K_N(\bar{u}|\bar{\xi}) = (B(u_N) \cdots B(u_1))^{21, \dots, 21}. \quad (3.2)$$

Из представления (3.2) немедленно следует, что ССДС K_N является симметричной функцией параметров \bar{u} , поскольку $[B(u_j), B(u_k)] = 0$. Возникает предположение, что K_N также является симметричной функцией параметров $\bar{\xi}$. Это действительно так, и в этом легко убедиться. Для этого мы вычислим K_N , взяв произведение R -матриц в ином порядке. Уравнение Янга–Бакстера гарантирует, что результат при этом не изменится.

Определим “вертикальную” матрицу монодромии как произведение R -матриц вдоль одной вертикальной линии

$$\tilde{T}(\xi_j|\bar{u}) = R_{N'j}(u_{N'}, \xi_j) \cdots R_{2'j}(u_{2'}, \xi_j) R_{1'j}(u_{1'}, \xi_j) = \begin{pmatrix} \tilde{A}(\xi_j) & \tilde{B}(\xi_j) \\ \tilde{C}(\xi_j) & \tilde{D}(\xi_j) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

В силу граничных условий на верхней и нижней гранях вклад от одной вертикальной линии в статистическую сумму равен $\tilde{T}_{21}(\xi_j) = \tilde{C}(\xi_j)$. Поэтому полностью аналогично формуле (3.2) мы получаем еще одно представление для ССДС

$$K_N(\bar{u}|\bar{\xi}) = (\tilde{C}(\xi_N) \cdots \tilde{C}(\xi_1))^{12, \dots, 12}. \quad (3.4)$$

Мы предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что вертикальная матрица монодромии удовлетворяет RTT -соотношению¹

$$R_{12}(\xi_1, \xi_2) \tilde{T}_1(\xi_1) \tilde{T}_2(\xi_2) = \tilde{T}_2(\xi_2) \tilde{T}_1(\xi_1) R_{12}(\xi_1, \xi_2). \quad (3.5)$$

Как мы уже знаем, из соотношения (3.5) следует $[\tilde{C}(\xi_1), \tilde{C}(\xi_2)] = 0$, а значит, статистическая сумма K_N является симметричной функцией параметров $\bar{\xi}$.

4. Свойства статистической суммы

В этом разделе мы докажем некоторые свойства ССДС, которые позволяют вычислить K_N , зная K_{N-1} .

¹При доказательстве этого утверждения ключевым по-прежнему является тот факт, что вертикальная матрица монодромии является произведением R -матриц, которые удовлетворяют уравнению Янга–Бакстера.

4.1. Свойство убывания. Рассмотрим репараметризацию $q = e^\eta$, $x_j = e^{2u_j}$ и $y_j = e^{2\xi_j}$, $j = 1, \dots, N$. Дабы не вводить новых обозначений, условимся, что запись $f(x_j, y_k)$ и $g(x_j, y_k)$ означает, что в функции $f(u_j, \xi_k)$ и $g(u_j, \xi_k)$ следует подставить u_j , ξ_k и η , выраженные через x_j , y_k и q . Тогда в новых переменных имеем

$$\begin{aligned} f(x_j, y_k) &= \frac{x_j q - y_k q^{-1}}{x_j - y_k}, \\ g(x_j, y_k) &= \frac{(q - q^{-1})\sqrt{x_j y_k}}{x_j - y_k}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Соответственно статистическая сумма становится функцией переменных $\{x\}$ и $\{y\}$: $K_N = K_N(\bar{x}|\bar{y})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. ССДС представима в виде

$$K_N(\bar{x}|\bar{y}) = \prod_{j=1}^N \sqrt{x_j y_j} \cdot \tilde{K}_N(\bar{x}|\bar{y}), \quad (4.2)$$

где \tilde{K}_N является рациональной функцией переменных $\{x\}$ и $\{y\}$. При этом функция \tilde{K}_N стремится к нулю, если один из ее аргументов стремится к бесконечности, а остальные фиксированы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $K_N(\bar{x}|\bar{y})$ как функцию от x_1 . Переменная x_1 входит только в статистические веса тех вершин, которые находятся на верхней горизонтальной линии (см. рис. 6.12). В силу граничных условий на правом и левом концах, при движении вдоль этой линии

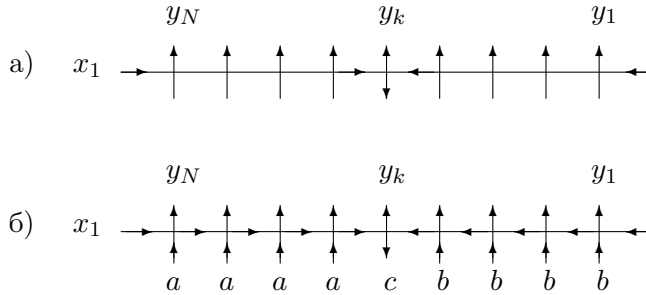


Рис. 6.12. Верхняя граница решетки. Если задана вершина, в которой стрелка меняет направление (рис. а)), то все остальные вершины фиксируются однозначно (рис. б))

стрелка, проходя через вершины, обязана хотя бы один раз поменять направление. Нетрудно сообразить, что такое изменение направления должно случиться ровно один раз, поскольку граничное условие на верхней грани запрещает вершины, у которых на обеих вертикальных линиях находятся входящие стрелки. Изменение направления стрелки возможно только в вершине типа c , статистический вес которой равен $g(x_1, y_k)$. Мы приходим к выводу, что на верхней линии есть ровно одна вершина типа c , а все остальные являются либо вершинами типа a , либо b . Легко видеть, что все вершины слева от вершины типа c имеют тип a , а все вершины справа имеют тип b . Таким образом, при фиксированном номере k вершины, в которой стрелка меняет направление, статистический вес верхней горизонтальной линии имеет вид

$$Z_1 = \prod_{\ell=1}^{k-1} f(x_1, y_\ell) \cdot \frac{(q - q^{-1})\sqrt{x_1 y_k}}{x_1 - y_k}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.3)$$

Следовательно, вся статистическая сумма может быть записана в виде

$$K_N = \sqrt{x_1} \sum_{k=1}^N \frac{(q - q^{-1})^{k-1}}{x_1 - y_k} \prod_{\ell=1}^{k-1} f(x_1, y_\ell) \cdot W_k, \quad (4.4)$$

где W_k не зависит от x_1 . Мы видим, что K_N , как функция от x_1 , представима в виде произведения $\sqrt{x_1}$ и некоторой рациональной функции от x_1 , которая стремится к нулю при $x_1 \rightarrow \infty$. Но в силу симметрии K_N по переменным \bar{x} , точно такое же представление существует и для любого другого x_j . Отсюда следует, что

$$K_N = \prod_{j=1}^N \sqrt{x_j} \cdot \tilde{K}_N, \quad (4.5)$$

где \tilde{K}_N — некоторая рациональная функция от любого x_j , стремящаяся к нулю при $x_j \rightarrow \infty$ и фиксированных остальных переменных.

Совершенно аналогично рассматривается зависимость статистической суммы от переменных \bar{y} , и мы получаем доказательство утверждения.

4.2. Полюсы статистической суммы. Итак, мы явно выделили зависимость функции $K_N(\bar{x}|\bar{y})$ от радикалов $\sqrt{x_j}$ и $\sqrt{y_j}$. Оставшаяся часть является рациональной функцией всех переменных. Очевидно, что полюсы этой функции находятся в точках $x_j = y_k$, $j, k = 1, \dots, N$. Исследуем вычеты этой функции в полюсах. В силу симметрии достаточно рассмотреть вычет при $x_N = y_N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. При $x_N \rightarrow y_N$ сингулярная часть функции K_N сводится к K_{N-1}

$$K_N(\bar{x}|\bar{y}) \Big|_{x_N \rightarrow y_N} = g(x_N, y_N) f(\bar{x}_N, x_N) f(y_N, \bar{y}_N) K_{N-1}(\bar{x}_N|\bar{y}_N) + \text{Reg}, \quad (4.6)$$

где через Reg обозначены слагаемые, которые остаются регулярными при $x_N = y_N$, и мы напоминаем, что $\bar{x}_N = \bar{x} \setminus x_N$ и $\bar{y}_N = \bar{y} \setminus y_N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сингулярность при $x_N \rightarrow y_N$ возможна тогда и только тогда, когда крайняя юго-западная вершина имеет тип c . Тогда ей соответствует вес $g(x_N, y_N)$. Но как только зафиксирован тип крайней юго-западной вершины, сразу же однозначно определяется тип вершин на южной и западных гранях. Действительно, у соседней справа вершины две стрелки выходящие. Значит, на оставшихся ребрах должны быть входящие стрелки, и эта вершина имеет

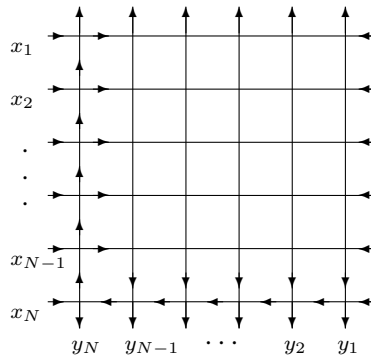


Рис. 6.13. Сведение K_N к K_{N-1}

тип a . Легко видеть, что по тому же принципу и все остальные вершины на южной грани имеют тип a (см. рис. 6.13), а их общий вклад в статистическую сумму равен

$$f(x_N, \bar{y}_N) = f(y_N, \bar{y}_N) \quad \text{при} \quad x_N = y_N. \quad (4.7)$$

Аналогично, все вершины на западной грани тоже имеют тип a (см. рис. 6.13), а их общий вклад равен

$$f(y_N, \bar{x}_N) = f(x_N, \bar{x}_N) \quad \text{при} \quad x_N = y_N. \quad (4.8)$$

На оставшейся подрешетке по-прежнему выполнены граничные условия доменной стенки, поэтому вклад этой подрешетки есть просто $K_{N-1}(\bar{x}_N | \bar{y}_N)$. Перемножая статистические веса $g(x_N, y_N)$, (4.8) и (4.7), мы приходим к (4.6).

4.3. Явная формула для ССДС. Перечисленные выше свойства вместе с начальным условием

$$K_1(x|y) = g(x, y) \quad (4.9)$$

позволяют однозначно строить статистическую сумму $K_N(\bar{x}|\bar{y})$ рекуррентным образом. Допустим, что нам известно явное выражение для $K_n(\bar{x}|\bar{y})$ при некотором n (при $n = 1$ это действительно так). Рассмотрим $K_{n+1}(\bar{x}|\bar{y})$ как функцию x_{n+1} . С точностью до множителя $\sqrt{x_{n+1}}$ это рациональная функция, убывающая при $x_{n+1} \rightarrow \infty$. Поэтому она представима в виде отношения двух полиномов от x_{n+1} , причем степень полинома в числителе должна быть меньше степени полинома, находящегося в знаменателе. Последний же нам известен, поскольку его нули совпадают с полюсами K_{n+1} . То есть мы имеем

$$K_{n+1}(x_{n+1}) = \sqrt{x_{n+1}} \frac{P_n(x_{n+1})}{\prod_{k=1}^{n+1} (x_{n+1} - y_k)}, \quad (4.10)$$

где степень полинома $P_n(x_{n+1})$ не превосходит n . Благодаря формуле (4.6) мы знаем значения этого полинома в $n+1$ точке y_1, \dots, y_{n+1} . Следовательно, мы можем однозначно восстановить этот полином по интерполяционной формуле Лагранжа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Явное выражение для ССДС дается формулой [13]

$$K_n(\bar{x}|\bar{y}) = \left(\prod_{n \geq \ell > m \geq 1} g(x_\ell, x_m) g(y_m, y_\ell) \right) \frac{f(\bar{x}, \bar{y})}{g(\bar{x}, \bar{y})} \det_n \left(\frac{g^2(x_j, y_k)}{f(x_j, y_k)} \right). \quad (4.11)$$

Приведем также формулу (4.11) в более развернутом виде, сначала в переменных \bar{x} и \bar{y}

$$K_N(\bar{x}|\bar{y}) = \prod_{\ell=1}^N \sqrt{x_\ell y_\ell} \frac{\prod_{\ell, m=1}^N (q x_\ell - y_m q^{-1})}{\prod_{N \geq \ell > m \geq 1} (x_\ell - x_m)(y_m - y_\ell)} \det_N \left(\frac{q - q^{-1}}{(x_j - y_k)(q x_j - y_k q^{-1})} \right), \quad (4.12)$$

и затем в переменных \bar{u} и $\bar{\xi}$

$$K_N(\bar{u}|\bar{\xi}) = \frac{\prod_{\ell, m=1}^N \text{sh}(u_\ell - \xi_m + \eta)}{\prod_{N \geq \ell > m \geq 1} \text{sh}(u_\ell - u_m) \text{sh}(\xi_m - \xi_\ell)} \det_N \left(\frac{\text{sh} \eta}{\text{sh}(u_j - \xi_k) \text{sh}(u_j - \xi_k + \eta)} \right). \quad (4.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фактически нам нужно проверить, что функция, заданная равенством (4.12), удовлетворяет всем свойствам СДСС (симметрия, убывание, вычеты в полюсах, начальное условие). Очевидно, что с точностью до произведения радикалов $\sqrt{x_\ell y_\ell}$ функция (4.12) является рациональной функцией, которая симметрична по \bar{x} и симметрична по \bar{y} . При $x_N \rightarrow \infty$

множитель перед детерминантом ведет себя как x_N . В то же время все элементы последней строки детерминанта ведут себя как x_N^{-2} , а значит, и весь детерминант ведет себя как x_N^{-2} . В итоге рациональная часть функции (4.12) ведет себя как x_N^{-1} .

Проверим свойство вычетов. Пусть $x_N \rightarrow y_N$. Тогда матричный элемент $(q - q^{-1})/(x_N - y_N)(qx_N - y_Nq^{-1})$ становится сингулярным, и весь детерминант сводится к произведению этого матричного элемента на соответствующий минор

$$\det_N \left(\frac{q - q^{-1}}{(x_j - y_k)(qx_j - y_kq^{-1})} \right) \Big|_{x_N \rightarrow y_N} = \frac{1}{x_N(x_N - y_N)} \det_{N-1} \left(\frac{q - q^{-1}}{(x_j - y_k)(qx_j - y_kq^{-1})} \right) + \text{Reg}. \quad (4.14)$$

Полагая $x_N = y_N$ в множителе перед детерминантом, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\prod_{\ell=1}^N \sqrt{x_\ell y_\ell} \prod_{\ell,m=1}^N (qx_\ell - y_mq^{-1})}{\prod_{N \geq \ell > m \geq 1} (x_\ell - x_m)(y_m - y_\ell)} \Big|_{x_N \rightarrow y_N} &= \prod_{\ell=1}^{N-1} \frac{(qx_N - y_\ellq^{-1})(qx_\ell - y_Nq^{-1})}{(x_N - x_\ell)(y_\ell - y_N)} \Big|_{x_N \rightarrow y_N} \\ &\times \sqrt{x_N y_N} (qx_N - y_Nq^{-1}) \Big|_{x_N \rightarrow y_N} \frac{\prod_{\ell=1}^{N-1} \sqrt{x_\ell y_\ell} \prod_{\ell,m=1}^{N-1} (qx_\ell - y_mq^{-1})}{\prod_{N-1 \geq \ell > m \geq 1} (x_\ell - x_m)(y_m - y_\ell)} \\ &= x_N (q - q^{-1}) \prod_{\ell=1}^{N-1} f(x_\ell, x_N) f(y_N, y_\ell) \frac{\prod_{\ell=1}^{N-1} \sqrt{x_\ell y_\ell} \prod_{\ell,m=1}^{N-1} (qx_\ell - y_mq^{-1})}{\prod_{N-1 \geq \ell > m \geq 1} (x_\ell - x_m)(y_m - y_\ell)}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Комбинируя (4.14) и (4.15), мы немедленно приходим к формуле (4.6).

Остается проверить, что при $N = 1$ формула (4.12) дает $g(x, y)$, и, таким образом, представление (4.12) обладает всеми необходимыми свойствами ССДС. Как мы уже убедились, эти условия фиксируют ССДС однозначно.

Лекция 7. Матрицы чередующихся знаков

В этой лекции мы действительно делаем шаг в сторону от основной темы. Речь пойдет о *матрицах чередующихся знаков*. Эти матрицы возникают в различных задачах о разбиении плоскости и при обобщении понятия детерминанта. Подробнее с этой темой можно ознакомиться в монографии [14]. На первый взгляд, тема матриц чередующихся знаков совершенно не связана с предыдущим материалом. Мы увидим, однако, что это совсем не так. Данный пример хорошо иллюстрирует тот факт, что методы, рассмотренные нами выше, могут применяться в самых разных задачах, далеких от статистической физики и квантовой механики. Кроме того, некоторые формулы, полученные в этой лекции, пригодятся нам при вычислении корреляционных функций в лекции 15.

1. Определение матриц чередующихся знаков

Матрицы чередующихся знаков – это квадратные матрицы, чьи матричные элементы принимают три значения: 0, 1 или -1 . При этом расстановка матричных элементов должна удовлетворять условиям

- при движении вдоль строки (или вдоль столбца) ненулевые элементы чередуют знаки;
- сумма всех элементов в каждой строке и в каждом столбце равна 1.

Как видим, сформулированные правила одинаковы для строк и для столбцов, поэтому в дальнейшем мы чаще будем говорить о строках. Несложно понять, как выглядит произвольная строка матрицы чередующихся знаков размера $N \times N$. Напишем последовательность вида $+1, -1, +1, -1, \dots, +1$. Первый и последний элемент последовательности должны равняться $+1$, так как только в этом случае сумма всех элементов равняется 1. Количество элементов в этой последовательности должно быть меньше или равно N . После этого мы произвольным образом вставляем между $+1$ и -1 нули так, чтобы общее число всех элементов стало равным N :

$$\underbrace{0, 0, +1, -1, 0, +1, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, \dots, +1}_{N}. \quad (1.1)$$

Именно так выглядит произвольная строка матрицы чередующихся знаков. Точно такой же вид должен иметь и каждый столбец. В качестве иллюстрации приведем конкретный пример матрицы 4×4 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Несложно установить несколько свойств матриц чередующихся знаков. Например, в каждой строке и каждом столбце обязан присутствовать по крайней мере один ненулевой элемент. Это свойство практически очевидно. Менее очевидным является другое свойство: в первой строке матрицы чередующихся знаков есть ровно один ненулевой элемент равный 1. Действительно, допустим противное. Тогда в первой строке найдется по крайней мере один ненулевой элемент равный -1 . Но тогда существует столбец, который начинается с -1 . Отсюда следует, что сумма всех элементов в этом столбце либо равна 0 (если число ненулевых элементов четное), либо

равна -1 (если число ненулевых элементов нечетное). В любом случае, она не может быть равна 1 , что противоречит второму условию.

Легко сообразить, что таким же свойством обладает последняя строка, а также первый и последние столбцы.

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что во второй строке матрицы чередующихся знаков может быть не более одной -1 .

Возникает вопрос, сколько существует различных матриц чередующихся знаков заданного размера $N \times N$? Обозначим это число через \mathcal{A}_N . Очевидно, что существует всего одна такая матрица размера 1×1 , т.е. $\mathcal{A}_1 = 1$. Легко также найти все матрицы чередующихся знаков размера 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Их всего две, поэтому $\mathcal{A}_2 = 2$. В этих матриц нет элементов равных -1 . Для $N = 3$ матрицы чередующихся знаков имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

В данном случае $\mathcal{A}_3 = 7$, и появилась одна матрица, содержащая -1 . В дальнейшем с ростом N число матриц чередующихся знаков очень быстро возрастает: $\mathcal{A}_4 = 42$, $\mathcal{A}_5 = 429$, $\mathcal{A}_6 = 7436$ и т.д. В качестве гипотезы явная формула для чисел \mathcal{A}_N впервые была дана в работе [15]

$$\mathcal{A}_N = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{(3k+1)!}{(N+k)!}. \quad (1.5)$$

Первое очень громоздкое доказательство формулы (1.5) было дано в работе [16]. Мы получим формулу (1.5), воспользовавшись методом, предложенным в работе [17]. Этот метод основан на следующем утверждении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Существует взаимнооднозначное соответствие между матрицами чередующихся знаков и конфигурациями стрелок в 6-вершинной модели с граничным условием доменной стенки.*

Рассмотрим 6-вершинную модель и присвоим каждому типу вершин свой “ярлык”, как показано на рис. 7.1. Мы уже условились о том, что все вершины подразделяются на три типа — a ,

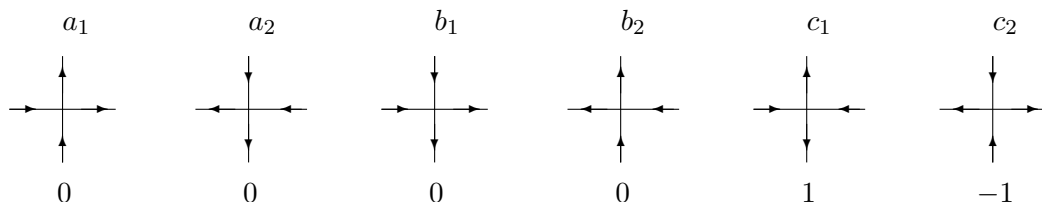


Рис. 7.1. Шесть типов вершин и их ярлыки

b и c . При этом каждому типу соответствует две вершины. Удобно различать эти две вершины, например вершина типа a_1 и a_2 (см. рис. 7.1). При этом обе вершины имеют один и тот же статистический вес a .

Поставим в соответствие число 0 вершинам типа a_k и b_k , вершинам типа c_1 поставим в соответствие число 1 , а вершинам типа c_2 — число -1 (см. рис. 7.1). Важно отметить, что

введенные числа не имеют никакого отношения к статистическим весам. Просто каждая вершина теперь снабжается дополнительным ярлыком.

Важно подчеркнуть одно существенное различие между вершинами типов a_k и b_k ($k = 1, 2$) с одной стороны, и вершинами типа c_1 и c_2 с другой. Проходя через вершины типов a_k и b_k стрелка не меняет направления. Именно поэтому всем этим вершинам присвоен один и тот же, нулевой ярлык. Напротив, в вершинах типа c_1 и c_2 стрелка меняет направление. Как мы увидим чуть ниже, это отличие играет принципиальную роль.

Ясно, что если мы зададимся какой-то конфигурацией стрелок 6-вершинной модели с граничным условием доменной стенки и на месте каждой вершины напишем ее ярлык, то мы получим квадратную матрицу, чьи матричные элементы равны 0, 1 или -1 . Проверим, что выполнены правила расстановки этих матричных элементов. Возьмем произвольную горизонтальную линию и начнем продвигаться по ней слева направо. В силу граничных условий на левом конце этой линии мы имеем входящую стрелку. Пусть стрелка прошла несколько вершин, не изменив направления (на рис. 7.2 — пройдено две вершины). Такие вершины имеют тип a_1 или тип b_1 . Следовательно, им соответствует число 0, независимо от того, как направлены стрелки на вертикальных ребрах. Наконец мы доходим до вершины, где стрелка меняет направление (третья

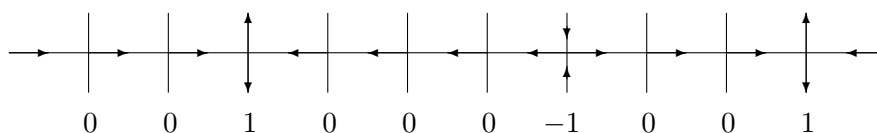


Рис. 7.2. Горизонтальная линия 6-вершинной модели с строка в матрице чередующихся знаков

вершина на рис. 7.2). По крайней мере одна такая вершина должна встретиться в силу граничного условия на правой грани решетки. Эта вершина имеет тип c_1 , и ей соответствует число 1. Далее стрелка опять несколько раз не меняет направления, и этим вершинам снова соответствуют нули. В принципе, стрелка может дойти до правой грани, так и не изменив направления, однако если нам встретится вершина, где произошло изменение направления стрелки, то эта вершина будет иметь тип c_2 . Ясно, что в дальнейшем вершины типа c_1 и c_2 будут чередоваться, а между ними может находиться произвольное количество вершин типов a_k и b_k . В силу граничных условий последняя вершина, в которой происходит изменение направления стрелки, имеет тип c_1 . Таким образом, в получившейся строке матрицы ненулевые элементы чередуют знак. При этом первый и последний из них равны 1, а значит, сумма всех элементов в строке равна 1. Следовательно, условия расположения ненулевых элементов в произвольной строке матрицы чередующихся знаков выполнены. Аналогично проверяется, что эти условия выполнены и для столбцов. Отсюда следует, что всякой конфигурации стрелок в 6-вершинной модели с граничным условием доменной стенки соответствует некоторая матрица чередующихся знаков.

Докажем теперь обратное утверждение, а именно, построим по заданной матрице чередующихся знаков конфигурацию стрелок 6-вершинной модели с граничным условием доменной стенки. На первый взгляд кажется, что это можно сделать разными способами, поскольку числу 0 соответствует четыре различных вершины. Однако если начать построение конфигурации стрелок с верхней грани решетки, то мы увидим, что конфигурация строится единственным образом. На рис. 7.3 показаны первые две строки матрицы чередующихся знаков размера 5×5 . Нарисуем квадратную решетку 5×5 и зададим граничные условия на левой и верхней гранях. Пусть в первой строке матрицы сначала находятся несколько нулей (на рис. 7.3 — три нуля). Значит, им соответствуют вершины, в которых стрелка не меняет направления. Но у крайней северо-западной вершины направления стрелок на двух ребрах уже заданы в силу граничных

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}$$

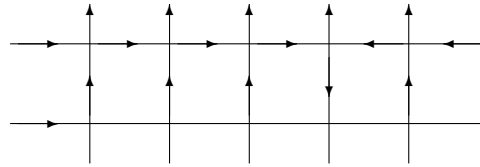


Рис. 7.3. Восстановление верхней горизонтальной линии 6-вершинной модели по первой строке в матрицы чередующихся знаков

условий. Тогда направления стрелок на двух оставшихся ребрах определяются однозначно (это вершина типа a_1). Переходя ко второй вершине, мы видим, что и в ней теперь направления стрелок на двух ребрах уже заданы, а значит, и эта вершина имеет тип a_1 . Ясно, что далее этот процесс продолжится: всякий раз, переходя к новой вершине, мы будем иметь заданные направления стрелок на двух ее ребрах. Таким образом, мы будем получать вершины типа a_1 до тех пор, пока мы не дойдем до вершины, соответствующей числу 1. Здесь уже нет никакого произвола, так как числу 1 соответствует вершина типа c_1 . После этого опять следуют нули (поскольку в первой строке матрицы чередующихся знаков есть всего один ненулевой элемент), и понятно, что все последующие вершины будут иметь тип b_2 . При этом мы автоматически получим правильное граничное условие на правой границе.

Построив конфигурацию стрелок на верхней горизонтальной линии решетки, мы можем перейти к построению стрелок на второй линии. Понятно, что описанный выше процесс полностью повторяется, так как у всех вершин уже задано направление стрелок на верхнем ребре, а у крайней левой вершины к тому же еще задано направление стрелки слева. Мы предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что на второй линии первая вершина имеет тип a_1 , вторая и пятая — тип c_1 , третья — тип b_2 , и четвертая — тип c_2 . Поскольку в любой строке матрицы чередующихся знаков последний ненулевой элемент равен 1, то мы приходим к выводу, что последняя вершина, в которой стрелка меняет направление, имеет тип c_1 . После этого стрелка доходит до правой грани решетки, не меняя направления, а значит, граничное условие на правой грани автоматически оказывается правильным.

Действуя таким образом, мы однозначно восстанавливаем все стрелки на ребрах решетки по заданной матрице чередующихся знаков. Нам остается убедиться лишь в том, что граничное условие на нижней грани получилось правильным. Это почти очевидно. Действительно, в каждой вершине решетки число входящих стрелок равно числу выходящих. Следовательно, во всю решетку должно входить столько же стрелок, сколько и выходить из нее. На боковых гранях мы уже имеем $2N$ входящих стрелок. На верхней грани находятся N выходящих стрелок. Значит, на нижней грани все стрелки должны быть выходящими.

Доказанное взаимнооднозначное соответствие позволяет нам сделать следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Количество матриц чередующихся знаков размера $N \times N$ равно числу конфигураций стрелок в 6-вершинной модели на квадратной решетке $N \times N$ с граничным условием доменной стенки.*

Данное утверждение можно сформулировать иначе.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Количество матриц чередующихся знаков размера $N \times N$ равно статистической сумме 6-вершинной модели на квадратной решетке $N \times N$ с граничным условием доменной стенки при условии, что все статистические веса равны единице.*

Действительно, если статистические веса всех вершин равны 1 то статистическая сумма просто равняется количеству всевозможных состояний системы.

2. Вычисление статистической суммы

Мы уже знаем ответ для статистической суммы в случае неоднородной модели. Приведем его в явном виде

$$K_N(\bar{u}|\bar{\xi}) = \frac{\prod_{j,k=1}^N \text{sh}(u_j - \xi_k + \eta)}{\prod_{j < k}^N \text{sh}(u_j - u_k) \text{sh}(\xi_k - \xi_j)} \cdot \det_N \left(\frac{\text{sh } \eta}{\text{sh}(u_j - \xi_k) \text{sh}(u_j - \xi_k + \eta)} \right). \quad (2.1)$$

При этом вершина, лежащая на пересечении горизонтальной линии с номером j и вертикальной линии с номером k , имеет статистические веса

$$a = \frac{\text{sh}(u_j - \xi_k + \eta)}{\text{sh}(u_j - \xi_k)}, \quad b = 1, \quad c = \frac{\text{sh } \eta}{\text{sh}(u_j - \xi_k)}. \quad (2.2)$$

Можно ли добиться того, чтобы все статистические веса стали бы равны 1? Очевидно, что, во-первых, для этого следует положить $u_j = u$ для всех $j = 1, \dots, N$ и $\xi_k = \xi$ для всех $k = 1, \dots, N$. После этого, полагая $a = c = 1$ в равенствах (2.2), мы без труда найдем $u - \xi = \pm i\pi/3$ и $\eta = \pm i\pi/3$. Без ограничения общности мы можем выбрать какое-то конкретное решение, например со знаком плюс.

К сожалению, просто положить в формуле (2.1), например, $u_j = i\pi/3$, $\xi_k = 0$ и $\eta = i\pi/3$ мы не можем из-за возникающей неопределенности. Действительно, при таком выборе все $\text{sh}(u_j - u_k)$ и $\text{sh}(\xi_k - \xi_j)$ в знаменателе обращаются в нуль, а в детерминанте все строки и столбцы совпадают. Поэтому мы положим в формуле (2.1) $\eta = i\pi/3$, $u_j = v_j + i\pi/3$ и рассмотрим предел, в котором $v_j \rightarrow 0$ и $\xi_j \rightarrow 0$ для всех $j = 1, \dots, N$. Как мы уже знаем, в этом пределе статистическая сумма K_N дает количество матриц чередующихся знаков размера $N \times N$, и мы получаем

$$\mathcal{A}_N = \frac{(-1)^{\frac{N^2-N}{2}} 3^{\frac{N^2+N}{2}}}{2^{N^2-N}} \lim_{\substack{v_1, \dots, v_N \rightarrow 0 \\ \xi_1, \dots, \xi_N \rightarrow 0}} \prod_{j < k}^N \left(\text{sh}(v_j - v_k) \text{sh}(\xi_k - \xi_j) \right)^{-1} \cdot \det_N \left(\frac{\text{sh}(v_j - \xi_k)}{\text{sh } 3(v_j - \xi_k)} \right). \quad (2.3)$$

Мы воспользовались тем, что $\text{sh } \frac{i\pi}{3} = \frac{i\sqrt{3}}{2}$, и равенством $4 \text{sh } x \text{sh}(x - \frac{i\pi}{3}) \text{sh}(x + \frac{i\pi}{3}) = \text{sh } 3x$.

Для вычисления предела мы могли бы воспользоваться следующим утверждением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Для любой достаточно гладкой функции двух переменных $\Phi(v, \xi)$*

$$\lim_{\substack{v_1, \dots, v_N \rightarrow v \\ \xi_1, \dots, \xi_N \rightarrow \xi}} \frac{\det_N \Phi(v_j, \xi_k)}{\prod_{j < k}^N \text{sh}(v_j - v_k) \text{sh}(\xi_j - \xi_k)} = \prod_{k=1}^{N-1} \left(\frac{1}{k!} \right)^2 \cdot \det_N \left(\frac{\partial^{j+k-2} \Phi(v, \xi)}{\partial v^{j-1} \partial \xi^{k-1}} \right). \quad (2.4)$$

При этом слова “достаточно гладкая” означают существование всех частных производных в правой части равенства (2.4).

Таким образом, вычисляя производные от функции $\text{sh}(v - \xi) / \text{sh } 3(v - \xi)$ в точке $v = 0$, $\xi = 0$, мы получили бы детерминант матрицы, состоящей уже из конкретных чисел, и могли бы попытаться вычислить этот числовой детерминант. Мы, однако, воспользуемся другим методом. Поэтому мы предлагаем читателям самостоятельно доказать предложение 2.1 или хотя бы проверить его справедливость при небольших N (такая проверка подскажет идею доказательства).

Мы же воспользуемся лишь тем, что предел в формуле (2.4) не зависит от того, как именно переменные v_j и ξ_k стремятся к своим предельным значениям. Поэтому мы в праве выбрать вполне конкретный способ стремления — результат от этого не зависит. В частности, мы можем положить в (2.3) $v_j = j\epsilon$, $\xi_k = (1 - k)\epsilon$ и рассмотреть предел $\epsilon \rightarrow 0$. Получаем

$$\mathcal{A}_N = \frac{(-1)^{\frac{N^2-N}{2}} 3^{\frac{N^2+N}{2}}}{2^{N^2-N}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \prod_{j < k}^N \left(\text{sh } \epsilon(j - k) \right)^{-2} \cdot \det_N \left(\frac{\text{sh } \epsilon(j + k - 1)}{\text{sh } 3\epsilon(j + k - 1)} \right). \quad (2.5)$$

Оказывается, что детерминант, возникший в правой части равенства (2.5), вычисляется явно. Правда, для этого нам придется доказать дополнительную лемму.

ЛЕММА 2.1 (детерминант Коши). *Для любых x_1, \dots, x_N и y_1, \dots, y_N*

$$\det_N \left(\frac{1}{x_j - y_k} \right) = \frac{\prod_{j < k}^N (x_j - x_k)(y_k - y_j)}{\prod_{j, k=1}^N (x_j - y_k)}. \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует несколько достаточно простых способов доказать эту формулу. Можно, например, воспользоваться индукцией по N . Можно также доказать (2.6) практически без вычислений. Левая часть является рациональной функцией от переменных x_1, \dots, x_N и y_1, \dots, y_N , имеющей полюсы в точках $x_j = y_k$, $j, k = 1, \dots, N$. Если $x_j = x_k$ (или $y_j = y_k$), то в детерминанте совпадают две строки (или два столбца), поэтому в этих точках детерминант имеет нули. Если некоторое x_ℓ стремится к бесконечности, а остальные переменные фиксированы, то весь детерминант стремится к нулю, так как в матрице вся строка с номером ℓ стремится к нулю. Аналогичное свойство справедливо, если некоторое $y_\ell \rightarrow \infty$. Перечисленных свойств достаточно, чтобы записать детерминант в виде

$$\det_N \left(\frac{1}{x_j - y_k} \right) = C \frac{\prod_{j < k}^N (x_j - x_k)(y_k - y_j)}{\prod_{j, k=1}^N (x_j - y_k)}, \quad (2.7)$$

где константа C не зависит ни от x_1, \dots, x_N , ни от y_1, \dots, y_N . Действительно, полюсы детерминанта однозначно фиксируют знаменатель в правой части (2.7). Нули при $x_j = x_k$ и $y_j = y_k$ дают числитель. Других нулей детерминант иметь не может. Действительно, предположим, что детерминант имеет дополнительный нуль при $x_\ell = x_0$, где x_ℓ — произвольное из набора x_1, \dots, x_N , а x_0 — некоторая точка, не совпадающая ни с одним из других x_j . Тогда в правой части (2.7) возник бы дополнительный множитель $(x_\ell - x_0)$, и тогда правая часть не стремилась бы к нулю при $x_\ell \rightarrow \infty$. Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что детерминант не имеет дополнительных нулей при $y_\ell = y_0$. Отсюда следует, что рациональные функции в обеих частях формулы (2.7) могут отличаться друг от друга лишь на константу, не зависящую ни от x_1, \dots, x_N , ни от y_1, \dots, y_N . Для того чтобы найти эту константу, достаточно рассмотреть частный случай $x_j = y_j + \varepsilon$, $j = 1, \dots, N$, и вычислить коэффициенты при максимальной степени $1/\varepsilon^N$. В левой части этот коэффициент равен 1 (он возникает при взятии произведения диагональных членов). Легко проверить, что в правой части коэффициент при $1/\varepsilon^N$ равен C . Отсюда $C = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Для любых x_1, \dots, x_N и y_1, \dots, y_N*

$$\det_N \left(\frac{1}{\operatorname{sh}(x_j - y_k)} \right) = \frac{\prod_{j < k}^N \operatorname{sh}(x_j - x_k) \operatorname{sh}(y_k - y_j)}{\prod_{j, k=1}^N \operatorname{sh}(x_j - y_k)}. \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно перейти к переменным $u_j = e^{2x_j}$ и $v_j = e^{2y_j}$, после чего в новых переменных детерминант в (2.8) сведется к детерминанту Коши. Останется воспользоваться формулой (2.6) и вернуться к исходным переменным.

Перейдем теперь к вычислению детерминанта в формуле (2.5).

ЛЕММА 2.2. *Для любых α и β*

$$\det_N \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha(j+k-1)}{\operatorname{sh} \beta(j+k-1)} \right) = 2^{N^2-N} \prod_{j>k}^N \operatorname{sh}^2 \beta(j-k) \prod_{j, k=1}^N \frac{\operatorname{sh}(\alpha + \beta(j-k))}{\operatorname{sh} \beta(j+k-1)}. \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем детерминант в левой части (2.9) следующим образом:

$$\begin{aligned} \det_N \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha(j+k-1)}{\operatorname{sh} \beta(j+k-1)} \right) &= \det_N \left(\frac{e^{\alpha(j+k-1)} - e^{-\alpha(j+k-1)}}{2 \operatorname{sh} \beta(j+k-1)} \right) \\ &= \prod_{j=1}^N e^{-\alpha(j-1)} \prod_{k=1}^N e^{-\alpha k} \cdot \det_N \left(\frac{e^{2\alpha(j+k-1)} - 1}{2 \operatorname{sh} \beta(j+k-1)} \right) = e^{-\alpha N^2} \cdot \det_N \left(\frac{e^{2\alpha(j+k-1)} - 1}{2 \operatorname{sh} \beta(j+k-1)} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Детерминант в правой части (2.10) является полиномом от $e^{2\alpha}$. Для того чтобы определить степень этого полинома, следует пренебречь слагаемым -1 в выражении $e^{2\alpha(j+k-1)} - 1$. После этого мы немедленно находим, что степень полинома равна N^2 . Итак,

$$\det_N \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha(j+k-1)}{\operatorname{sh} \beta(j+k-1)} \right) = e^{-\alpha N^2} P_{N^2}(e^{2\alpha}). \quad (2.11)$$

Для того чтобы найти полином, достаточно найти его нули и коэффициент при старшем члене $e^{2\alpha N^2}$. Нули легко находятся. Во-первых, при $\alpha = 0$ все матричные элементы матрицы в левой части (2.10) обращаются в нуль. Мы имеем дело с матрицей нулевого ранга. Поэтому при $\alpha = 0$ детерминант имеет нуль порядка N .

Если $\alpha = \beta$, то все матричные элементы равны 1, и мы получаем матрицу первого ранга. Поэтому при $\alpha = \beta$ детерминант имеет нуль порядка $N - 1$. Аналогично, детерминант имеет нуль порядка $N - 1$ при $\alpha = -\beta$.

Легко видеть, что при $\alpha = \pm 2\beta$ мы получаем матрицу второго ранга (сумму двух матриц первого ранга), поэтому в этих точках детерминант имеет нули порядка $N - 2$. И так далее вплоть до $\alpha = \pm(N-1)\beta$, где детерминант имеет нули первого порядка. Если теперь сложить порядки всех найденных нулей, то получится N^2 , а значит, других нулей нет.

Остается найти коэффициент при старшем члене $e^{2\alpha N^2}$. Для этого достаточно устремить $\alpha \rightarrow \infty$ в правой части (2.10) и вычислить коэффициент при $e^{\alpha N^2}$. Легко видеть, что этот коэффициент равен

$$2^{-N} \det_N \left(\frac{1}{\operatorname{sh} \beta(j+k-1)} \right). \quad (2.12)$$

Это частный случай детерминанта Коши, вычисленного в следствии 2.1. Действительно, полагая в (2.8) $x_j = j\beta$ и $y_k = (1-k)\beta$, мы приходим к (2.12). Поэтому

$$2^{-N} \det_N \left(\frac{1}{\operatorname{sh} \beta(j+k-1)} \right) = 2^{-N} \frac{\prod_{j>k}^N \operatorname{sh}^2 \beta(j-k)}{\prod_{j,k=1}^N \operatorname{sh} \beta(j+k-1)}. \quad (2.13)$$

Таким образом, мы приходим к формуле

$$\begin{aligned} \det_N \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha(j+k-1)}{\operatorname{sh} \beta(j+k-1)} \right) &= e^{-\alpha N^2} 2^{-N} \frac{\prod_{j>k}^N \operatorname{sh}^2 \beta(j-k)}{\prod_{j,k=1}^N \operatorname{sh} \beta(j+k-1)} \\ &\quad \times (e^{2\alpha} - 1)^N \prod_{m=1}^{N-1} (e^{2\alpha} - e^{2m\beta})^{N-k} (e^{2\alpha} - e^{-2m\beta})^{N-k}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Сравнивая (2.14) с (2.9), мы видим, что нам остается доказать равенство

$$2^{N^2} \prod_{j,k=1}^N \operatorname{sh}(\alpha + \beta(j-k)) = e^{-\alpha N^2} (e^{2\alpha} - 1)^N \prod_{m=1}^{N-1} (e^{2\alpha} - e^{2m\beta})^{N-k} (e^{2\alpha} - e^{-2m\beta})^{N-k}. \quad (2.15)$$

Разумеется, не представляет особого труда доказать это прямым вычислением. Можно, однако, поступить проще. Мы уже знаем, что правая часть (2.15) является произведением $e^{-\alpha N^2}$ на полином степени N^2 от $e^{2\alpha}$. Легко видеть, что и левая часть представима в таком же виде. При этом коэффициенты при старших членах полиномов в обеих частях равны единице. Остается проверить, что нули обоих полиномов совпадают. Нули полинома в правой части уже известны, поэтому исследуем произведение в левой части (2.15).

В этом произведении имеется N множителей, для которых $j = k$. Очевидно, что все эти множители обращаются в нуль при $\alpha = 0$. Таким образом, точка $\alpha = 0$ является нулем порядка N для левой части (2.15). Далее, если $j - k + 1 = 0$, то рассматриваемое произведение обращается в нуль при $\alpha = \beta$. Поскольку существует $N - 1$ множитель, для которых $j = k - 1$, то это нуль порядка $N - 1$. Аналогично, нуль порядка $N - 1$ возникает при $\alpha = -\beta$ (его дают множители, для которых $j - k - 1 = 0$). И вообще, если $\alpha = \pm m\beta$, где $m = 0, 1, \dots, N - 1$, то мы получаем нуль порядка $N - m$, поскольку в произведении имеется ровно $N - m$ множителей, для которых $j - k \mp m = 0$. Таким образом, равенство двух полиномов доказано.

Нам остается применить лемму 2.2 к вычислению детерминанта (2.5). Для этого достаточно положить $\alpha = \epsilon$ и $\beta = 3\epsilon$. Мы получаем

$$\mathcal{A}_N = (-1)^{\frac{N^2-N}{2}} 3^{\frac{N^2+N}{2}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \prod_{j < k}^N \frac{\operatorname{sh}^2 3\epsilon(j-k)}{\operatorname{sh}^2 \epsilon(j-k)} \prod_{j,k=1}^N \frac{\operatorname{sh} \epsilon(1+3(j-k))}{\operatorname{sh} 3\epsilon(j+k-1)}. \quad (2.16)$$

Предел $\epsilon \rightarrow 0$ теперь становится тривиальным, и мы приходим к

$$\mathcal{A}_N = (-3)^{\frac{N^2-N}{2}} \prod_{j,k=1}^N \frac{3(j-k)+1}{j+k-1}. \quad (2.17)$$

Мы предоставляем читателю возможность самостоятельно завершить вычисление и убедиться в том, что полученное двойное произведение сводится к формуле (1.5). Из представления (2.17) можно также получить и другую формулу

$$\mathcal{A}_N = \frac{(\sqrt{3})^{3N^2}}{4^{N^2}} \prod_{k=1}^N \frac{\Gamma(k + \frac{1}{3})\Gamma(k - \frac{1}{3})}{\Gamma(k + \frac{1}{2})\Gamma(k - \frac{1}{2})}, \quad (2.18)$$

которая эквивалентна (1.5).

Лекция 8. Мультикоммутационные соотношения

RTT -соотношение задает перестановочные соотношения между матричными элементами матрицы монодромии $T^{ij}(u)$ и $T^{kl}(v)$. В этом разделе мы переходим к изучению мультикоммутационных соотношений, когда требуется переставить произведение некоторого количества операторов $T^{ij}(\bar{u})$ с произведением $T^{kl}(\bar{v})$. В частном случае такие мультикоммутационные соотношения позволяют вычислять скалярные произведения векторов Бете.

1. Суммирование по разбиениям

Начиная с этого момента, мы постоянно будем иметь дело с суммами по разбиениям наборов переменных на непересекающиеся подмножества. Для обозначения подмножеств мы будем в основном пользоваться римскими цифрами (все другие обозначения будут оговариваться особо). Например, запись $\bar{v} \mapsto \{\bar{v}_I, \bar{v}_{II}\}$ означает, что набор \bar{v} разбит на подмножества \bar{v}_I и \bar{v}_{II} такие, что $\bar{v}_I \cap \bar{v}_{II} = \emptyset$ и $\bar{v}_I \cup \bar{v}_{II} = \bar{v}$. Суммирование по разбиениям некоторого набора означает взятие суммы по всем возможным подмножествам данного набора (включая пустое множество). Приведем пример. Пусть $\bar{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{v} \mapsto \{\bar{v}_I, \bar{v}_{II}\}} f(\bar{v}_I, \bar{v}_{II}) &= 1 + [f(v_1, v_2)f(v_1, v_3) + f(v_2, v_1)f(v_2, v_3) + f(v_3, v_1)f(v_3, v_2)] \\ &+ [f(v_2, v_1)f(v_3, v_1) + f(v_1, v_2)f(v_3, v_2) + f(v_1, v_3)f(v_2, v_3)] + 1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Напомним, что запись $f(\bar{v}_I, \bar{v}_{II})$ является сокращенной записью произведения

$$f(\bar{v}_I, \bar{v}_{II}) = \prod_{v_i \in \bar{v}_I} \prod_{v_k \in \bar{v}_{II}} f(v_i, v_k), \quad (1.2)$$

причем если хотя бы один из наборов пуст, то произведение по определению считается равным 1. Тогда первое слагаемое в (1.1) соответствует разбиению $\bar{v}_I = \emptyset$, $\bar{v}_{II} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Затем следует группа из трех слагаемых, соответствующих трем различным разбиениям, в которых $\#\bar{v}_I = 1$ и $\#\bar{v}_{II} = 2$. Следующие три слагаемых соответствуют трем разбиениям, в которых $\#\bar{v}_I = 2$ и $\#\bar{v}_{II} = 1$. Наконец, последнее слагаемое возникает из разбиения $\bar{v}_I = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\bar{v}_{II} = \emptyset$. Обратите внимание на то, что порядок элементов в каждом подмножестве не существен. Так, мы считаем подмножества $\{v_1, v_2\}$ и $\{v_2, v_1\}$ эквивалентными, и мы учитываем их при суммировании только один раз.

Иногда нам будут встречаться суммы по разбиениям с ограничениями на количество элементов в подмножествах. Так, например, если на сумму (1.1) наложить ограничение $\#\bar{v}_I = 1$ и $\#\bar{v}_{II} = 2$, то из всей суммы останутся только три слагаемых в квадратных скобках в первой строке (1.1). Для облегчения обозначений мы будем указывать ограничения на подмножества только в комментариях к формулам.

2. Тождество для статистической суммы

Для определенности и простоты мы будем рассматривать модели, описываемые рациональной R -матрицей $R(u, v) = \mathbf{I} + g(u, v)\mathbf{P}$. Однако все нижесказанное (кроме специально оговоренных случаев) в полной мере относится и к моделям с тригонометрической R -матрицей.

В предыдущих разделах мы познакомились со статистической суммой шестивершинной модели с граничным условием доменной стенки (ССДС). Теперь мы увидим, какую роль играет это объект в коммутационных соотношениях между матричными элементами матрицы монодромии. Напомним, что мы обозначаем ССДС символом $K_n(\bar{u}|\bar{v})$. Это функция, зависящая от двух наборов переменных \bar{u} и \bar{v} с одинаковым количеством элементов. Нижний индекс n указывает на количество переменных в наборах: $\#\bar{u} = \#\bar{v} = n$. В универсальных обозначениях (через функции f и g) ССДС дается формулой (6.4.11). В случае рациональной R -матрицы эта формула принимает вид:

$$K_n(\bar{u}|\bar{v}) = \frac{\prod_{\ell,m=1}^n (u_\ell - v_m + c)}{\prod_{n \geq \ell > m \geq 1} (u_\ell - u_m)(v_m - v_\ell)} \det_n \left(\frac{c}{(u_j - v_k)(u_j - v_k + c)} \right). \quad (2.1)$$

Некоторые свойства ССДС были установлены в разделе 6.4. Одним из основных свойств является редукция ССДС в полюсах (6.4.6). Еще одна редукция имеет следующий вид:

$$K_{n+1}(\{\bar{u}, z - c\}|\{\bar{v}, z\}) = K_{n+1}(\{\bar{u}, z\}|\{\bar{v}, z + c\}) = -K_n(\bar{u}|\bar{v}). \quad (2.2)$$

Доказательство этого утверждения очень похоже на доказательство свойств вычетов ССДС в полюсах. Действительно, если среди элементов первого и второго набора есть такие, которые отличаются сдвигом на c , то двойное произведение в (2.1) обращается в нуль. С другой стороны, один из матричных элементов в детерминанте становится сингулярным. Ясно поэтому, что детерминант сводится к произведению этого элемента на соответствующий минор, что в конечном итоге и приводит к формуле (2.2).

Нам также потребуются свойства ССДС при замене наборов $\bar{u} \leftrightarrow \bar{v}$. Прежде всего, такая замена эквивалентна замене c на $-c$. Данное свойство немедленно следует из аналогичных свойств функций f и g и представления (6.4.11). Перестановка наборов \bar{u} и \bar{v} также может быть осуществлена с помощью формулы

$$K_n(\bar{u} - c|\bar{v}) = K_n(\bar{u}|\bar{v} + c) = (-1)^n \frac{K_n(\bar{v}|\bar{u})}{f(\bar{v}, \bar{u})}, \quad (2.3)$$

которую легко получить из явного представления (2.1). Запись вида $\bar{u} - c$ означает, что из всех элементов набора \bar{u} вычтена константа c (и аналогично для $\bar{v} + c$).

Перейдем теперь к более сложным свойствам ССДС, которые позволяют вычислять некоторые суммы по разбиениям.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\bar{\xi}$, \bar{u} и \bar{v} являются наборами комплексных переменных таких, что $\#\bar{u} = m$, $\#\bar{v} = n$ и $\#\bar{\xi} = m + n$. Тогда

$$\sum_{\bar{\xi} \mapsto \{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}\}} K_m(\bar{\xi}_I|\bar{u}) K_n(\bar{v}|\bar{\xi}_{II}) f(\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_I) = (-1)^m f(\bar{\xi}, \bar{u}) K_{m+n}(\{\bar{u} - c, \bar{v}\}|\bar{\xi}). \quad (2.4)$$

Сумма берется по все разбиениям набора $\bar{\xi}$ на два подмножества $\bar{\xi}_I$ и $\bar{\xi}_{II}$ таких, что $\#\bar{\xi}_I = m$ и $\#\bar{\xi}_{II} = n$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы явно указали, что имеем дело с суммированием по разбиениям с ограничениями на количество элементов в наборах. Однако мы могли бы не указывать это, поскольку ограничения автоматически вытекают из самого вида формулы. Действительно, поскольку в каждой из ССДС должно быть равное количество аргументов, то из $\#\bar{u} = m$ следует $\#\bar{\xi}_I = m$, а из $\#\bar{v} = n$ следует $\#\bar{\xi}_{II} = n$. Только в этом случае формула (2.4) имеет смысл.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего мы установим свойства обеих частей формулы (2.4) в полюсах. Рассмотрим, например, левую часть как функцию переменной u_1 при фиксированных значениях всех остальных переменных. Положим

$$F_{m,n}^{(l)}(\bar{u}; \bar{\xi}) = \sum_{\bar{\xi} \mapsto \{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}\}} K_m(\bar{\xi}_I | \bar{u}) K_n(\bar{v} | \bar{\xi}_{II}) f(\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_I). \quad (2.5)$$

Очевидно, функция $F_{m,n}^{(l)}(\bar{u}; \bar{\xi})$ является аналитической функцией от переменной u_1 во всей комплексной плоскости, за исключением точек ξ_k , где она имеет простые полюсы. Здесь ξ_k — произвольный элемент из набора $\bar{\xi}$. Действительно, переменная u_1 входит только в СДС $K_m(\bar{\xi}_I | \bar{u})$, которая имеет простые полюсы в точках, где $u_1 = \xi_k$. Зафиксируем ξ_k . Тогда очевидно, что в правой части (2.5) сингулярности возникают лишь в тех слагаемых, для которых $\xi_k \in \bar{\xi}_I$. Положим $\bar{\xi}_{I'} = \bar{\xi}_I \setminus \xi_k$, $\bar{\xi}_k = \bar{\xi} \setminus \xi_k$ и $\bar{u}_1 = \bar{u} \setminus u_1$. Тогда, воспользовавшись равенством (6.4.6), получаем, что при $u_1 \rightarrow \xi_k$

$$F_{m,n}^{(l)}(\bar{u}; \bar{\xi}) \Big|_{u_1 \rightarrow \xi_k} = \sum_{\bar{\xi}_k \mapsto \{\bar{\xi}_{I'}, \bar{\xi}_{II}\}} g(\xi_k, u_1) f(u_1, \bar{u}_1) f(\bar{\xi}_{I'}, \xi_k) \times K_{m-1}(\bar{\xi}_{I'} | \bar{u}_1) K_n(\bar{v} | \bar{\xi}_{II}) f(\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{I'}) f(\bar{\xi}_{II}, \xi_k) + \text{Reg}, \quad (2.6)$$

и мы напоминаем, что символом Reg обозначены слагаемые, которые остаются регулярными при $u_1 = \xi_k$. Мы также воспользовались равенством

$$f(\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_I) = f(\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{I'}) f(\bar{\xi}_{II}, \xi_k). \quad (2.7)$$

Заметим, что суммирование теперь ведется по разбиениям набора $\bar{\xi}_k$ на подмножества $\bar{\xi}_{I'}$ и $\bar{\xi}_{II}$. Тогда множители $g(\xi_k, u_1) f(u_1, \bar{u}_1)$ не зависят от разбиения, а значит, они могут быть вынесены за знак суммы. Также легко видеть, что произведение $f(\bar{\xi}_{I'}, \xi_k) f(\bar{\xi}_{II}, \xi_k) = f(\bar{\xi}_k, \xi_k)$ не зависит от конкретного разбиения и может быть вынесено. Мы получаем

$$F_{m,n}^{(l)}(\bar{u}; \bar{\xi}) \Big|_{u_1 \rightarrow \xi_k} = g(\xi_k, u_1) f(u_1, \bar{u}_1) f(\bar{\xi}_k, \xi_k) \sum_{\bar{\xi}_k \mapsto \{\bar{\xi}_{I'}, \bar{\xi}_{II}\}} K_{m-1}(\bar{\xi}_{I'} | \bar{u}_1) K_n(\bar{v} | \bar{\xi}_{II}) f(\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{I'}) + \text{Reg}. \quad (2.8)$$

Очевидно, что оставшаяся сумма по разбиениям есть не что иное, как $F_{m-1,n}^{(l)}(\bar{u}_1; \bar{\xi}_k)$. Следовательно,

$$F_{m,n}^{(l)}(\bar{u}; \bar{\xi}) \Big|_{u_1 \rightarrow \xi_k} = g(\xi_k, u_1) f(u_1, \bar{u}_1) f(\bar{\xi}_k, \xi_k) F_{m-1,n}^{(l)}(\bar{u}_1; \bar{\xi}_k) + \text{Reg}. \quad (2.9)$$

Итак, вычет функции $F_{m,n}^{(l)}(\bar{u}; \bar{\xi})$ при $u_1 \rightarrow \xi_k$ свелся к функции $F_{m-1,n}^{(l)}(\bar{u}_1; \bar{\xi}_k)$.

Рассмотрим теперь поведение правой части равенства (2.4) при $u_1 \rightarrow \xi_k$. Положим

$$F_{m,n}^{(r)}(\bar{u}; \bar{\xi}) = (-1)^m f(\bar{\xi}, \bar{u}) K_{m+n}(\{\bar{u} - c, \bar{v}\} | \bar{\xi}). \quad (2.10)$$

Так же как и в рассмотренном выше случае, функция $F_{m,n}^{(r)}(\bar{u}; \bar{\xi})$ является аналитической функцией от переменной u_1 во всей комплексной плоскости, за исключением точек ξ_k , где она имеет простые полюсы. Хотя СДС $K_{m+n}(\{\bar{u} - c, \bar{v}\} | \bar{\xi})$ имеет полюсы при $u_1 - c = \xi_k$, но в этих точках произведение $f(\bar{\xi}, \bar{u})$ обращается в нуль, поэтому в целом функция $F_{m,n}^{(r)}(\bar{u}; \bar{\xi})$ оказывается голоморфной при $u_1 - c = \xi_k$. Остаются единственные сингулярности, которые возникают в произведении $f(\bar{\xi}, \bar{u})$ при $u_1 = \xi_k$. Очевидно, что

$$f(\bar{\xi}, \bar{u}) \Big|_{u_1 \rightarrow \xi_k} = g(\xi_k, u_1) f(u_1, \bar{u}_1) f(\bar{\xi}_k, \xi_k) f(\bar{\xi}_k, \bar{u}_1) + \text{Reg}. \quad (2.11)$$

В силу (2.2) мы также имеем

$$K_{m+n}(\{\bar{u} - c, \bar{v}\}|\bar{\xi}) \Big|_{u_1=\xi_k} = -K_{m+n-1}(\{\bar{u}_1 - c, \bar{v}\}|\bar{\xi}_k). \quad (2.12)$$

Подставляя это в (2.10), находим

$$F_{m,n}^{(r)}(\bar{u}; \bar{\xi}) \Big|_{u_1 \rightarrow \xi_k} = g(\xi_k, u_1) f(u_1, \bar{u}_1) f(\bar{\xi}_k, \xi_k) F_{m-1,n}^{(r)}(\bar{u}_1; \bar{\xi}_k) + \text{Reg}. \quad (2.13)$$

Следовательно, с учетом (2.9) получаем

$$\begin{aligned} \left(F_{m,n}^{(l)}(\bar{u}; \bar{\xi}) - F_{m,n}^{(r)}(\bar{u}; \bar{\xi}) \right) \Big|_{u_1 \rightarrow \xi_k} &= g(\xi_k, u_1) f(u_1, \bar{u}_1) f(\bar{\xi}_k, \xi_k) \\ &\times \left(F_{m-1,n}^{(l)}(\bar{u}_1; \bar{\xi}_k) - F_{m-1,n}^{(r)}(\bar{u}_1; \bar{\xi}_k) \right) + \text{Reg}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Формула (2.14) позволяет доказать лемму 2.1 по индукции. Пусть $m = 0$. Тогда $\bar{u} = \emptyset$, и в сумме по разбиениям выживает только одно слагаемое: $\bar{\xi}_I = \emptyset$, $\bar{\xi}_{II} = \bar{\xi}$. Утверждение леммы становится тривиальным. Предположим, что утверждение леммы справедливо при некотором $m - 1$, и рассмотрим разность $F_{m,n}^{(l)}(\bar{u}; \bar{\xi}) - F_{m,n}^{(r)}(\bar{u}; \bar{\xi})$ как функцию от u_1 при всех остальных переменных фиксированных. Тогда в силу (2.14) функция $F_{m,n}^{(l)}(\bar{u}; \bar{\xi}) - F_{m,n}^{(r)}(\bar{u}; \bar{\xi})$ не имеет полюсов в точках $u_1 = \xi_k$. Иными словами, функция $F_{m,n}^{(l)}(\bar{u}; \bar{\xi}) - F_{m,n}^{(r)}(\bar{u}; \bar{\xi})$ оказывается голоморфной во всей комплексной плоскости. Следовательно, по теореме Лиувилля она тождественно равна константе. Поскольку при $u_1 \rightarrow \infty$ ССДС K_m и K_{m+n} стремятся к нулю, то эта константа равна нулю, т. е. $F_{m,n}^{(l)}(\bar{u}; \bar{\xi}) - F_{m,n}^{(r)}(\bar{u}; \bar{\xi}) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. В условиях леммы 2.1

$$\sum K_m(\bar{\xi}_I|\bar{u}) K_n(\bar{v}|\bar{\xi}_{II}) f(\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_I) = (-1)^n f(\bar{v}, \bar{\xi}) K_{m+n}(\bar{\xi}|\{\bar{u}, \bar{v} + c\}). \quad (2.15)$$

Тождество (2.15) следует из (2.4) в силу соотношения (2.3).

3. Мультикоммутационные соотношения

В этом разделе мы рассмотрим пример мультикоммутационных соотношений между матричными элементами матрицы монодромии. Напомним еще раз перестановочные соотношения между операторами A и B :

$$A(v)B(u) = f(u, v)B(u)A(v) + g(v, u)B(v)A(u). \quad (3.1)$$

Мы уже рассматривали вопрос о том, как пронести оператор $A(v)$ через произведение нескольких операторов¹ $B(\bar{u})$. Теперь же мы рассмотрим более сложный случай перестановки произведения операторов $A(\bar{v})$ с произведением операторов $B(\bar{u})$. Ясно, что даже если мы воспользуемся формулой

$$A(v)B(\bar{u}) = f(\bar{u}, v)B(\bar{u})A(v) + \sum_{k=1}^n g(v, u_k) f(\bar{u}_k, u_k) B(v)B(\bar{u}_k)A(u_k) \quad (3.2)$$

и применим ее несколько раз, то ответ будет слишком громоздким. Между тем, существуют относительно компактные формулы для мультиперестановочных соотношений $A(\bar{v})$ и $B(\bar{u})$, которые приведены ниже.

¹Тот факт, что произведение $B(\bar{u})$ действовало на вакуумный вектор $|0\rangle$, существенной роли не играл. Это просто приводило к замене оператора A на функцию a .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\#\bar{v} = m$ и $\#\bar{u} = n$. Тогда

$$A(\bar{v})B(\bar{u}) = (-1)^n \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_{II}\}} K_n(\bar{u}|\bar{w}_{II} + c) f(\bar{w}_{II}, \bar{w}_I) B(\bar{w}_{II}) A(\bar{w}_I) \quad (3.3)$$

и

$$A(\bar{v})B(\bar{u}) = (-1)^m \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_{II}\}} K_m(\bar{w}_I|\bar{v} + c) f(\bar{w}_{II}, \bar{w}_I) B(\bar{w}_{II}) A(\bar{w}_I). \quad (3.4)$$

В этих формулах наборы \bar{u} и \bar{v} объединены в одно множество \bar{w} , т.е. $\{\bar{u}, \bar{v}\} = \bar{w}$. Сумма берется по всем разбиениям $\bar{w} \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_{II}\}$ таким, что $\#\bar{w}_I = m$ и $\#\bar{w}_{II} = n$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Несмотря на компактность записи, обе суммы (3.3) и (3.4) содержат по $\binom{n+m}{n}$ слагаемых.

Прежде всего отметим, что формулы (3.3) и (3.4) эквивалентны. Они отличаются друг от друга только различными ССДС. Но с помощью свойства (2.2) легко доказать, что эти ССДС равны друг другу

$$\begin{aligned} (-1)^n K_n(\bar{u}|\bar{w}_{II} + c) &= (-1)^{n+m} K_{n+m}(\{\bar{u}, \bar{v}\}|\{\bar{w}_{II} + c, \bar{v} + c\}) \\ &= (-1)^{n+m} K_{n+m}(\{\bar{w}_I, \bar{w}_{II}\}|\{\bar{w}_{II} + c, \bar{v} + c\}) = (-1)^m K_m(\bar{w}_I|\bar{v} + c). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Поэтому, если доказана одна из формул, автоматически доказана и другая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по n и m . При $n = m = 1$ множество \bar{w} состоит из двух элементов: v и u . Поэтому возможны только два разбиения: либо $\bar{w}_I = v$, $\bar{w}_{II} = u$, либо $\bar{w}_I = u$, $\bar{w}_{II} = v$. Тогда формула приобретает вид

$$A(v)B(u) = -K_1(u|u + c) f(u, v) B(u) A(v) - K_1(u|v + c) f(v, u) B(v) A(u). \quad (3.6)$$

Непосредственным вычислением убеждаемся в том, что

$$K_1(u|u + c) = -1, \quad K_1(u|v + c) f(v, u) = -g(v, u), \quad (3.7)$$

и, подставляя эти выражения в (3.6), приходим к (3.1).

Допустим теперь, что равенства (3.3), (3.4) выполнены для $m = \#\bar{v} = 1$ и некоторого $n - 1 = \#\bar{u}$, где $n \geq 1$. Несмотря на то что набор \bar{v} состоит из одного элемента, мы по-прежнему будем писать черту над v , подчеркивая тем самым, что рассматриваем \bar{v} именно как набор переменных. Рассмотрим случай $\#\bar{u} = n$ и положим $\bar{u}_n = \bar{u} \setminus u_n$. Тогда в силу индуктивного предположения

$$A(\bar{v})B(\bar{u}) = (-1)^{n-1} \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}_n\} \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_{II}\}} K_{n-1}(\bar{u}_n|\bar{w}_{II} + c) f(\bar{w}_{II}, \bar{w}_I) B(\bar{w}_{II}) A(\bar{w}_I) B(u_n). \quad (3.8)$$

Мы воспользовались формулой (3.3). Операторы $A(\bar{w}_I)B(u_n)$ переставим с помощью формулы (3.4):

$$\begin{aligned} A(\bar{v})B(\bar{u}) &= (-1)^n \sum_{\substack{\{\bar{v}, \bar{u}_n\} \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_{II}\} \\ \{\bar{w}_I, u_n\} \mapsto \{\bar{w}_{III}, \bar{w}_{IV}\}}} K_{n-1}(\bar{u}_n|\bar{w}_{II} + c) f(\bar{w}_{II}, \bar{w}_I) B(\bar{w}_{II}) \\ &\quad \times K_1(u_n|\bar{w}_{IV} + c) f(\bar{w}_{IV}, \bar{w}_{III}) B(\bar{w}_{IV}) A(\bar{w}_{III}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

В формуле (3.9) мы фактически имеем дело с двойной суммой по разбиениям. Сначала набор $\{\bar{v}, \bar{u}_n\}$ разбивается на подмножества \bar{w}_I и \bar{w}_{II} , потом набор $\{\bar{w}_I, u_n\}$ разбивается на подмножества \bar{w}_{III} и \bar{w}_{IV} .

Суть дальнейших преобразований состоит в том, чтобы вычислить сумму по части разбиений. Для этого у нас есть только один инструмент — лемма 2.1. Поэтому наша задача состоит в преобразовании выражения (3.9) к такому виду, чтобы применение леммы 2.1 стало возможным.

Обратите внимание, что в формуле (3.9) мы имеем дело с разбиением полного набора $\{\bar{v}, \bar{u}\}$ на три подмножества \bar{w}_Π , \bar{w}_III и \bar{w}_IV . Правда, как мы уже отмечали выше, это разбиение сделано в два этапа. На первом этапе мы также имели подмножество \bar{w}_I . Избавимся от этого промежуточного подмножества.

Набор \bar{w}_I входит только в произведение $f(\bar{w}_\Pi, \bar{w}_\text{I})$. Умножим и разделим его на $f(\bar{w}_\Pi, u_n)$:

$$f(\bar{w}_\Pi, \bar{w}_\text{I}) = \frac{f(\bar{w}_\Pi, \bar{w}_\text{I})f(\bar{w}_\Pi, u_n)}{f(\bar{w}_\Pi, u_n)}. \quad (3.10)$$

Теперь, воспользовавшись тем, что $\{\bar{w}_\text{I}, u_n\} = \{\bar{w}_\text{III}, \bar{w}_\text{IV}\}$, мы перепишем это произведение в виде

$$f(\bar{w}_\Pi, \bar{w}_\text{I}) = \frac{f(\bar{w}_\Pi, \bar{w}_\text{I})f(\bar{w}_\Pi, u_n)}{f(\bar{w}_\Pi, u_n)} = \frac{f(\bar{w}_\Pi, \bar{w}_\text{III})f(\bar{w}_\Pi, \bar{w}_\text{IV})}{f(\bar{w}_\Pi, u_n)}. \quad (3.11)$$

Подставляя это в (3.9), получаем

$$\begin{aligned} A(\bar{v})B(\bar{u}) &= (-1)^n \sum_{\substack{\{\bar{v}, \bar{u}_n\} \mapsto \{\bar{w}_\text{I}, \bar{w}_\Pi\} \\ \{\bar{w}_\text{I}, u_n\} \mapsto \{\bar{w}_\text{III}, \bar{w}_\text{IV}\}}} K_1(u_n | \bar{w}_\text{IV} + c) K_{n-1}(\bar{u}_n | \bar{w}_\Pi + c) \\ &\quad \times \frac{f(\bar{w}_\Pi, \bar{w}_\text{III})f(\bar{w}_\Pi, \bar{w}_\text{IV})f(\bar{w}_\text{IV}, \bar{w}_\text{III})}{f(\bar{w}_\Pi, u_n)} B(\bar{w}_\Pi)B(\bar{w}_\text{IV})A(\bar{w}_\text{III}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Теперь подмножество \bar{w}_I не фигурирует в формуле (3.12), и полный набор $\{\bar{v}, \bar{u}\}$ действительно разбит на три подмножества \bar{w}_Π , \bar{w}_III и \bar{w}_IV . Есть, правда, одно ограничение (помимо естественных ограничений на количество элементов в наборах). Переменная u_n не может попасть в подмножество \bar{w}_Π . Действительно, \bar{w}_Π является подмножеством набора $\{\bar{v}, \bar{u}_n\}$, в котором переменная u_n отсутствует. Однако в формуле (3.12) содержится множитель $f^{-1}(\bar{w}_\Pi, u_n)$, который обращается в нуль, как только $u_n \in \bar{w}_\Pi$. Таким образом условие $u_n \notin \bar{w}_\Pi$ выполняется автоматически, и мы можем считать, что суммирование ведется по разбиением набора $\{\bar{v}, \bar{u}\}$ на подмножества \bar{w}_Π , \bar{w}_III и \bar{w}_IV без каких бы то ни было ограничений.

Можно также сказать, что произведение в правой части (3.11) является проекцией произведения $f(\bar{w}_\Pi, \bar{w}_\text{I})$ на такие разбиения, для которых $u_n \notin \bar{w}_\Pi$. Действительно, если $u_n \in \bar{w}_\Pi$, то правая часть (3.11) обращается в нуль. Если же $u_n \notin \bar{w}_\Pi$, то $u_n \in \{\bar{w}_\text{III}, \bar{w}_\text{IV}\}$, и мы можем записать $\{\bar{w}_\text{III}, \bar{w}_\text{IV}\} = \{\bar{w}_\text{I}, u_n\}$, что дает нам левую часть формулы (3.11).

Итак, мы получили

$$\begin{aligned} A(\bar{v})B(\bar{u}) &= (-1)^n \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_\Pi, \bar{w}_\text{III}, \bar{w}_\text{IV}\}} K_1(u_n | \bar{w}_\text{IV} + c) K_{n-1}(\bar{u}_n | \bar{w}_\Pi + c) \\ &\quad \times \frac{f(\bar{w}_\Pi, \bar{w}_\text{III})f(\bar{w}_\Pi, \bar{w}_\text{IV})f(\bar{w}_\text{IV}, \bar{w}_\text{III})}{f(\bar{w}_\Pi, u_n)} B(\bar{w}_\Pi)B(\bar{w}_\text{IV})A(\bar{w}_\text{III}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Теперь нужно понять, по каким разбиениям суммирование в принципе невозможно. Легко видеть, что в данном случае это любое разбиение, затрагивающее подмножество \bar{w}_III . Действительно, в формуле (3.13) есть произведение $A(\bar{w}_\text{III})$. То есть среди членов суммы, отвечающих различным подмножествам \bar{w}_III , нет подобных слагаемых, поскольку все они соответствуют различным произведениям операторов A . Напротив, суммирование по разбиениям на подмножества \bar{w}_Π и \bar{w}_IV можно попытаться осуществить. Действительно, мы можем ввести новое подмножество

$\{\bar{w}_{\text{II}}, \bar{w}_{\text{IV}}\} = \bar{w}_0$. Мы видим, что произведение операторов B в формуле (3.13) берется именно по этому подмножеству. Следовательно, при любом разбиении $\bar{w}_0 \mapsto \{\bar{w}_{\text{II}}, \bar{w}_{\text{IV}}\}$ произведение операторов B не меняется, а меняется только коэффициент при этом произведении. Этот коэффициент является рациональной функцией параметров w , и сумму рациональных функций можно попробовать вычислить.

Перепишем формулу (3.13) с учетом нового подмножества \bar{w}_0 :

$$A(\bar{v})B(\bar{u}) = (-1)^n \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_0, \bar{w}_{\text{III}}\}} B(\bar{w}_0)A(\bar{w}_{\text{III}})f(\bar{w}_0, \bar{w}_{\text{III}}) \times \sum_{\bar{w}_0 \mapsto \{\bar{w}_{\text{II}}, \bar{w}_{\text{IV}}\}} K_1(u_n|\bar{w}_{\text{IV}} + c)K_{n-1}(\bar{u}_n|\bar{w}_{\text{II}} + c) \frac{f(\bar{w}_{\text{II}}, \bar{w}_{\text{IV}})}{f(\bar{w}_{\text{II}}, u_n)}. \quad (3.14)$$

Теперь суммирование организовано следующим образом. Сначала набор $\{\bar{v}, \bar{u}\}$ разбивается на два подмножества \bar{w}_0 и \bar{w}_{III} , а затем уже подмножество \bar{w}_0 еще раз разбивается на два “под-подмножества” \bar{w}_{II} и \bar{w}_{IV} . Нам нужно свести сумму по разбиениям во второй строке (3.14) к виду (2.4). Для этого преобразуем функцию $K_1(u_n|\bar{w}_{\text{IV}} + c)$ по формуле (2.3)

$$K_1(u_n|\bar{w}_{\text{IV}} + c) = -f^{-1}(\bar{w}_{\text{IV}}, u_n) K_1(\bar{w}_{\text{IV}}|u_n). \quad (3.15)$$

Тогда выражение (3.14) принимает вид

$$A(\bar{v})B(\bar{u}) = (-1)^{n-1} \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_0, \bar{w}_{\text{III}}\}} B(\bar{w}_0)A(\bar{w}_{\text{III}}) \frac{f(\bar{w}_0, \bar{w}_{\text{III}})}{f(\bar{w}_0, u_n)} \times \sum_{\bar{w}_0 \mapsto \{\bar{w}_{\text{II}}, \bar{w}_{\text{IV}}\}} K_1(\bar{w}_{\text{IV}}|u_n)K_{n-1}(\bar{u}_1 - c|\bar{w}_{\text{II}})f(\bar{w}_{\text{II}}, \bar{w}_{\text{IV}}), \quad (3.16)$$

где мы также воспользовались очевидным соотношением $K_{n-1}(\bar{u}_n|\bar{w}_{\text{II}} + c) = K_{n-1}(\bar{u}_n - c|\bar{w}_{\text{II}})$. Теперь сумма по разбиениям $\bar{w}_0 \mapsto \{\bar{w}_{\text{II}}, \bar{w}_{\text{IV}}\}$ вычисляется с помощью леммы 2.1

$$\sum_{\bar{w}_0 \mapsto \{\bar{w}_{\text{II}}, \bar{w}_{\text{IV}}\}} K_1(\bar{w}_{\text{IV}}|u_n)K_{n-1}(\bar{u}_1 - c|\bar{w}_{\text{II}})f(\bar{w}_{\text{II}}, \bar{w}_{\text{IV}}) = -f(\bar{w}_0, u_n)K_n(\bar{u} - c|\bar{w}_0). \quad (3.17)$$

Подставляя это в (3.16), получаем

$$A(\bar{v})B(\bar{u}) = (-1)^n \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_0, \bar{w}_{\text{III}}\}} K_n(\bar{u} - c|\bar{w}_0)f(\bar{w}_0, \bar{w}_{\text{III}})B(\bar{w}_0)A(\bar{w}_{\text{III}}). \quad (3.18)$$

Остается переобозначить $\bar{w}_0 \rightarrow \bar{w}_{\text{II}}$ и $\bar{w}_{\text{III}} \rightarrow \bar{w}_{\text{I}}$, после чего мы приходим к формуле (3.3) с $\#\bar{v} = 1$ и $\#\bar{u} = n$.

Таким образом, формулы (3.3), (3.4) доказаны при $m = 1$ и произвольном n . Теперь нужно провести индукцию по m . Это делается полностью аналогично индукции по n . Приведем тем не менее ключевые формулы. Пусть (3.3), (3.4) верны при некотором $m - 1$, и пусть $\bar{v}_m = \bar{v} \setminus v_m$. Тогда в силу (3.4)

$$A(\bar{v})B(\bar{u}) = (-1)^{m-1} \sum_{\{\bar{v}_m, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_{\text{I}}, \bar{w}_{\text{II}}\}} K_{m-1}(\bar{w}_{\text{I}}|\bar{v}_m + c)f(\bar{w}_{\text{II}}, \bar{w}_{\text{I}})A(v_m)B(\bar{w}_{\text{II}})A(\bar{w}_{\text{I}}). \quad (3.19)$$

Операторы $A(v_m)B(\bar{w}_\Pi)$ переставим с помощью формулы (3.3):

$$A(\bar{v})B(\bar{u}) = (-1)^m \sum_{\substack{\{\bar{v}_m, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_\Pi\} \\ \{\bar{w}_\Pi, v_m\} \mapsto \{\bar{w}_\text{III}, \bar{w}_\text{IV}\}}} K_{m-1}(\bar{w}_I|\bar{v}_m + c) f(\bar{w}_\Pi, \bar{w}_I) B(\bar{w}_\text{IV}) \\ \times K_1(\bar{w}_\text{III}|v_m + c) f(\bar{w}_\text{IV}, \bar{w}_\text{III}) A(\bar{w}_\text{III}) A(\bar{w}_I). \quad (3.20)$$

Мы снова имеем дело с двойной суммой по разбиениям: сначала набор $\{\bar{v}_m, \bar{u}\}$ разбивается на подмножества \bar{w}_I и \bar{w}_Π , потом набор $\{\bar{w}_\Pi, v_m\}$ разбивается на подмножества \bar{w}_III и \bar{w}_IV . Аналогично соотношению (3.11) имеем

$$f(\bar{w}_\Pi, \bar{w}_I) = \frac{f(\bar{w}_\Pi, \bar{w}_I) f(v_m, \bar{w}_I)}{f(v_m, \bar{w}_I)} = \frac{f(\bar{w}_\text{III}, \bar{w}_I) f(\bar{w}_\text{IV}, \bar{w}_I)}{f(v_m, \bar{w}_I)}, \quad (3.21)$$

поэтому

$$A(\bar{v})B(\bar{u}) = (-1)^m \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_\text{III}, \bar{w}_\text{IV}\}} K_{m-1}(\bar{w}_I|\bar{v}_m + c) K_1(\bar{w}_\text{III}|v_m + c) \\ \times \frac{f(\bar{w}_\text{III}, \bar{w}_I) f(\bar{w}_\text{IV}, \bar{w}_I) f(\bar{w}_\text{IV}, \bar{w}_\text{III})}{f(v_m, \bar{w}_I)} B(\bar{w}_\text{IV}) A(\bar{w}_\text{III}) A(\bar{w}_I). \quad (3.22)$$

Здесь суммирование ведется по разбиениям набора $\{\bar{v}, \bar{u}\}$ на три подмножества \bar{w}_I , \bar{w}_III и \bar{w}_IV . При этом исходное ограничение $v_m \notin \bar{w}_I$ выполнено автоматически, благодаря произведению $f^{-1}(v_m, \bar{w}_I)$.

Введем новый набор $\bar{w}_0 = \{\bar{w}_I, \bar{w}_\text{III}\}$ и преобразуем $K_1(\bar{w}_\text{III}|v_m + c)$ в духе (3.15). Тогда получим

$$A(\bar{v})B(\bar{u}) = (-1)^{m-1} \sum_{\substack{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_0, \bar{w}_\text{IV}\} \\ \bar{w}_0 \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_\text{III}\}}} K_{m-1}(\bar{w}_I|\bar{v}_m + c) K_1(v_m|\bar{w}_\text{III}) f(\bar{w}_\text{III}, \bar{w}_I) \\ \times \frac{f(\bar{w}_\text{III}, \bar{w}_0)}{f(v_m, \bar{w}_0)} B(\bar{w}_\text{IV}) A(\bar{w}_0). \quad (3.23)$$

В формуле (3.23) набор $\{\bar{v}, \bar{u}\}$ сначала разбивается на подмножества \bar{w}_0 и \bar{w}_IV , после чего \bar{w}_0 дополнительно разбивается на \bar{w}_I и \bar{w}_III . Сумма по разбиениям $\bar{w}_0 \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_\text{III}\}$ вычисляется с помощью (2.15)

$$\sum_{\bar{w}_0 \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_\text{III}\}} K_{m-1}(\bar{w}_I|\bar{v}_m + c) K_1(v_m|\bar{w}_\text{III}) f(\bar{w}_\text{III}, \bar{w}_I) = -f(v_m, \bar{w}_0) K_m(\bar{w}_0|\bar{v} + c). \quad (3.24)$$

С учетом (3.24) мы окончательно получаем

$$A(\bar{v})B(\bar{u}) = (-1)^m \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_0, \bar{w}_\text{IV}\}} K_m(\bar{w}_0|\bar{v} + c) f(\bar{w}_\text{III}, \bar{w}_0) B(\bar{w}_\text{IV}) A(\bar{w}_0), \quad (3.25)$$

что с точностью до обозначений совпадает с (3.4).

ПРИМЕР. Рассмотрим частный случай формулы (3.4) при $m = 1$, т. е. $\bar{v} = v$. Тогда $\bar{w} = \{v, \bar{u}\}$, и подмножество \bar{w}_I состоит из одного элемента. Существует две возможности: либо $\bar{w}_I = v$, и тогда $\bar{w}_\Pi = \bar{u}$; либо $\bar{w}_I = u_k$, и тогда $\bar{w}_\Pi = \{v, \bar{u}_k\}$, где $k = 1, \dots, n$. В первом случае имеем

$$K_1(\bar{w}_I|\bar{v} + c) f(\bar{w}_\Pi, \bar{w}_I) = K_1(\bar{v}|\bar{v} + c) f(\bar{u}, v) = -f(\bar{u}, v). \quad (3.26)$$

Во втором случае

$$K_1(\bar{w}_I|\bar{v} + c) f(\bar{w}_\Pi, \bar{w}_I) = K_1(u_k|\bar{v} + c) f(v, u_k) f(\bar{u}_k, u_k) = -g(v, u_k) f(\bar{u}_k, u_k). \quad (3.27)$$

Очевидно, что вместе эти два вклада дают формулу (3.2).

4. Другие коммутационные соотношения

Приведем еще несколько мультиперестановочных соотношений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $\#\bar{v} = m$ и $\#\bar{u} = n$. Тогда

$$1. \quad C(\bar{v})D(\bar{u}) = (-1)^n \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_{II}\}} K_n(\bar{u}|\bar{w}_{II} + c) f(\bar{w}_{II}, \bar{w}_I) D(\bar{w}_{II}) C(\bar{w}_I) \quad (4.1)$$

u

$$C(\bar{v})D(\bar{u}) = (-1)^m \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_{II}\}} K_m(\bar{w}_I|\bar{v} + c) f(\bar{w}_{II}, \bar{w}_I) D(\bar{w}_{II}) C(\bar{w}_I). \quad (4.2)$$

2.

$$D(\bar{v})B(\bar{u}) = (-1)^n \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_{II}\}} K_n(\bar{w}_{II}|\bar{u} + c) f(\bar{w}_I, \bar{w}_{II}) B(\bar{w}_{II}) D(\bar{w}_I) \quad (4.3)$$

u

$$D(\bar{v})B(\bar{u}) = (-1)^m \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_{II}\}} K_m(\bar{v}|\bar{w}_I + c) f(\bar{w}_I, \bar{w}_{II}) B(\bar{w}_{II}) D(\bar{w}_I). \quad (4.4)$$

3.

$$C(\bar{v})A(\bar{u}) = (-1)^n \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_{II}\}} K_n(\bar{w}_{II}|\bar{u} + c) f(\bar{w}_I, \bar{w}_{II}) A(\bar{w}_{II}) C(\bar{w}_I) \quad (4.5)$$

u

$$C(\bar{v})A(\bar{u}) = (-1)^m \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_{II}\}} K_m(\bar{v}|\bar{w}_I + c) f(\bar{w}_I, \bar{w}_{II}) A(\bar{w}_{II}) C(\bar{w}_I). \quad (4.6)$$

Во всех этих формулах наборы \bar{u} и \bar{v} объединены в одно множество \bar{w} , т. е. $\{\bar{u}, \bar{v}\} = \bar{w}$. Сумма берется по всем разбиениям $\bar{w} \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_{II}\}$ таким, что $\#\bar{w}_I = m$ и $\#\bar{w}_{II} = n$.

Соотношения (4.1), (4.2) мы фактически уже доказали, поскольку коммутационные соотношения между операторами C и D точно такие же, как между A и B . Оставшиеся коммутационные соотношения можно доказать так же, как мы делали выше. Можно, однако, поступить еще проще, вспомнив о возможности замены c на $-c$. Например, коммутационные соотношения между D и B получаются из коммутационных соотношений C и D при замене c на $-c$. Возьмем, например, формулу (4.2) и заменим оператор C на D , оператор D на B и константу c на $-c$. Тогда с учетом

$$\begin{aligned} f(\bar{w}_{II}, \bar{w}_I) \Big|_{c \rightarrow -c} &= f(\bar{w}_I, \bar{w}_{II}), \\ K_m(\bar{w}_I|\bar{v} + c) \Big|_{c \rightarrow -c} &= K_m(\bar{v} - c|\bar{w}_I) = K_m(\bar{v}|\bar{w}_I + c) \end{aligned} \quad (4.7)$$

мы немедленно приходим к соотношению (4.4).

4.1. Еще одно тождество для ССДС. Следующее утверждение имеет место только для моделей с рациональной R -матрицей. Для моделей с тригонометрической R -матрицей оно несправедливо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $\#\bar{u} = n$ и $\#\bar{v} = m$. Тогда

$$\sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_{II}\}} K_n(\bar{u}|\bar{w}_{II} + c) f(\bar{w}_{II}, \bar{w}_I) = (-1)^n. \quad (4.8)$$

Здесь наборы \bar{u} и \bar{v} объединены в одно множество \bar{w} , т. е. $\{\bar{u}, \bar{v}\} = \bar{w}$, и сумма берется по всем разбиениям $\bar{w} \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_{II}\}$ таким, что $\#\bar{w}_I = m$ и $\#\bar{w}_{II} = n$.

Это тождество можно доказать, например, по индукции, но на самом деле оно уже неявно доказано. Заметил ли это читатель? В качестве подсказки еще раз обратим внимание читателя на то, что утверждение (4.8) справедливо только в том случае, если ССДС является рациональной функцией (2.1).

Лекция 9. Скалярные произведения векторов Бете

Эта лекция посвящена скалярным произведениям векторов Бете. Именно к этим объектам в конечном итоге сводится вычисление всех корреляционных функций. Поэтому так важно получить удобные и компактные представления для скалярных произведений. В случае, когда оба вектора являются произвольными векторами Бете, таких представлений на сегодняшний день не найдено. Однако если один из векторов является (твистованным) on-shell вектором, известно представление для скалярного произведения в виде детерминанта некоторой матрицы. В этой лекции мы получим эту формулу.

Детерминантные представления оказываются достаточно удобными как для аналитических, так и для численных расчетов. Дело в том, что с ростом порядка матрицы, время, необходимое для вычисления ее детерминанта, растет полиномиально¹. В этом состоит главное достоинство детерминантных представлений по сравнению, скажем, с представлениями в виде сумм по разбиениям некоторого набора элементов, где с ростом числа элементов в наборе количество слагаемых в сумме растет экспоненциально.

Для определенности в этой лекции мы по-прежнему рассматриваем модели с рациональной R -матрицей. Однако все изложение может быть без труда обобщено на случай тригонометрической R -матрицы. В частности, по этой причине большинство формул приведены в универсальном виде (т. е. в терминах функций f , g и их комбинаций). Мы рекомендуем читателю самостоятельно проверить (там, где это требуется) справедливость тех или иных утверждений для случая тригонометрической R -матрицы.

1. Дуальные векторы Бете

Элементы матрицы монодромии действуют в гильбертовом пространстве \mathcal{H} с вакуумным вектором $|0\rangle$. Предположим, что они также действуют в дуальном пространстве \mathcal{H}^* с дуальным вакуумным вектором $\langle 0|$, который обладает свойствами

$$\langle 0|A(u) = a(u)\langle 0|, \quad \langle 0|D(u) = d(u)\langle 0|, \quad \langle 0|B(u) = 0, \quad (1.1)$$

где функции $a(u)$ и $d(u)$ те же, что и в случае вакуумного вектора $|0\rangle$. Мы также будем считать, что

$$\langle 0| = |0\rangle^\dagger, \quad \langle 0|0\rangle = 1. \quad (1.2)$$

В дуальном пространстве роль оператора рождения играет оператор C , и с его помощью можно строить дуальные векторы Бете $\langle 0|C(\bar{u})$. Свойства этих векторов полностью аналогичны свойствам обычных векторов Бете. В частности, легко показать, что дуальный вектор становится собственным вектором трансфер-матрицы (on-shell дуальным вектором Бете), если параметры \bar{u} удовлетворяют системе уравнений Бете.

Являются ли дуальные векторы эрмитово сопряженными к обычным векторам Бете? Ответ на этот вопрос зависит от конкретной модели и от значений ее параметров. Например, в случае XXZ цепочки при $c = i$ мы имеем $D(u^*) = A^\dagger(u)$ и $C(u^*) = -B^\dagger(u)$. Эти свойства легко доказать индукцией по числу узлов цепочки. Для одного L -оператора

$$L_n(u) = \begin{pmatrix} u + \frac{i}{2} \sigma_n^z & i \sigma_n^- \\ i \sigma_n^+ & u - \frac{i}{2} \sigma_n^z \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

¹Более точно, определитель матрицы $n \times n$ можно вычислить за время $O(n^{2.376})$.

они справедливы. Далее мы предполагаем, что они верны для $T(u)$, являющейся произведением $(N-1)$ L -операторов, и умножаем эту матрицу монодромии на L -оператор в узле с номером N . Непосредственным вычислением убеждаемся, что соотношения между элементами матрицы монодромии остаются в силе.

Отсюда следует, что если $\bar{u}^* = \bar{u}$ (т.е. набор $\bar{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$ состоит из вещественных или комплексно сопряженных параметров), то

$$\langle 0|C(\bar{u}) = (-1)^n (B(\bar{u})|0)^\dagger. \quad (1.4)$$

Решения уравнений Бете действительно обладают свойством $\bar{u}^* = \bar{u}$, поэтому в случае on-shell векторов свойство (1.4) выполнено². Однако если мы рассмотрим неоднородную XXX цепочку или же будем иметь дело с твистованными уравнениями Бете, то все вышеперечисленные свойства операторов и векторов могут нарушиться. Вообще говоря, для таких “нефизических” моделей базис on-shell векторов $B(\bar{u})|0\rangle$ не является ортогональным. Поэтому в этом случае нам следует найти в дуальном пространстве дуальный базис, который не обязан быть эрмитово сопряженным к исходному. Как мы увидим позже, дуальные векторы Бете $\langle 0|C(\bar{u})$ как раз и образуют искомый дуальный базис.

2. Действие операторов C на векторы Бете

Компактных формул для мультиперестановочных соотношений между операторами C и B на сегодняшний день не найдено. Одна из причин состоит в том, что пока не понятно, зачем такие формулы могут быть нужны. Другое дело, если произведение операторов $B(\bar{u})$ действует на вакуум $|0\rangle$. В этом случае мультиперестановочные соотношения операторов C и B приводят к формулам для скалярных произведений векторов Бете³.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $\#\bar{v} = n$, $\#\bar{u} = m$ и $m \geq n$. Тогда

$$C(\bar{v})B(\bar{u})|0\rangle = \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{III}\}} d(\bar{\xi}_I) a(\bar{\xi}_{II}) K_n(\bar{v}|\bar{\xi}_I + c) K_n(\bar{\xi}_{II}|\bar{v} + c) \times f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}) f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{III}) f(\bar{\xi}_{III}, \bar{\xi}_{II}) B(\bar{\xi}_{III})|0\rangle. \quad (2.1)$$

Здесь функции K_n суть ССДС. Суммирование ведется по разбиению набора $\{\bar{v}, \bar{u}\}$ на три подмножества $\bar{\xi}_I$, $\bar{\xi}_{II}$ и $\bar{\xi}_{III}$, такие что $\#\bar{\xi}_I = \#\bar{\xi}_{II} = n$.

Доказательство данного утверждения можно провести аналогично доказательству перестановочного соотношения произведений операторов $A(\bar{v})$ и $B(\bar{u})$, т.е. двойной индукцией по m и n . Мы, однако, поступим иначе, и выведем сначала формулу (2.1) при $n = 1$ и произвольном m , а потом уже воспользуемся индукцией по n .

2.1. Действие одного оператора C на вектор Бете. Если вы уже проделывали это упражнение, то данный раздел можно пропустить. Впрочем, вы можете сравнить ваши собственные вычисления с теми, которые приведены ниже.

Напомним, что суть метода состоит в том, что сначала нужно в общих чертах представить, слагаемые какого типа могут входить в результат действия оператора $C(v)$ на вектор $B(\bar{u})|0\rangle$. Затем следует выбрать какое-то конкретное слагаемое и постараться получить именно его. При

²Множитель $(-1)^n$ не играет никакой роли, поскольку в любом случае собственные векторы операторов определены с точностью до фазового множителя.

³Здесь и в дальнейшем мы для краткости не делаем различия между обычными и дуальными векторами Бете, если это не приводит к недоразумениям.

этом мы можем пользоваться тем, что операторы B коммутируют между собой, следовательно, их можно переупорядочивать. При коммутации операторов C и B в силу соотношения (3.3.11)

$$[C(v), B(u)] = g(v, u)(D(v)A(u) - D(u)A(v)) \quad (2.2)$$

возникают операторы A и D . Те, в свою очередь, при движении направо будут переставляться с операторами $B(u_j)$. В результате этих перестановок операторы A и D могут либо сохранять свои аргументы, либо обмениваться ими с операторами B . Задача состоит в том, чтобы исходно так переупорядочить операторы B , чтобы для получения искомого вклада в конечный ответ операторы A и D могли бы двигаться направо единственно возможным способом. Рассмотрим теперь эту схему более подробно.

Поскольку $C(v)|0\rangle = 0$, то при действии оператора $C(v)$ на вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ на каком-то шаге обязан возникнуть коммутатор $[C(v), B(u_\ell)]$

$$C(v)B(\bar{u})|0\rangle = \sum_{\ell=1}^m B(u_1) \cdots B(u_{\ell-1}) [C(v), B(u_\ell)] B(u_{\ell+1}) \cdots B(u_m) |0\rangle. \quad (2.3)$$

В силу соотношения (2.2) получаем

$$C(v)B(\bar{u})|0\rangle = \sum_{\ell=1}^m g(v, u_\ell) B(u_1) \cdots B(u_{\ell-1}) (D(v)A(u_\ell) - D(u_\ell)A(v)) B(u_{\ell+1}) \cdots B(u_m) |0\rangle. \quad (2.4)$$

Далее необходимо двигать операторы A и D направо до тех пор, пока они не подействуют на $|0\rangle$ и дадут соответственно функции a и d . Тогда действие оператора $C(v)$ на вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ будет вычислено.

Заметим, что после того, как операторы A и D будут переставлены в крайнюю правую позицию, существует три варианта: оператор A зависит от v , а оператор D зависит от некоторого u_k ; оператор A зависит от некоторого u_k , а оператор D зависит от v ; оператор A зависит от некоторого u_j , а оператор D зависит от некоторого u_k . В результате после действия этих операторов на вакуумный вектор $|0\rangle$ мы получим слагаемые, пропорциональные либо $a(v)d(u_k)$, либо $d(v)a(u_k)$, либо $a(u_j)d(u_k)$. Легко также понять, что в первом и во втором случаях среди операторов B будет отсутствовать $B(u_k)$, а в третьем случае будут отсутствовать $B(u_k)$ и $B(u_j)$, но зато появится один новый оператор $B(v)$. Поэтому ответ может быть записан в следующем виде

$$C(v)B(\bar{u})|0\rangle = \sum_{k=1}^m (d(v)a(u_k)X_k + a(v)d(u_k)\tilde{X}_k) B(\bar{u}_k)|0\rangle + \sum_{j < k}^m (a(u_j)d(u_k)Y_{jk} + a(u_k)d(u_j)Y_{kj}) B(v)B(\bar{u}_{jk})|0\rangle. \quad (2.5)$$

В этой формуле \tilde{X}_k , X_k и Y_{jk} суть некоторые числовые коэффициенты, которые требуется определить. Символ \bar{u}_{jk} означает $\bar{u}_{jk} = \bar{u} \setminus \{u_j, u_k\}$. На этом заканчивается первый шаг нашего вывода — мы нашли схематическую форму ответа.

На втором шаге мы зафиксируем некоторое k и вычислим коэффициент X_k . При этом все остальные вклады мы будем отбрасывать¹. Воспользуемся коммутативностью операторов B и переставим $B(u_k)$ в крайнюю левую позицию по отношению к остальным операторам B :

$$C(v)B(\bar{u})|0\rangle = C(v)B(u_k)B(\bar{u}_k)|0\rangle. \quad (2.6)$$

¹Можно для удобства считать, что $d(u_s) = 0$ для всех $s = 1, \dots, m$, а также $a(v) = 0$ и $a(u_s) = 0$ для всех $s \neq k$. Тогда в формуле (2.5) автоматически выживет лишь одно слагаемое, пропорциональное X_k , — то самое, которое мы ищем.

Теперь становится очевидно, что при движении оператора $C(v)$ направо на первом же шаге должен образоваться коммутатор $[C(v), B(u_k)]$. Действительно, в противном случае мы получим $B(u_k)C(v)B(\bar{u}_k)|0\rangle$, т.е. оператор $B(u_k)$ будет стоять слева от оператора $C(v)$. Поэтому при дальнейшем движении $C(v)$ направо оператор $B(u_k)$ никак не затрагивается, и он заведомо войдет в конечный ответ. Между тем, коэффициент $d(v)a(u_k)X_k$ находится при векторе, который не зависит от $B(u_k)$. Следовательно, мы можем записать

$$C(v)B(\bar{u})|0\rangle = g(v, u_k)(D(v)A(u_k) - D(u_k)A(v))B(\bar{u}_k)|0\rangle + \mathcal{Z}, \quad (2.7)$$

где символом \mathcal{Z} мы обозначили слагаемые, которые заведомо не дают вклада в коэффициент X_k .

Несложно сообразить, что слагаемое $D(u_k)A(v)$ также не может дать вклада в искомый ответ. Действительно, при движении оператора $A(v)$ направо он может либо сохранить свой аргумент v , либо обменяться аргументами с одним из операторов B . В первом случае после действия на вакуум он даст $a(v)$, во втором — $a(u_j)$ с $u_j \neq u_k$. Ни та, ни другая функция не может находиться при коэффициенте X_k . Таким образом

$$C(v)B(\bar{u})|0\rangle = g(v, u_k)D(v)A(u_k)B(\bar{u}_k)|0\rangle + \mathcal{Z}. \quad (2.8)$$

Теперь, передвигая оператор $A(v)$ направо, мы обязаны каждый раз сохранять его аргумент u_k . Если хотя бы раз оператор A обменяется аргументами с одним из операторов B , то возникнет произведение $B(u_k)A(u_j)$, и при дальнейших перестановках оператор A уже не сможет приобрести потерянный аргумент u_k , а значит, мы не сможем получить в ответе функцию $a(u_k)$. Это означает, что

$$A(u_k)B(u_j) = f(u_j, u_k)B(u_j)A(u_k) + \mathcal{Z}, \quad (2.9)$$

где через \mathcal{Z} по-прежнему обозначены слагаемые, не дающие вклада в ответ. Тогда

$$C(v)B(\bar{u})|0\rangle = g(v, u_k)a(u_k)f(\bar{u}_k, u_k)D(v)B(\bar{u}_k)|0\rangle + \mathcal{Z}. \quad (2.10)$$

Точно так же мы заключаем, что при движении направо оператора $D(v)$ он должен всякий раз сохранять свой аргумент, т.е. коммутационное соотношение операторов D и B в данном случае можно записать в виде

$$D(v)B(u_j) = f(v, u_j)B(u_j)D(v) + \mathcal{Z}. \quad (2.11)$$

В результате мы получаем

$$C(v)B(\bar{u})|0\rangle = g(v, u_k)a(u_k)d(v)f(\bar{u}_k, u_k)f(v, \bar{u}_k)B(\bar{u}_k)|0\rangle + \mathcal{Z}, \quad (2.12)$$

откуда

$$X_k = g(v, u_k)f(\bar{u}_k, u_k)f(v, \bar{u}_k). \quad (2.13)$$

Коэффициент \tilde{X}_k вычисляется аналогично. Те же самые рассуждения приводят нас к формуле (2.7). Теперь уже слагаемое $D(v)A(u_k)$ не дает вклада в искомый ответ, поэтому вместо формулы (2.8) мы имеем

$$C(v)B(\bar{u})|0\rangle = g(u_k, v)D(u_k)A(v)B(\bar{u}_k)|0\rangle + \mathcal{Z}. \quad (2.14)$$

Далее операторы $D(u_k)$ и $A(v)$ должны двигаться направо, сохраняя свои аргументы, что в конечном итоге приводит нас к следующему результату

$$\tilde{X}_k = g(u_k, v)f(u_k, \bar{u}_k)f(\bar{u}_k, v). \quad (2.15)$$

Коэффициент Y_{jk} находится примерно в том же духе. Вычислим, например, вклад, пропорциональный $a(u_j)d(u_k)Y_{jk}$. Понятно, что для этого нам прежде всего необходимо переупорядочить операторы B следующим образом:

$$C(v)B(\bar{u})|0\rangle = C(v)B(u_k)B(u_j)B(\bar{u}_{jk})|0\rangle. \quad (2.16)$$

И снова на первом шаге вклад в интересующее нас слагаемое дает только коммутатор $[C(v), B(u_k)]$

$$C(v)B(\bar{u})|0\rangle = g(v, u_k)(D(v)A(u_k) - D(u_k)A(v))B(u_j)B(\bar{u}_{jk})|0\rangle + \mathcal{Z}. \quad (2.17)$$

Далее, однако, ситуация несколько меняется. Рассмотрим действие операторов $D(v)A(u_k)$. Ясно, что при перестановке операторов $A(u_k)$ и $B(u_j)$ они обязаны обмениваться аргументами, в противном случае при дальнейших перестановках оператор $A(u_k)$ не сможет заработать аргумент u_j и не сможет превратиться в функцию $a(u_j)$. Точно так же оператор $D(v)$ обязан обмениваться аргументами с оператором $B(u_k)$, чтобы приобрести нужный аргумент u_k . То есть

$$D(v)A(u_k)B(u_j) = g(u_k, u_j)g(u_k, v) B(v)D(u_k)A(u_j) + \mathcal{Z}. \quad (2.18)$$

Теперь рассмотрим действие операторов $D(u_k)A(v)$. Здесь также оператор $A(v)$ обязан обмениваться аргументами с оператором $B(u_j)$, чтобы приобрести нужный аргумент u_j . Однако оператор $D(u_k)$ при перестановке с оператором $B(v)$ обязан сохранить свой аргумент, т. е.

$$D(u_k)A(v)B(u_j) = g(v, u_j)f(u_k, v) B(v)D(u_k)A(u_j) + \mathcal{Z}. \quad (2.19)$$

В итоге мы получаем

$$(D(v)A(u_k) - D(u_k)A(v))B(u_j) = (g(u_k, u_j)g(u_k, v) - g(v, u_j)f(u_k, v)) B(v)D(u_k)A(u_j) + \mathcal{Z}. \quad (2.20)$$

Несложно проверить, что

$$g(u_k, u_j)g(u_k, v) - g(v, u_j)f(u_k, v) = f(u_k, u_j)g(u_j, v), \quad (2.21)$$

и, подставляя (2.20), (2.21) в (2.17), мы приходим к формуле

$$C(v)B(\bar{u})|0\rangle = g(v, u_k)g(u_j, v)f(u_k, u_j) B(v)D(u_k)A(u_j)B(\bar{u}_{jk})|0\rangle + \mathcal{Z}. \quad (2.22)$$

В дальнейшем, при движении направо, операторы $D(u_k)$ и $A(u_j)$ обязаны сохранять свои аргументы, что дает нам

$$C(v)B(\bar{u})|0\rangle = g(v, u_k)g(u_j, v)f(u_k, u_j)f(u_k, \bar{u}_{jk})f(\bar{u}_{jk}, u_j)d(u_k)a(u_j) B(v)B(\bar{u}_{jk})|0\rangle + \mathcal{Z}, \quad (2.23)$$

откуда следует, что

$$Y_{jk} = g(v, u_k)g(u_j, v)f(u_k, u_j)f(u_k, \bar{u}_{jk})f(\bar{u}_{jk}, u_j). \quad (2.24)$$

Итак, все неизвестные коэффициенты в формуле (2.5) найдены, и мы можем теперь сравнить ее с формулой (2.1) при $n = 1$. В формуле (2.1) возможны три существенно различных разбиения:

- $\bar{\xi}_I = v$; $\bar{\xi}_{II} = u_k$, $k = 1, \dots, m$; $\bar{\xi}_{III} = \bar{u}_k$;
- $\bar{\xi}_I = u_k$, $k = 1, \dots, m$; $\bar{\xi}_{II} = v$; $\bar{\xi}_{III} = \bar{u}_k$;
- $\bar{\xi}_I = u_k$, $k = 1, \dots, m$; $\bar{\xi}_{II} = u_j$, $j = 1, \dots, m$, $j \neq k$; $\bar{\xi}_{III} = \{v, \bar{u}_{jk}\}$.

Мы предоставляем читателю самостоятельно убедиться в том, что первое разбиение дает коэффициент X_k , второе — \tilde{X}_k , а третье — Y_{jk} .

2.2. Действие произведения операторов C на вектор Бете. Таким образом, формула (2.1) доказана при $n = 1$, и теперь мы можем действовать по индукции. Допустим, что равенство (2.1) справедливо для $\#\bar{v} = n - 1$. Подействуем произведением $C(\bar{v})$ на вектор $B(\bar{u})|0\rangle$. Сначала подействуем произведением $C(\bar{v}_n)$ по формуле (2.1), в которой надо заменить n на $n - 1$:

$$C(\bar{v})B(\bar{u})|0\rangle = \sum_{\{\bar{v}_n, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{III}\}} d(\bar{\xi}_I)a(\bar{\xi}_{II})K_{n-1}(\bar{v}_n|\bar{\xi}_I + c)K_{n-1}(\bar{\xi}_{II}|\bar{v}_n + c) \times f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II})f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{III})f(\bar{\xi}_{III}, \bar{\xi}_{II}) C(v_n)B(\bar{\xi}_{III})|0\rangle. \quad (2.25)$$

Теперь подействуем оставшимся оператором $C(v_n)$ на $B(\bar{\xi}_{III})|0\rangle$. При этом мы снова можем пользоваться формулой (2.1), положив в ней $n = 1$:

$$C(\bar{v})B(\bar{u})|0\rangle = \sum_{\{\bar{v}_n, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{III}\}} d(\bar{\xi}_I)a(\bar{\xi}_{II})K_{n-1}(\bar{v}_n|\bar{\xi}_I + c)K_{n-1}(\bar{\xi}_{II}|\bar{v}_n + c) \times f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II})f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{III})f(\bar{\xi}_{III}, \bar{\xi}_{II}) \sum_{\{v_n, \bar{\xi}_{III}\} \mapsto \{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{III}\}} d(\bar{\xi}_I)a(\bar{\xi}_{II})K_1(v_n|\bar{\xi}_I + c)K_1(\bar{\xi}_{II}|v_n + c) \times f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II})f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{III})f(\bar{\xi}_{III}, \bar{\xi}_{II}) B(\bar{\xi}_{III})|0\rangle. \quad (2.26)$$

В формуле (2.26) сначала набор $\{\bar{v}_n, \bar{u}\}$ разбивается на три подмножества $\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{III}$, после чего оставшаяся переменная v_n объединяется с подмножеством $\bar{\xi}_{III}$ в новый набор $\{v_n, \bar{\xi}_{III}\}$, который в свою очередь разбивается на подмножества $\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}$ и $\bar{\xi}_{III}$. При этом мы требуем, чтобы $\#\bar{\xi}_I = \#\bar{\xi}_{II} = n - 1$ и $\#\bar{\xi}_I = \#\bar{\xi}_{II} = 1$. Суммирование ведется по всем таким разбиениям. Мы можем сказать, что суммирование ведется по разбиению набора $\{\bar{v}, \bar{u}\}$ на пять подмножеств $\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}$ и $\bar{\xi}_{III}$, причем $v_n \notin \bar{\xi}_I$ и $v_n \notin \bar{\xi}_{II}$.

Напомним вкратце общую стратегию дальнейших действий. Задача состоит в том, чтобы выполнить суммирование по части разбиений с помощью леммы 8.2.1. Для этого, во-первых, следует переписать выражение (2.26) таким образом, чтобы ограничения $v_n \notin \bar{\xi}_I$ и $v_n \notin \bar{\xi}_{II}$ выполнялись бы автоматически. Во-вторых, следует определить, по каким разбиениям суммирование в принципе не возможно. Уже из формулы (2.26) видно, что подмножество $\bar{\xi}_{III}$ фиксировано произведением операторов B . Аналогично, произведение функций d фиксирует объединение подмножеств $\{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_I\}$, а произведение функций a фиксирует объединение $\{\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{II}\}$. Таким образом, при любых преобразованиях выражения (2.26) эти три набора остаются неизменными. Зато разбиения внутри подмножеств $\{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_I\}$ и $\{\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{II}\}$ приводят лишь к изменению рационального коэффициента, и суммы по этим разбиениям можно попытаться вычислить. Для этого следует преобразовать некоторые СДС так, чтобы свести эти суммы к тождеству (8.2.4).

Поскольку $\bar{\xi}_{III} = \{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{III}\} \setminus v_n$, мы имеем

$$f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{III}) = \frac{f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_I)f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II})f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{III})}{f(\bar{\xi}_I, v_n)}, \quad (2.27)$$

$$f(\bar{\xi}_{III}, \bar{\xi}_{II}) = \frac{f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II})f(\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{II})f(\bar{\xi}_{III}, \bar{\xi}_{II})}{f(v_n, \bar{\xi}_{II})}.$$

Выражения в правых частях (2.27) обращаются в нуль, как только $v_n \in \bar{\xi}_I$ или $v_n \in \bar{\xi}_{II}$. Подставляя эти выражения в (2.26) вместо $f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{III})$ и $f(\bar{\xi}_{III}, \bar{\xi}_{II})$, мы получаем сумму по разбиениям на пять подмножеств уже без всяких ограничений:

$$C(\bar{v})B(\bar{u})|0\rangle = \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{III}\}} d(\bar{\xi}_I)d(\bar{\xi}_I)a(\bar{\xi}_{II})a(\bar{\xi}_{II}) \times K_{n-1}(\bar{v}_n|\bar{\xi}_I + c)K_1(v_n|\bar{\xi}_I + c) \cdot K_{n-1}(\bar{\xi}_{II}|\bar{v}_n + c)K_1(\bar{\xi}_{II}|v_n + c)$$

$$\begin{aligned} & \times f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II})f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_I)f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II})f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{III})f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II})f(\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_I)f(\bar{\xi}_{III}, \bar{\xi}_I)f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II})f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{III})f(\bar{\xi}_{III}, \bar{\xi}_{II}) \\ & \times f^{-1}(\bar{\xi}_I, v_n)f^{-1}(v_n, \bar{\xi}_{II}) B(\bar{\xi}_{III})|0\rangle. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Введем новые наборы $\{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_I\} = \bar{\xi}_0$ и $\{\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{II}\} = \bar{\xi}_{0'}$. Несложно убедиться в том, что тогда формула (2.28) переписывается следующим образом

$$\begin{aligned} C(\bar{v})B(\bar{u})|0\rangle &= \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{\xi}_0, \bar{\xi}_{0'}, \bar{\xi}_{III}\}} d(\bar{\xi}_0)a(\bar{\xi}_{0'})f(\bar{\xi}_0, \bar{\xi}_{0'})f(\bar{\xi}_0, \bar{\xi}_{III})f(\bar{\xi}_{III}, \bar{\xi}_{0'}) B(\bar{\xi}_{III})|0\rangle \\ & \times \sum_{\bar{\xi}_0 \mapsto \{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_I\}} K_{n-1}(\bar{v}_n|\bar{\xi}_I + c)K_1(v_n|\bar{\xi}_I + c) \frac{f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_I)}{f(\bar{\xi}_I, v_n)} \\ & \times \sum_{\bar{\xi}_{0'} \mapsto \{\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{II}\}} K_{n-1}(\bar{\xi}_{II}|\bar{v}_n + c)K_1(\bar{\xi}_{II}|v_n + c) \frac{f(\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{II})}{f(v_n, \bar{\xi}_{II})}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Теперь суммирование по разбиениям устроено следующим образом. Сначала набор $\{\bar{v}, \bar{u}\}$ разбивается на три подмножества $\bar{\xi}_0$, $\bar{\xi}_{0'}$ и $\bar{\xi}_{III}$. После этого подмножество $\bar{\xi}_0$ еще раз разбивается на $\bar{\xi}_I$ и $\bar{\xi}_I$, а подмножество $\bar{\xi}_{0'}$ — на $\bar{\xi}_{II}$ и $\bar{\xi}_{II}$. Теперь воспользуемся свойством ССДС

$$K_1(v_n|\bar{\xi}_I + c) = -f^{-1}(\bar{\xi}_I, v_n)K_1(\bar{\xi}_I|v_n), \quad K_1(\bar{\xi}_{II}|v_n + c) = -f^{-1}(v_n, \bar{\xi}_{II})K_1(v_n|\bar{\xi}_{II}). \quad (2.30)$$

Подставляя эти выражения в (2.29), получаем

$$\begin{aligned} C(\bar{v})B(\bar{u})|0\rangle &= \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{\xi}_0, \bar{\xi}_{0'}, \bar{\xi}_{III}\}} d(\bar{\xi}_0)a(\bar{\xi}_{0'}) \frac{f(\bar{\xi}_0, \bar{\xi}_{0'})f(\bar{\xi}_0, \bar{\xi}_{III})f(\bar{\xi}_{III}, \bar{\xi}_{0'})}{f(\bar{\xi}_0, v_n)f(v_n, \bar{\xi}_{0'})} B(\bar{\xi}_{III})|0\rangle \\ & \times \sum_{\bar{\xi}_0 \mapsto \{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_I\}} K_{n-1}(\bar{v}_n - c|\bar{\xi}_I)K_1(\bar{\xi}_I|v_n)f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_I) \\ & \times \sum_{\bar{\xi}_{0'} \mapsto \{\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{II}\}} K_{n-1}(\bar{\xi}_{II}|\bar{v}_n + c)K_1(v_n|\bar{\xi}_{II})f(\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{II}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Суммы во второй и третьей строке формулы (2.31) вычисляются с помощью леммы 8.2.1:

$$\sum_{\bar{\xi}_0 \mapsto \{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_I\}} K_{n-1}(\bar{v}_n - c|\bar{\xi}_I)K_1(\bar{\xi}_I|v_n)f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_I) = -f(\bar{\xi}_0, v_n)K_n(\bar{v} - c|\bar{\xi}_0) \quad (2.32)$$

и

$$\sum_{\bar{\xi}_{0'} \mapsto \{\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{II}\}} K_{n-1}(\bar{\xi}_{II}|\bar{v}_n + c)K_1(v_n|\bar{\xi}_{II})f(\bar{\xi}_{II}, \bar{\xi}_{II}) = -f(v_n, \bar{\xi}_{0'})K_n(\bar{\xi}_{0'}|\bar{v} + c). \quad (2.33)$$

Подставляя эти выражения в (2.31), окончательно получаем

$$\begin{aligned} C(\bar{v})B(\bar{u})|0\rangle &= \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{\xi}_0, \bar{\xi}_{0'}, \bar{\xi}_{III}\}} d(\bar{\xi}_0)a(\bar{\xi}_{0'})f(\bar{\xi}_0, \bar{\xi}_{0'})f(\bar{\xi}_0, \bar{\xi}_{III})f(\bar{\xi}_{III}, \bar{\xi}_{0'}) \\ & \times K_n(\bar{v}|\bar{\xi}_0 + c)K_n(\bar{\xi}_{0'}|\bar{v} + c) B(\bar{\xi}_{III})|0\rangle. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Остается переобозначить $\bar{\xi}_0 \rightarrow \bar{\xi}_I$, $\bar{\xi}_{0'} \rightarrow \bar{\xi}_{II}$ и $\bar{\xi}_{III} \rightarrow \bar{\xi}_{III}$, после чего мы приходим к формуле (2.1) с $\#\bar{v} = n$.

3. Скалярное произведение

В формуле (2.1) предполагалось, что $n \leq m$. Действительно, поскольку $\#\bar{\xi}_I = \#\bar{\xi}_{II} = n$, то $\#\bar{\xi}_{III} = m - n$, и при $n > m$ формула теряет смысл. С другой стороны, вполне очевидно, что если количество операторов уничтожения C превышает количество операторов рождения B , то действие произведения $C(\bar{v})$ на вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ просто дает нуль, так что случай $n > m$ неинтересен. Гораздо более интересным и важным является частный случай $n = m$, в котором мы сразу же получаем формулу для скалярного произведения дуального вектора $\langle 0|C(\bar{v})$ на вектор $B(\bar{u})|0\rangle$. При $n = m$ мы получаем $\#\bar{\xi}_{III} = 0$, т. е. $\bar{\xi}_{III} = \emptyset$, и формула (2.1) упрощается

$$C(\bar{v})B(\bar{u})|0\rangle = \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}\}} d(\bar{\xi}_I)a(\bar{\xi}_{II})K_n(\bar{v}|\bar{\xi}_I + c)K_n(\bar{\xi}_{II}|\bar{v} + c)f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II})|0\rangle. \quad (3.1)$$

Принимая во внимание, что $\langle 0|0\rangle = 1$, мы немедленно получаем

$$\langle 0|C(\bar{v})B(\bar{u})|0\rangle = \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}\}} d(\bar{\xi}_I)a(\bar{\xi}_{II})K_n(\bar{v}|\bar{\xi}_I + c)K_n(\bar{\xi}_{II}|\bar{v} + c)f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}). \quad (3.2)$$

Формула (3.2) является, пожалуй, самой компактной формой записи для скалярного произведения, если на параметры \bar{v} и \bar{u} не наложены какие-либо дополнительные условия. Оказывается, однако, что если один из векторов в формуле (3.2) является собственным вектором трансформатрицы, то сумма по разбиениям сводится к некоторому детерминанту. Для того чтобы увидеть это, необходимо записать (3.2) более подробно, а именно перейти от разбиений объединенного набора $\{\bar{v}, \bar{u}\}$ к независимым разбиениям наборов \bar{v} и \bar{u} . Пусть

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_I &= \{\bar{v}_{II}, \bar{u}_I\}, & \#\bar{v}_{II} &= \#\bar{u}_I = k, \\ \bar{\xi}_{II} &= \{\bar{v}_I, \bar{u}_{II}\}, & \#\bar{v}_I &= \#\bar{u}_{II} = n - k, \end{aligned} \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Легко видеть, что тогда

$$d(\bar{\xi}_I)a(\bar{\xi}_{II}) = d(\bar{v}_{II})d(\bar{u}_I)a(\bar{v}_I)a(\bar{u}_{II}) \quad (3.4)$$

и

$$f(\bar{\xi}_I, \bar{\xi}_{II}) = f(\bar{v}_{II}, \bar{v}_I)f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II})f(\bar{v}_I, \bar{u}_{II})f(\bar{u}_I, \bar{v}_I). \quad (3.5)$$

ССДС K_n преобразуются с помощью формул редукции, например,

$$\begin{aligned} K_n(\bar{v}|\bar{\xi}_I + c) &= K_n(\{\bar{v}_{II}, \bar{v}_I\}|\{\bar{v}_{II} + c, \bar{v}_I + c\}) \\ &= (-1)^k K_{n-k}(\bar{v}_I|\bar{u}_I + c) = (-1)^n f^{-1}(\bar{u}_I, \bar{v}_I)K_{n-k}(\bar{u}_I|\bar{v}_I). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} K_n(\bar{\xi}_{II}|\bar{v} + c) &= K_n(\{\bar{v}_I, \bar{u}_{II}\}|\{\bar{v}_I + c, \bar{v}_I + c\}) \\ &= (-1)^{n-k} K_k(\bar{u}_{II}|\bar{v}_{II} + c) = (-1)^n f^{-1}(\bar{v}_{II}, \bar{u}_{II})K_k(\bar{v}_{II}|\bar{u}_{II}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Подставляя (3.4)–(3.7) в (3.2), мы получаем

$$\langle 0|C(\bar{v})B(\bar{u})|0\rangle = \sum_{\substack{\bar{v} \mapsto \{\bar{v}_I, \bar{v}_{II}\} \\ \bar{u} \mapsto \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\}}} d(\bar{v}_{II})a(\bar{u}_{II})d(\bar{u}_I)a(\bar{v}_I)K_k(\bar{v}_{II}|\bar{u}_{II})K_{n-k}(\bar{u}_I|\bar{v}_I)f(\bar{v}_{II}, \bar{v}_I)f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II}). \quad (3.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из представления (3.8) видно, что

$$\langle 0|C(\bar{v})B(\bar{u})|0\rangle = \langle 0|C(\bar{u})B(\bar{v})|0\rangle. \quad (3.9)$$

Действительно, если в формуле (3.8) сделать замену $\bar{u} \leftrightarrow \bar{v}$ и поменять всюду индексы суммирования I на II , то эта формула перейдет сама в себя.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть параметры u_1 и u_2 таковы, что $a(u_1) = 0$, $d(u_2) = 0$ и $u_2 = u_1 + c$. Тогда если $\{u_1, u_2\} \subset \bar{u}$, то вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ является нуль-вектором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим скалярное произведение вектора $B(\bar{u})|0\rangle$ с произвольным дуальным вектором $\langle 0|C(\bar{v})$. Из условий $a(u_1) = 0$ и $d(u_2) = 0$ следует, что в формуле (3.8) ненулевой вклад дают только такие разбиения набора \bar{u} , при которых $u_1 \in \bar{u}_I$ и $u_2 \in \bar{u}_II$. Но тогда произведение $f(\bar{u}_I, \bar{u}_II)$ содержит функцию $f(u_1, u_2)$, которая обращается в нуль в силу условия $u_2 = u_1 + c$. Таким образом, скалярное произведение вектора $B(\bar{u})|0\rangle$ с любым дуальным вектором обращается в нуль, следовательно, $B(\bar{u})|0\rangle$ является нуль-вектором.

Ситуация, описанная в предложении 3.1, уже рассматривалась нами ранее для частного случая XXX цепочки, состоящей из четырех узлов. Напомним, что это было связано с изучением решений уравнений Бете. Дело в том, что в модели XXX формально существуют решения этих уравнений, в которых⁴ $u_1 = -c/2$ и $u_2 = c/2$. Однако, как мы теперь видим, вектор, построенный по такому решению, обращается в нуль. Следовательно, он по определению не может быть собственным вектором трансфер-матрицы (да и любого другого оператора).

Вернемся к изучению скалярных произведений. Введем обозначение

$$S_n(\bar{v}|\bar{u}) = \frac{\langle 0|C(\bar{v})B(\bar{u})|0\rangle}{d(\bar{v})d(\bar{u})}, \quad (3.10)$$

а также новую функцию $r(u) = a(u)/d(u)$. Тогда формула (3.8) записывается в виде

$$S_n(\bar{v}|\bar{u}) = \sum_{\substack{\bar{v} \rightarrow \{\bar{v}_I, \bar{v}_{II}\} \\ \bar{u} \rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\}}} r(\bar{u}_{II})r(\bar{v}_I) K_k(\bar{v}_{II}|\bar{u}_{II})K_{n-k}(\bar{u}_I|\bar{v}_I) f(\bar{v}_{II}, \bar{v}_I)f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II}). \quad (3.11)$$

ВОПРОС. Пусть функция $r(u)$ тождественно равна 1. Тогда формула (3.11) принимает вид

$$S_n(\bar{v}|\bar{u}) = \sum_{\substack{\bar{v} \rightarrow \{\bar{v}_I, \bar{v}_{II}\} \\ \bar{u} \rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\}}} K_k(\bar{v}_{II}|\bar{u}_{II})K_{n-k}(\bar{u}_I|\bar{v}_I) f(\bar{v}_{II}, \bar{v}_I)f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II}). \quad (3.12)$$

Утверждается, что тогда $S_n(\bar{v}|\bar{u}) = 0$ при $n > 0$. Это утверждение можно доказать по крайней мере двумя способами. Можно вернуться к формуле (3.2) и воспользоваться леммой 8.2.1. Но есть и другой способ, который не требует никаких вычислений. Попробуйте найти этот способ.

Предположим теперь, что вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ является собственным вектором твистованной трансфер-матрицы⁵. Это означает, что параметры \bar{u} удовлетворяют уравнениям Бете

$$r(u_j) = \kappa \frac{f(u_j, \bar{u}_j)}{f(\bar{u}_j, u_j)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Отсюда немедленно следует, что

$$r(\bar{u}_{II})f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II}) = \kappa^k f(\bar{u}_{II}, \bar{u}_I), \quad (3.14)$$

где $k = \#\bar{u}_{II}$. Подставляя (3.14) в (3.11), получаем

$$S_n(\bar{v}|\bar{u}) = \sum_{\substack{\bar{v} \rightarrow \{\bar{v}_{II}, \bar{v}_I\} \\ \bar{u} \rightarrow \{\bar{u}_{II}, \bar{u}_I\}}} \kappa^k r(\bar{v}_I) K_k(\bar{v}_{II}|\bar{u}_{II})K_{n-k}(\bar{u}_I|\bar{v}_I) f(\bar{v}_{II}, \bar{v}_I)f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II}), \quad (3.15)$$

⁴В моделях с тригонометрической R -матрицей это корни $u_1 = -\eta/2$ и $u_2 = \eta/2$.

⁵В том числе, параметр твиста κ может равняться и 1. В данном случае нет принципиальной разницы между обычными и твистованными on-shell векторами, и мы рассматриваем последние исключительно ради общности.

и мы видим, что сумму по разбиениям набора \bar{u} можно явно вычислить с помощью леммы 8.2.1:

$$\sum_{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\}} K_k(\bar{v}_{II} | \bar{u}_{II}) K_{n-k}(\bar{u}_I | \bar{v}_I) f(\bar{u}_{II}, \bar{u}_I) = (-1)^{n-k} f(\bar{u}, \bar{v}_I) K_n(\{\bar{v}_I - c, \bar{v}_{II}\} | \bar{u}). \quad (3.16)$$

Таким образом, мы приходим к следующей формуле:

$$S_n(\bar{v} | \bar{u}) = \sum_{\bar{v} \rightarrow \{\bar{v}_I, \bar{v}_{II}\}} (-1)^{n-k} \kappa^k r(\bar{v}_I) K_n(\{\bar{v}_I - c, \bar{v}_{II}\} | \bar{u}) f(\bar{v}_{II}, \bar{v}_I) f(\bar{u}, \bar{v}_I). \quad (3.17)$$

Сумма в правой части равенства (3.17) непосредственно сводится к детерминанту матрицы размера $n \times n$. Однако увидеть это не просто, поэтому мы на этом месте сделаем остановку, а в следующем разделе получим некоторые тождества общего характера для детерминантов.

4. Тождество для детерминантов

Мы начнем с простейших соотношений и постепенно будем переходить к более сложным, вводя новые понятия и обозначения. Пусть на некотором наборе $\bar{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ определены две функции $\alpha(v_j)$ и $\beta(v_j)$. Распространим на эти функции соглашение о сокращенных обозначениях. Очевидно, что

$$\prod_{v_j \in \bar{v}} (\alpha(v_j) + \beta(v_j)) = \sum_{\bar{v} \rightarrow \{\bar{v}^I, \bar{v}^{II}\}} \alpha(\bar{v}^I) \beta(\bar{v}^{II}). \quad (4.1)$$

Здесь суммирование ведется по всем разбиениям набора \bar{v} на два подмножества \bar{v}^I и \bar{v}^{II} , таких что $\#\bar{v}^I = m$, $\#\bar{v}^{II} = n - m$, причем m принимает все возможные значения: $m = 0, 1, \dots, n$. Обратите внимание, что в отличие от предыдущих разделов, здесь и далее индексы I и II , нумерующие подмножества, будет удобнее писать сверху.

Аналогичное тождество легко вывести и для детерминантов матриц $n \times n$. Однако прежде необходимо ввести несколько новых понятий. До сих пор мы имели дело с суммами по разбиениям, в которых фигурировали функции, симметричные по своим аргументам (как например, в (4.1)). Поэтому порядок элементов в каждом подмножестве был не существен. Когда же мы имеем дело с детерминантами, у нас возникают функции, антисимметричные по своим аргументам. Поэтому надо договориться о порядке элементов в каждом подмножестве. Будем считать, что если набор \bar{v} разбит на два (или более) подмножества \bar{v}^I и \bar{v}^{II} , то в каждом из них элементы упорядочены по возрастанию индексов. Например: $\bar{v} = \{v_1, \dots, v_5\}$, $\bar{v}^I = \{v_1, v_4\}$ и $\bar{v}^{II} = \{v_2, v_3, v_5\}$. Такое упорядочение будем называть *нормальным порядком*.

Введем также понятие *четности разбиения*. Четностью разбиения $P(\bar{v}^I, \bar{v}^{II})$ будем называть четность перестановки, которая переводит объединение двух подмножеств $\{\bar{v}^I, \bar{v}^{II}\}$ (в каждом из которых элементы стоят в нормальном порядке) в нормально упорядоченный набор \bar{v} . Так, в приведенном выше примере объединение двух подмножеств имеет вид $\{\bar{v}^I, \bar{v}^{II}\} = \{v_1, v_4, v_2, v_3, v_5\}$. Легко видеть, что перестановка, переводящая эту последовательность в нормально упорядоченный набор $\bar{v} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, имеет четность $+1$, поэтому и четность данного разбиения равна $+1$.

Наконец, введем еще два новых обозначения

$$\Delta_n(\bar{v}) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} g(v_k, v_j), \quad \Delta'_n(\bar{v}) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} g(v_j, v_k) = (-1)^{n(n-1)/2} \Delta_n(\bar{v}). \quad (4.2)$$

Предложение 4.1. Для всякого разбиения набора \bar{v} на два подмножества \bar{v}^I и \bar{v}^{II} таких, что $\#\bar{v}^I = m$, $\#\bar{v}^{II} = n - m$, где m — любое из набора $0, 1, \dots, n$, справедливо равенство

$$\Delta_n(\bar{v}) = (-1)^{P(\bar{v}^I, \bar{v}^{II})} \Delta_m(\bar{v}^I) \Delta_{n-m}(\bar{v}^{II}) g(\bar{v}^{II}, \bar{v}^I). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что с точностью до константы $\Delta_n^{-1}(\bar{v})$ является определителем Вандермонда, составленного из переменных \bar{v} :

$$\Delta_n^{-1}(\bar{v}) = c^{-n(n-1)/2} \det_n \left(v_k^{j-1} \right). \quad (4.4)$$

Для любого фиксированного разбиения набора \bar{v} на два подмножества \bar{v}^I и \bar{v}^{II} переставим столбцы определителя так, чтобы все $v_k \in \bar{v}^I$ оказались слева, а все $v_k \in \bar{v}^{II}$ оказались справа. При этом в каждом подмножестве \bar{v}^I и \bar{v}^{II} столбцы упорядочены в нормальном порядке. Тогда

$$\Delta_n^{-1}(\bar{v}) = (-1)^{P(\bar{v}^I, \bar{v}^{II})} c^{-n(n-1)/2} \det_n \left((v_k^I)^{j-1} \mid (v_k^{II})^{j-1} \right). \quad (4.5)$$

Очевидно, что определитель в правой части (4.5) равен

$$\det_n \left((v_k^I)^{j-1} \mid (v_k^{II})^{j-1} \right) = \prod_{\substack{j < k \\ v_j, v_k \in \bar{v}^I}} (v_k - v_j) \prod_{\substack{j < k \\ v_j, v_k \in \bar{v}^{II}}} (v_k - v_j) \prod_{v_j \in \bar{v}^I} \prod_{v_k \in \bar{v}^{II}} (v_k - v_j), \quad (4.6)$$

и, обращая это равенство, мы приходим к утверждению предложения 4.1.

Перейдем теперь к формулам для разложения детерминантов в суммы по разбиениям. Пусть у нас теперь есть два набора $\bar{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$ и $\bar{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Определим на этих наборах две функции от двух переменных $\Phi_\ell(u_j, v_k)$, $\ell = 1, 2$, и составим матрицу

$$M_{jk} = \alpha(v_k) \Phi_1(u_j, v_k) + \beta(v_k) \Phi_2(u_j, v_k), \quad (4.7)$$

где $\alpha(v_k)$ и $\beta(v_k)$ — по-прежнему некоторые функции, определенные на наборе \bar{v} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2.

$$\det_n(M_{jk}) = \sum_{\bar{v} \rightarrow \{\bar{v}^I, \bar{v}^{II}\}} (-1)^{P(\bar{v}^I, \bar{v}^{II})} \alpha(\bar{v}^I) \beta(\bar{v}^{II}) \det_n \left[\Phi_1(u_j, v_k^I) \mid \Phi_2(u_j, v_k^{II}) \right]. \quad (4.8)$$

Суммирование ведется по всем разбиениям набора \bar{v} на два нормально упорядоченных подмножества \bar{v}^I и \bar{v}^{II} , таких что $\#\bar{v}^I = m$, $\#\bar{v}^{II} = n - m$ и $m = 0, 1, \dots, n$. Матрица, чей детерминант входит в правую часть (4.8), состоит из двух частей. Первые m столбцов соответствуют подмножеству \bar{v}^I , и в них матричными элементами является функция $\Phi_1(u_j, v_k^I)$. Оставшиеся $n - m$ столбцов соответствуют подмножеству \bar{v}^{II} , и в них матричными элементами является функция $\Phi_2(u_j, v_k^{II})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем $\det_n(M_{jk})$ в соответствии с определением, т. е. как сумму по перестановкам с учетом их четности

$$\det_n(M_{jk}) = \sum_p (-1)^{[p]} M_{p(k), k} = \sum_p (-1)^{[p]} \prod_{k=1}^n [\alpha(v_k) \Phi_1(u_{p(k)}, v_k) + \beta(v_k) \Phi_2(u_{p(k)}, v_k)]. \quad (4.9)$$

Аналогично формуле (4.1), мы можем переписать (4.9) в виде

$$\det_n [\alpha(v_k) \Phi_1(u_j, v_k) + \beta(v_k) \Phi_2(u_j, v_k)] = \sum_{\bar{v} \rightarrow \{\bar{v}^I, \bar{v}^{II}\}} \alpha(\bar{v}^I) \beta(\bar{v}^{II}) W(\bar{v}^I, \bar{v}^{II}), \quad (4.10)$$

где коэффициенты $W(\bar{v}^I, \bar{v}^{II})$ не зависят от функций $\alpha(v)$ и $\beta(v)$, но зависят от конкретного разбиения на подмножества \bar{v}^I и \bar{v}^{II} . Для того чтобы найти эти коэффициенты, достаточно для данного фиксированного разбиения $\bar{v} \mapsto \{\bar{v}^I, \bar{v}^{II}\}$ положить в (4.10) $\alpha(v_k) = 0$ при $v_k \in \bar{v}^{II}$ и

$\beta(v_k) = 0$ при $v_k \in \bar{v}^I$. Тогда в правой части (4.10) останется всего одно слагаемое, отвечающее данному разбиению

$$\alpha(\bar{v}^I)\beta(\bar{v}^{\text{II}})W(\bar{v}^I, \bar{v}^{\text{II}}) = \det_n [\alpha(v_k)\Phi_1(u_j, v_k) + \beta(v_k)\Phi_2(u_j, v_k)] \Big|_{\substack{\alpha(v_k)=0 & \text{при } v_k \in \bar{v}^{\text{II}}, \\ \beta(v_k)=0 & \text{при } v_k \in \bar{v}^I}} \quad (4.11)$$

откуда

$$W(\bar{v}^I, \bar{v}^{\text{II}}) = \det_n [\Phi(u_j, v_k)], \quad (4.12)$$

где функция $\Phi(u_j, v_k)$ совпадает либо с $\Phi_1(u_j, v_k)$, либо с $\Phi_2(u_j, v_k)$:

$$\Phi(u_j, v_k) = \begin{cases} \Phi_1(u_j, v_k), & \text{если } v_k \in \bar{v}^I, \\ \Phi_2(u_j, v_k), & \text{если } v_k \in \bar{v}^{\text{II}}. \end{cases} \quad (4.13)$$

Остается переставить столбцы этой матрицы так, что бы все переменные из подмножества \bar{v}^I оказались в нормальном порядке слева

$$W(\bar{v}^I, \bar{v}^{\text{II}}) = (-1)^{P(\bar{v}^I, \bar{v}^{\text{II}})} \det_n [\Phi_1(u_j, v_k^I) \mid \Phi_2(u_j, v_k^{\text{II}})]. \quad (4.14)$$

Подставляя (4.14) в (4.10), приходим к формуле (4.8).

Комбинируя формулы (4.8) и (4.3), мы немедленно получаем

$$\begin{aligned} \Delta_n(\bar{v}) \det_n [\alpha(v_k)\Phi_1(u_j, v_k) + \beta(v_k)\Phi_2(u_j, v_k)] \\ = \sum_{\bar{v} \mapsto \{\bar{v}^I, \bar{v}^{\text{II}}\}} \Delta_m(\bar{v}^I)\Delta_{n-m}(\bar{v}^{\text{II}})g(\bar{v}_{\text{II}}, \bar{v}_I)\alpha(\bar{v}^I)\beta(\bar{v}^{\text{II}}) \det_n [\Phi_1(u_j, v_k^I) \mid \Phi_2(u_j, v_k^{\text{II}})]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Нам остается лишь заметить, что при выводе формулы (4.15) ничего не изменится, если мы позволим функциям α и β симметричным образом зависеть от набора переменных \bar{u} :

$$\alpha(v_k) = \alpha(v_k|\bar{u}), \quad \beta(v_k) = \beta(v_k|\bar{u}). \quad (4.16)$$

Тогда выражение (4.15) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \Delta_n(\bar{v}) \det_n [\alpha(v_k|\bar{u})\Phi_1(u_j, v_k) + \beta(v_k|\bar{u})\Phi_2(u_j, v_k)] \\ = \sum_{\bar{v} \mapsto \{\bar{v}^I, \bar{v}^{\text{II}}\}} \Delta_m(\bar{v}^I)\Delta_{n-m}(\bar{v}^{\text{II}})g(\bar{v}_{\text{II}}, \bar{v}_I) \prod_{v_k \in \bar{v}^I} \alpha(v_k|\bar{u}) \prod_{v_k \in \bar{v}^{\text{II}}} \beta(v_k|\bar{u}) \\ \times \det_n [\Phi_1(u_j, v_k^I) \mid \Phi_2(u_j, v_k^{\text{II}})]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Во избежание недоразумений мы частично отказались от сокращенных обозначений, явно написав, что произведение функций α и β берется по переменным v_k , а произведений по набору \bar{u} нет. Именно к этой формуле сводится сумма по разбиениям (3.17).

5. Детерминантная формула для скалярного произведения

Прежде чем вычислять сумму по разбиениям в формуле (3.17), мы введем еще две новые функции:

$$h(u, v) = \frac{f(u, v)}{g(u, v)} = \frac{u - v + c}{c}, \quad t(u, v) = \frac{g(u, v)}{h(u, v)} = \frac{c^2}{(u - v)(u - v + c)}. \quad (5.1)$$

Эти комбинации функций будут нам постоянно встречаться в дальнейшем, поэтому и имеет смысл ввести для них специальные обозначения. Мы также распространим на эти функции соглашение о сокращенной форме записи произведений.

Запишем формулу (4.17) для конкретных функций α , β и конкретных матриц $\Phi_\ell(u_j, v_k)$, $\ell = 1, 2$. Пусть

$$\begin{aligned}\alpha(v_k|\bar{u}) &= (-1)^{n+1}r(v_k)h(\bar{u}, v_k) = (-1)^{n+1}r(v_k) \prod_{j=1}^n h(u_j, v_k), \\ \beta(v_k|\bar{u}) &= \kappa h(v_k, \bar{u}) = \kappa \prod_{j=1}^n h(v_k, u_j)\end{aligned}\tag{5.2}$$

и

$$\begin{aligned}\Phi_1(u_j, v_k) &= t(u_j, v_k), \\ \Phi_2(u_j, v_k) &= t(v_k, u_j).\end{aligned}\tag{5.3}$$

Тогда равенство (4.17) принимает вид

$$\begin{aligned}\Delta_n(\bar{v}) \det_n [(-1)^{n+1}r(v_k)t(u_j, v_k)h(\bar{u}, v_k) + t(v_k, u_j)h(v_k, \bar{u})] \\ = \sum_{\bar{v} \mapsto \{\bar{v}^I, \bar{v}^{II}\}} \Delta_m(\bar{v}^I)\Delta_{n-m}(\bar{v}^{II})g(\bar{v}^{II}, \bar{v}_I) \\ \times (-1)^{(n+1)m} \kappa^{n-m} r(\bar{v}^I)h(\bar{u}, \bar{v}^I)h(\bar{v}^{II}, \bar{u}) \det_n \left[t(u_j, v_k^I) \mid t(v_k^{II}, u_j) \right].\end{aligned}\tag{5.4}$$

Проверим, что сумма по разбиениям в правой части (5.4) совпадает с суммой в формуле (3.17), если в последней положить $n-k = m$. Для этого зафиксируем в сумме (3.17) некоторое разбиение $\bar{v} \mapsto \{\bar{v}_I, \bar{v}_{II}\}$ и запишем явно соответствующий вклад в сумму

$$(-1)^m \kappa^{n-m} r(\bar{v}_I) K_n(\{\bar{v}_I - c, \bar{v}_{II}\}|\bar{u}) f(\bar{v}_{II}, \bar{v}_I) f(\bar{u}, \bar{v}_I).\tag{5.5}$$

Напомним явную формулу для ССДС, которую теперь мы можем записать в виде

$$K_n(\bar{x}|\bar{y}) = G_n(\bar{x}|\bar{y}) \det_n t(x_k, y_j),\tag{5.6}$$

где

$$G_n(\bar{x}|\bar{y}) = \Delta_n(\bar{y})\Delta_n'(\bar{x}) h(\bar{x}, \bar{y}).\tag{5.7}$$

Напомним также, что в целом ССДС $K_n(\bar{x}|\bar{y})$ является симметричной функцией от \bar{x} и симметричной функцией от \bar{y} . Однако в формуле (5.6) мы представили ее в виде произведения двух множителей, каждый из которых антисимметричен по \bar{x} и по \bar{y} . В нашем случае нам следует положить $\bar{x} = \{\bar{v}^I - c, \bar{v}^{II}\}$ и $\bar{y} = \bar{u}$, и мы будем считать, что элементы в подмножествах \bar{v}^I и \bar{v}^{II} нормально упорядочены.

Воспользуемся очевидным соотношением

$$t(x - c, y) = t(y, x).\tag{5.8}$$

Тогда, делая подстановку $\bar{x} = \{\bar{v}^I - c, \bar{v}^{II}\}$ и $\bar{y} = \bar{u}$ в детерминанте, мы находим

$$\det_n t(x_k, y_j) \Big|_{\substack{\bar{x} = \{\bar{v}^I - c, \bar{v}^{II}\} \\ \bar{y} = \bar{u}}} = \det_n \left[t(u_j, v_k^I) \mid t(v_k^{II}, u_j) \right].\tag{5.9}$$

Таким образом, детерминант в точности совпадает с тем, который мы имеем в формуле (5.4).

Теперь необходимо сделать такую же подстановку в коэффициенте $G_n(\bar{x}|\bar{y})$. При этом мы будем пользоваться формулами

$$g(x, y - c) = \frac{1}{h(x, y)}, \quad h(x - c, y) = \frac{1}{g(x, y)}. \quad (5.10)$$

Тогда

$$\begin{aligned} G_n(\bar{x}|\bar{y}) \Big|_{\substack{\bar{x}=\{\bar{v}^I-c, \bar{v}^{\text{II}}\} \\ \bar{y}=\bar{u}}} &= \Delta'_n(\bar{u}) \Delta_n(\{\bar{v}^I - c, \bar{v}^{\text{II}}\}) h(\{\bar{v}^I - c, \bar{v}^{\text{II}}\}, \bar{u}) \\ &= \Delta'_n(\bar{u}) \Delta_m(\bar{v}^I) \Delta_{n-m}(\bar{v}^{\text{II}}) \prod_{v_j \in \bar{v}^I} \prod_{v_k \in \bar{v}^{\text{II}}} \frac{1}{h(v_k, v_j)} \prod_{j=1}^n \left\{ \prod_{v_k \in \bar{v}^I} \frac{1}{g(v_k, u_j)} \prod_{v_k \in \bar{v}^{\text{II}}} h(v_k, u_j) \right\}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Здесь мы на время отказались от сокращенных обозначений и выписали все произведения явно. Помимо ССДС $K_n(\{\bar{v}_I - c, \bar{v}_{\text{II}}\}|\bar{u})$ формула (5.5) содержит также множители $(-1)^m \kappa^{n-m} r(\bar{v}^I)$ и $f(\bar{u}, \bar{v}^I) f(\bar{v}^{\text{II}}, \bar{v}^I)$. Умножая их на коэффициент $G_n(\bar{x}|\bar{y})$, получаем

$$\begin{aligned} (-1)^m \kappa^{n-m} r(\bar{v}^I) f(\bar{u}, \bar{v}^I) f(\bar{v}^{\text{II}}, \bar{v}^I) G_n(\bar{x}|\bar{y}) \Big|_{\substack{\bar{x}=\{\bar{v}^I-c, \bar{v}^{\text{II}}\} \\ \bar{y}=\bar{u}}} &= (-1)^{(n+1)m} \kappa^{n-m} \Delta'_n(\bar{u}) \Delta_m(\bar{v}^I) \Delta_{n-m}(\bar{v}^{\text{II}}) \prod_{v_j \in \bar{v}^I} \prod_{v_k \in \bar{v}^{\text{II}}} g(v_k, v_j) \\ &\quad \times \prod_{v_k \in \bar{v}^I} r(v_k) \prod_{j=1}^n \left\{ \prod_{v_k \in \bar{v}^I} h(u_j, v_k) \prod_{v_k \in \bar{v}^{\text{II}}} h(v_k, u_j) \right\}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где мы использовали антисимметрию функции $g(x, y)$ и

$$\frac{f(x, y)}{h(x, y)} = g(x, y). \quad (5.13)$$

Собственно, равенство (5.13) и играет ключевую роль во всем выводе. Именно оно восстанавливает антисимметрию по переменным \bar{v} . Действительно, в функции $\Delta_n(\{\bar{v}^I - c, \bar{v}^{\text{II}}\})$ эта антисимметрия нарушена. Умножение на произведение функций $f(\bar{v}^{\text{II}}, \bar{v}^I)$ восстанавливает ее:

$$\begin{aligned} \Delta_n(\{\bar{v}^I - c, \bar{v}^{\text{II}}\}) f(\bar{v}^{\text{II}}, \bar{v}^I) &= \Delta_m(\bar{v}^I) \Delta_{n-m}(\bar{v}^{\text{II}}) \frac{f(\bar{v}^{\text{II}}, \bar{v}^I)}{h(\bar{v}^{\text{II}}, \bar{v}^I)} \\ &= \Delta_m(\bar{v}^I) \Delta_{n-m}(\bar{v}^{\text{II}}) g(\bar{v}^{\text{II}}, \bar{v}^I) = (-1)^{P(\bar{v}^I, \bar{v}^{\text{II}})} \Delta_n(\bar{v}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Умножая (5.12) на детерминант (5.9), мы находим явный вид слагаемого в формуле (5.5)

$$\begin{aligned} (-1)^m \kappa^{n-m} r(\bar{v}_I) K_n(\{\bar{v}_I - c, \bar{v}_{\text{II}}\}|\bar{u}) f(\bar{v}_{\text{II}}, \bar{v}_I) f(\bar{u}, \bar{v}_I) &= (-1)^{(n+1)m} \kappa^{n-m} \Delta'_n(\bar{u}) \Delta_m(\bar{v}^I) \Delta_{n-m}(\bar{v}^{\text{II}}) \\ &\quad \times g(\bar{v}^{\text{II}}, \bar{v}^I) r(\bar{v}^I) h(\bar{u}, \bar{v}^I) h(\bar{v}^{\text{II}}, \bar{u}) \det_n \left[t(u_j, v_k^I) \Big| t(v_k^{\text{II}}, u_j) \right]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Мы видим, что слагаемые в сумме (5.4) в точности имеют вид (5.15). Таким образом, сумма по разбиениям в формуле (3.17) является разложением детерминанта, и мы окончательно получаем

$$S_n(\bar{v}|\bar{u}) = \Delta'_n(\bar{u}) \Delta_n(\bar{v}) \det_n \left[(-1)^{n+1} r(v_k) t(u_j, v_k) h(\bar{u}, v_k) + \kappa t(v_k, u_j) h(v_k, \bar{u}) \right]. \quad (5.16)$$

После несложных преобразований эта формула приобретает вид

$$S_n(\bar{v}|\bar{u}) = \Delta'_n(\bar{u})\Delta_n(\bar{v}) h(\bar{v}, \bar{u}) \det_n \mathcal{M}_{jk}, \quad (5.17)$$

где

$$\mathcal{M}_{jk} = t(v_k, u_j) \left(\kappa - r(v_k) \frac{f(\bar{u}_j, v_k)}{f(v_k, \bar{u}_j)} \right). \quad (5.18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы рассмотрели случай скалярного произведения, в котором вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ является твистованным on-shell вектором, а дуальный вектор $\langle 0|C(\bar{v})$ произволен. Можно рассмотреть случай, когда наоборот дуальный вектор $\langle 0|C(\bar{v})$ является собственным дуальным вектором твистованной трансфер-матрицы, а вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ произволен. Достаточно воспользоваться равенством (3.9), после чего задача сводится к рассмотренному выше случаю. Ответ по-прежнему дается формулами (5.17), (5.18), в которых надо сделать замену $\bar{v} \leftrightarrow \bar{u}$. Читатель легко сможет убедиться в этом самостоятельно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Все рассуждения, приведенные выше, остаются в силе и для моделей с тригонометрической R -матрицей.

В заключение этого раздела отметим, что формулу для скалярного произведения (5.16) можно переписать так, что в нее войдет якобиан собственного значения трансфер-матрицы

$$\tau(v|\bar{u}) = a(v)f(\bar{u}, v) + d(v)f(v, \bar{u}). \quad (5.19)$$

Действительно, несложно проверить, что представление (5.16) эквивалентно формуле

$$S_n(\bar{v}|\bar{u}) = \frac{\Delta'_n(\bar{u})\Delta_n(\bar{v})}{g(\bar{v}, \bar{u})} \det_n \left(\frac{c}{d(v_k)} \frac{\partial \tau(v_k|\bar{u})}{\partial u_j} \right). \quad (5.20)$$

6. Ортогональность собственных векторов

Полученная выше формула позволяет рассмотреть частный случай скалярного произведения, в котором оба вектора являются твистованными on-shell векторами. Мы увидим, что если два вектора различны, то их скалярное произведение обращается в нуль, в полном соответствии с общей теорией.

Мы начнем со случая, когда $v_j \neq u_k$ для всех $j, k = 1, \dots, n$. Если вектор $\langle 0|C(\bar{v})$ является собственным вектором твистованной трансфер-матрицы, то параметры \bar{v} удовлетворяют системе уравнений Бете

$$r(v_k) = \kappa \frac{f(v_k, \bar{v}_k)}{f(\bar{v}_k, v_k)}. \quad (6.1)$$

Подставляя в формулу (5.18) функцию $r(v_k)$, выраженную через правую часть (6.1), мы после несложных преобразований получаем

$$\mathcal{M}_{jk} = t(v_k, u_j) + t(u_j, v_k) Y_k^{(n)} = \frac{\kappa c^2}{(v_k - u_j)(v_k - u_j + c)} + \frac{\kappa c^2}{(v_k - u_j)(v_k - u_j - c)} Y_k^{(n)} \quad (6.2)$$

и

$$Y_k^{(n)} = \frac{h(\bar{u}, v_k)h(v_k, \bar{v})}{h(v_k, \bar{u})h(\bar{v}, v_k)} = \prod_{m=1}^n \frac{(v_k - u_m - c)(v_k - v_m + c)}{(v_k - u_m + c)(v_k - v_m - c)}. \quad (6.3)$$

В этих формулах мы привели выражения для \mathcal{M}_{jk} и $Y_k^{(n)}$ в двух видах: сначала в терминах функций h и t , а потом явно. Первый из этих видов является универсальным — он справедлив как для моделей с рациональной R -матрицей, так и с тригонометрической.

Докажем, что $\det_n \mathcal{M}_{jk} = 0$. Для этого докажем, что строки матрицы \mathcal{M}_{jk} являются линейно зависимыми.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть

$$\nu_j^{(n)} = \frac{g(u_j, \bar{u}_j)}{g(u_j, \bar{v})} = \frac{1}{c} \prod_{m=1}^n (u_j - v_m) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n (u_j - u_m)^{-1}. \quad (6.4)$$

Тогда

$$\frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^m \nu_j^{(n)} \mathcal{M}_{jk} = 0. \quad (6.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейная комбинация (6.5) представима в виде

$$\frac{1}{\kappa} \sum_{j=1}^n \nu_j^{(n)} \mathcal{M}_{jk} = U_k^+ + U_k^- Y_k^{(n)}, \quad (6.6)$$

где

$$U_k^\pm = \sum_{j=1}^n \frac{\nu_j^{(n)} c^2}{(v_k - u_j)(v_k - u_j \pm c)}. \quad (6.7)$$

Для вычисления U_k^\pm рассмотрим вспомогательный интеграл по окружности большого радиуса

$$I_\pm = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R \rightarrow \infty} \frac{c dz}{(v_k - z)(v_k - z \pm c)} \prod_{m=1}^n \frac{z - v_m}{z - u_m}. \quad (6.8)$$

Поскольку подынтегральное выражение ведет себя как z^{-2} при $z \rightarrow \infty$, мы заключаем, что $I_\pm = 0$. С другой стороны, интеграл (6.8) равен сумме вычетов во всех полюсах, расположенных внутри контура. Во-первых, это полюсы при $z = u_\ell$, $\ell = 1, \dots, n$. Легко видеть, что сумма вычетов в этих полюсах в точности дает U_k^\pm . Полюс в точке $z = v_k$ отсутствует, так как компенсируется множителем $(z - v_k)$. Остается еще один полюс при $z = v_k \pm c$. Очевидно,

$$\text{Res} \frac{c}{(v_k - z)(v_k - z \pm c)} \prod_{m=1}^n \frac{z - v_m}{z - u_m} \Big|_{z=v_k \pm c} = \pm \prod_{m=1}^n \frac{v_k - v_m \pm c}{v_k - u_m \pm c}. \quad (6.9)$$

Мы приходим к тождеству

$$I_\pm = 0 = U_k^\pm \pm \prod_{m=1}^n \frac{v_k - v_m \pm c}{v_k - u_m \pm c}, \quad (6.10)$$

откуда

$$U_k^\pm = \mp \prod_{m=1}^n \frac{v_k - v_m \pm c}{v_k - u_m \pm c}. \quad (6.11)$$

Подставляя эти выражения для U_k^\pm в формулу (6.6), мы немедленно приходим к (6.5).

ВОПРОС. Линейная зависимость строк в матрице \mathcal{M}_{jk} существует и в тригонометрическом случае. Причем коэффициенты в линейной комбинации по-прежнему даются формулой (6.4), если под функцией g понимать ее тригонометрический аналог. Однако вспомогательный интеграл (6.8) выглядит иначе. Какие именно изменения происходят в этом интеграле?

Доказательство ортогональности несколько изменяется, если некоторые переменные из набора \bar{v} совпадают с переменными из набора \bar{u} . В этом случае в некоторых матричных элементах матрицы (5.17) возникает неопределенность. Допустим, без ограничения общности, что $v_j = u_j$

при $j = \ell + 1, \dots, n$, где $\ell < n$, и в то же время $v_j \neq u_j$ при $j = 1, \dots, \ell$. Рассмотрим диагональные элементы матрицы \mathcal{M}_{jk} (5.18) с $j = \ell + 1, \dots, n$

$$\mathcal{M}_{jj} = \frac{c^2}{(v_j - u_j)(v_j - u_j + c)} \left(\kappa - r(v_j) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n \frac{v_j - u_m - c}{v_j - u_m + c} \right). \quad (6.12)$$

Видно, что если положить $v_j = u_j$, то мы получаем нуль в знаменателе, но в то же время выражение в скобках также обращается в нуль в силу уравнений Бете. Поэтому прежде всего нам следует раскрыть эту неопределенность, после чего можно уже выразить функцию $r(v)$ через решения уравнений Бете (6.1). Мы рассмотрим этот вопрос более подробно в следующем разделе, а пока изучим матричные элементы \mathcal{M}_{jk} в строках с номерами $j = 1, \dots, \ell$. В этих матричных элементах никаких сингулярностей не возникает, поэтому, как и прежде, мы можем просто выразить функцию $r(v_k)$ через решения уравнений Бете и получить

$$\mathcal{M}_{jk} = \frac{\kappa c^2}{(v_k - u_j)(v_k - u_j + c)} + \frac{\kappa c^2}{(v_k - u_j)(v_k - u_j - c)} Y_k^{(\ell)}, \quad (6.13)$$

где

$$Y_k^{(\ell)} = Y_k^{(n)} \Big|_{\substack{v_s = u_s \\ s > \ell}} = \prod_{m=1}^{\ell} \frac{(v_k - u_m - c)(v_k - v_m + c)}{(v_k - u_m + c)(v_k - v_m - c)}. \quad (6.14)$$

Обратите внимание, что функция $Y_k^{(\ell)}$ отличается от прежней функции $Y_k^{(n)}$ (6.3) только тем, что произведение берется лишь по тем параметрам u_m , которые не совпадают с v_m . Можно сказать, что матричные элементы \mathcal{M}_{jk} с $j = 1, \dots, \ell$ зависят лишь от переменных v_1, \dots, v_ℓ и u_1, \dots, u_ℓ .

Аналогичный эффект происходит с коэффициентами $\nu_j^{(n)}$, $j = 1, \dots, \ell$:

$$\nu_j^{(n)} \Big|_{\substack{v_s = u_s \\ s > \ell}} = \nu_j^{(\ell)} = \prod_{m=1}^{\ell} (u_j - v_m) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{\ell} (u_j - u_m)^{-1}, \quad j = 1, \dots, \ell. \quad (6.15)$$

Поэтому, заменив в предыдущем доказательстве n на ℓ , мы немедленно получаем

$$\sum_{j=1}^{\ell} \nu_j^{(\ell)} \mathcal{M}_{jk} = 0. \quad (6.16)$$

Оставшаяся часть линейной комбинации заведомо равна нулю, поскольку $\nu_j^{(n)} = 0$ при $j = \ell + 1, \dots, n$. Поэтому, независимо от явного вида матричных элементов в строках с номерами $j = \ell + 1, \dots, n$ эта часть линейной комбинации не дает никакого вклада. Следовательно, равенство (6.5) по-прежнему справедливо. Таким образом, ортогональность собственных векторов выполнена и в том случае, когда некоторые параметры из набора \bar{v} совпадают с параметрами из набора \bar{u} .

7. Норма твистованного on-shell вектора

Единственный случай, когда доказательство не проходит, это случай $\bar{v} = \bar{u}$. Тогда мы имеем дело со скалярным произведением собственного вектора самого на себя, т. е. квадрат нормы⁶.

⁶Такое скалярное произведение принято называть квадратом нормы, даже если дуальный вектор не является эрмитово сопряженным исходному вектору.

Естественно ожидать, что квадрат нормы собственного вектора не равен нулю. И действительно, если $\bar{v} = \bar{u}$, то все коэффициенты $\nu_j^{(n)}$ обращаются в нуль, поэтому мы не можем доказать линейную зависимость строк матрицы \mathcal{M}_{jk} .

Как мы уже отмечали, в случае, когда среди параметров \bar{v} и \bar{u} есть совпадающие, в диагональных матричных элементах \mathcal{M}_{jj} возникает неопределенность (см. (6.12)), которую необходимо раскрыть. Важно подчеркнуть, что было бы неправильно сначала в формуле (6.12) выразить функцию $r(v)$ через решения уравнений Бете, а после этого перейти к пределу $v_j \rightarrow u_j$. Действительно, нельзя устремлять друг к другу два разных решения какой-либо системы уравнений. Проиллюстрируем это на простом примере.

Рассмотрим скалярное произведение $S_1(v|u)$, в котором векторы $\langle 0|C(v)$ и $B(u)|0\rangle$ зависят от одной переменной каждый. Это скалярное произведение элементарно вычисляется либо с помощью коммутационных соотношений (2.2), либо с помощью формулы (3.11):

$$S_1(v|u) = -c \frac{r(v) - r(u)}{v - u}. \quad (7.1)$$

Эта формула справедлива при любых комплексных v и u . В частности, при $v = u$ получаем

$$S_1(u|u) = -c r'(u). \quad (7.2)$$

Если же оба вектора являются собственными векторами твистованной трансфер-матрицы, то v и u удовлетворяют системе твистованных уравнений Бете, которая в данном случае имеет вид

$$r(v) = \kappa, \quad r(u) = \kappa. \quad (7.3)$$

Если мы подставим это в формулу (7.1), то немедленно получим $S_1(v|u) = 0$, и, переходя к пределу $v = u$, все равно получим нуль. Так, разумеется, делать нельзя. Действительно, рассмотрим для простоты модель квантового нелинейного уравнения Шрёдингера, в котором $r(u) = e^{-iuL}$. Тогда уравнения (7.3) принимают вид

$$e^{-ivL} = \kappa, \quad e^{-iuL} = \kappa, \quad (7.4)$$

откуда

$$v = \ln \kappa + \frac{2\pi is}{L}, \quad u = \ln \kappa + \frac{2\pi ir}{L}, \quad (7.5)$$

где s и r — целые числа. Если мы с самого начала положим, что $v \neq u$, то $s \neq r$, и в дальнейшем мы не имеем права устремлять друг к другу два различных целых числа. Если же мы скажем, что $v = u$, то мы должны вернуться к формуле (7.1), вычислить в ней предел (7.2), после чего уже можем подставить в полученный ответ явное выражение для u (7.5) (если потребуется).

Можно также потребовать, чтобы в формуле (7.1) одна из переменных, например u , была бы корнем твистованного уравнения Бете, а переменная v никак не зафиксирована. Тогда формула (7.1) приобретает вид

$$S_1(v|u) = -c \frac{r(v) - \kappa}{v - u}. \quad (7.6)$$

Здесь предельный переход $v \rightarrow u$ также законен, поскольку v остается произвольным комплексным числом, и мы имеем право рассмотреть предел, когда это число стремится к корню твистованного уравнения Бете. Неправильным является лишь устремление двух различных корней друг к другу.

Вернемся к вычислению нормы твистованного on-shell вектора в общем случае. Полагая в (6.12) $v_j = u_j + \varepsilon$, мы получаем

$$\mathcal{M}_{jj} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c}{\varepsilon} \left(\kappa - r(u_j + \varepsilon) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n \frac{(u_j - u_m - c + \varepsilon)}{(u_j - u_m + c + \varepsilon)} \right). \quad (7.7)$$

Учитывая, что параметры \bar{u} удовлетворяют уравнениям Бете, мы после несложных вычислений находим

$$\mathcal{M}_{jj} = -c\kappa \left(\ln' r(u_j) + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n \mathcal{K}(u_j - u_m) \right), \quad (7.8)$$

где

$$\mathcal{K}(u) = \frac{2c}{(u+c)(u-c)}. \quad (7.9)$$

Заметим, что если саму функцию $r(u_j)$ можно выразить из (твистованных) уравнений Бете через произведение функций f , то ее логарифмическая производная $\ln' r(u_j)$ из этих уравнений никак не находится. Из уравнений Бете не следует никаких условий на производные функции $r(u)$.

Для нахождения внедиагональных матричных элементов вычислять пределов не требуется, и мы можем просто положить $v_j = u_k$

$$\mathcal{M}_{jk} = \frac{c^2}{(u_k - u_j)(u_k - u_j + c)} \left(\kappa - r(u_k) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n \frac{(u_k - u_m - c)}{(u_k - u_m + c)} \right), \quad j \neq k. \quad (7.10)$$

Подставляя сюда $r(u_k)$, выраженное через твистованные уравнения Бете, мы после несложных выкладок находим

$$\mathcal{M}_{jk} = c\kappa \mathcal{K}(u_j - u_k), \quad j \neq k, \quad (7.11)$$

где $\mathcal{K}(u)$ определено формулой (7.9). Комбинируя (7.8) и (7.11), находим

$$\mathcal{M}_{jk} \Big|_{\bar{v}=\bar{u}} = c\kappa \widetilde{\mathcal{M}}_{jk}, \quad (7.12)$$

где

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{jk} = -\delta_{jk} \left(\ln' r(u_j) + \sum_{m=1}^n \mathcal{K}(u_j - u_m) \right) + \mathcal{K}(u_j - u_k). \quad (7.13)$$

Окончательно для квадрата нормы твистованного on-shell вектора получаем ответ

$$S_n(\bar{u}|\bar{u}) = (c\kappa)^n \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^n f(u_j, u_k) \det_n \widetilde{\mathcal{M}}_{jk}. \quad (7.14)$$

Интересно отметить, что, как и в случае скалярного произведения, детерминант в формуле (7.14) имеет смысл якобиана. Введем функцию

$$\Psi_j \equiv \Psi_j(\bar{u}) = \ln r(u_j) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \ln \left(\frac{u_k - u_j + c}{u_k - u_j - c} \right). \quad (7.15)$$

Тогда уравнения Бете (3.13) для переменных \bar{u} принимают очень простой вид

$$\Psi_j = 2\pi i n_j + \ln \kappa, \quad (7.16)$$

где n_j — целые числа. По сути, $\Psi_j(\bar{u})$ — это логарифм от системы твистованных уравнений Бете. Несложно проверить, что

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{jk} = -\frac{\partial \Psi_j}{\partial u_k}, \quad (7.17)$$

и, таким образом, квадрат нормы собственного вектора твистованной трансфер-матрицы пропорционален якобиану логарифмической системы твистованных уравнений Бете.

В заключение этой лекции еще раз напомним, что все полученные выше формулы остаются справедливыми в частном случае $\kappa = 1$.

ВОПРОС. Выведите формулу для квадрата нормы твистованного on-shell вектора в случае тригонометрической R -матрицы.

8. Ответы к некоторым упражнениям

В этом разделе даны ответы на два вопроса, сформулированные в этой и предыдущей лекциях.

8.1. Доказательство предложения 8.4.2. В разделе 8.3 мы фактически доказали, что если перестановочные соотношения некоторых операторов $X(u)$ и $Y(u)$ заданы формулой

$$X(v)Y(u) = f(u, v)Y(u)X(v) + g(v, u)Y(v)X(u), \quad (8.1)$$

то их мультиперестановочные соотношения имеют вид

$$X(\bar{v})Y(\bar{u}) = (-1)^n \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_{II}\}} K_n(\bar{u}|\bar{w}_{II} + c) f(\bar{w}_{II}, \bar{w}_I) Y(\bar{w}_{II}) X(\bar{w}_I). \quad (8.2)$$

Мы рассматривали случай $X(u) = A(u)$ и $Y(u) = B(u)$, но мы также могли бы положить $X(u) = A(u)$ и $Y(u) = A(u)$. Действительно, поскольку $[A(u), A(v)] = 0$, равенство

$$A(v)A(u) = f(u, v)A(u)A(v) + g(v, u)A(v)A(u) \quad (8.3)$$

заведомо выполнено, ибо для рациональной R -матрицы $f = 1 + g$. Но тогда из (8.3) следует

$$A(\bar{v})A(\bar{u}) = (-1)^n \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_{II}\}} K_n(\bar{u}|\bar{w}_{II} + c) f(\bar{w}_{II}, \bar{w}_I) A(\bar{w}_{II}) A(\bar{w}_I). \quad (8.4)$$

В обеих частях этого равенства стоят одни и те же произведения операторов, поэтому мы получаем

$$A(\bar{v})A(\bar{u}) \left(1 - (-1)^n \sum_{\{\bar{v}, \bar{u}\} \mapsto \{\bar{w}_I, \bar{w}_{II}\}} K_n(\bar{u}|\bar{w}_{II} + c) f(\bar{w}_{II}, \bar{w}_I) \right) = 0, \quad (8.5)$$

что возможно только при выполнении условия (8.4.8).

8.2. Вычисление суммы (3.12). Формула для скалярного произведения (3.11) справедлива для *любой* модели, чья матрица монодромии удовлетворяет RTT -соотношению и имеет вакуум. Частным случаем такой матрицы монодромии является единичная матрица. Во-первых, она безусловно удовлетворяет RTT -соотношению. Во-вторых, мы можем рассматривать ее матричные элементы как операторы, действующие в одномерном гильбертовом пространстве, и в качестве вакуумного вектора мы можем выбрать любой ненулевой вектор этого пространства. Тогда скалярное произведение двух векторов Бете в такой модели дается формулой (3.11). Очевидно также, что в этой модели $r(u) = 1$, поэтому мы приходим к формуле (3.12). Но с другой стороны, в этой матрице монодромии операторы $B(u)$ и $C(u)$ тождественно равны нулю. Следовательно, все векторы Бете (кроме вакуума) являются нуль-векторами, а значит, их скалярные произведения равны нулю.

Лекция 10. Квантовая обратная задача

В XXX и XXZ цепочках Гейзенберга матрица монодромии является произведением L -операторов (2.3.14). Поэтому операторы A, B, C и D зависят от локальных спиновых операторов σ_k^α , $\alpha = x, y, z$. Однако при большой длине цепочки трудно рассчитывать на получение явного обозримого выражения для матричных элементов матрицы монодромии через σ -матрицы. Еще более безнадежной представляется обратная задача — выразить локальные спиновые операторы σ_k^α через элементы матрицы монодромии. Эта задача тем более кажется неразрешимой, поскольку операторы A, B, C и D являются глобальными в том смысле, что они зависят от спиновых операторов во всех узлах цепочки $\sigma_1^\alpha, \dots, \sigma_N^\alpha$. И если мы еще можем надеяться на то, чтобы выразить некоторый глобальный объект через локальные, то идея выразить локальные объекты через глобальные представляется абсурдной. Однако пример XXX и XXZ цепочек опровергает все эти “очевидные” рассуждения. В этих моделях удается получить простые и, не побоимся этого слова, красивые формулы для операторов σ_k^α через элементы матрицы монодромии. Эти формулы носят название *Квантовой обратной задачи*, которая и будет рассмотрена ниже.

1. Циклические перестановки в матрице монодромии

Рассмотрим неоднородную XXZ цепочку, в которой матрица монодромии зависит от параметров неоднородностей $\bar{\xi} = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$

$$T_0(u) = T_{0;1\dots N}(u|\{\xi\}) = R_{0N}(u, \xi_N) \cdots R_{01}(u, \xi_1) = \begin{pmatrix} A_{1\dots N}(u|\{\xi\}) & B_{1\dots N}(u|\{\xi\}) \\ C_{1\dots N}(u|\{\xi\}) & D_{1\dots N}(u|\{\xi\}) \end{pmatrix}_0. \quad (1.1)$$

Эта матрица действует в тензорном произведении пространств $V_0 \otimes V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$, где каждое $V_k \sim \mathbb{C}^2$. Пространство V_0 является вспомогательным. В нем матрица монодромии может быть записана как матрица 2×2 , чьи матричные элементы являются операторами, действующими в пространстве $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$. Все это отражено в обозначениях в (1.1). Сокращенное обозначение $T_0(u)$ говорит о том, что, будучи матрицей 2×2 , матрица монодромии действует в пространстве V_0 . Более полное обозначение $T_{0;1\dots N}(u|\{\xi\})$ указывает на то, что матричные элементы $T_0(u)$ действуют в пространстве $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$, причем с каждым из V_k ассоциирован параметр неоднородности ξ_k . Индекс 0 отделен от остальных индексов точкой с запятой, чтобы подчеркнуть, что V_0 является вспомогательным пространством. Об этом же говорит индекс 0 у матрицы во второй строке равенства (1.1).

Будем считать, что R -матрица нормирована таким образом, что при совпадающих аргументах она превращается в матрицу перестановки: $R(u, u) = P$. Рассмотрим трансфер-матрицу $\mathcal{T}(u)$ в точке неоднородности $u = \xi_k$:

$$\mathcal{T}(\xi_k) = \text{tr}_0 T_0(\xi_k) = A_{1\dots N}(\xi_k|\{\xi\}) + D_{1\dots N}(\xi_k|\{\xi\}). \quad (1.2)$$

След берется по пространству V_0 , о чем говорит индекс 0 у символа tr . Подставляя в (1.2) произведение R -матриц из равенства (1.1), мы находим с учетом цикличности следа

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\xi_k) &= \text{tr}_0 T_{0;1\dots N}(\xi_k|\{\xi\}) = \text{tr}_0 \left(R_{0N}(\xi_k, \xi_N) \cdots R_{01}(\xi_k, \xi_1) \right) \\ &\quad \text{tr}_0 \left(P_{0k} R_{0k-1}(\xi_k, \xi_{k-1}) \cdots R_{01}(\xi_k, \xi_1) R_{0N}(\xi_k, \xi_N) \cdots R_{0k+1}(\xi_k, \xi_{k+1}) \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Мы также воспользовались равенством $R_{0k}(\xi_k, \xi_k) = P_{0k}$. Добавим справа от произведения всех матриц единичный оператор в виде $\mathbf{1} = P_{0k}^2$:

$$\mathcal{T}(\xi_k) = \text{tr}_0 \left(P_{0k} R_{0k-1}(\xi_k, \xi_{k-1}) \cdots R_{01}(\xi_k, \xi_1) R_{0N}(\xi_k, \xi_N) \cdots R_{0k+1}(\xi_k, \xi_{k+1}) P_{0k} P_{0k} \right). \quad (1.4)$$

В силу свойств матрицы перестановки, в произведении $R_{0k-1}(\xi_k, \xi_{k-1}) \cdots R_{0k+1}(\xi_k, \xi_{k+1})$, которое стоит между двумя P_{0k} , пространство V_0 заменяется на V_k . Мы получаем

$$\mathcal{T}(\xi_k) = \text{tr}_0 \left(R_{kk-1}(\xi_k, \xi_{k-1}) \cdots R_{k1}(\xi_k, \xi_1) R_{kN}(\xi_k, \xi_N) \cdots R_{kk+1}(\xi_k, \xi_{k+1}) P_{0k} \right). \quad (1.5)$$

Мы пришли к выражению вида

$$\text{tr}_0 \left(Z_{1\dots N} P_{0k} \right), \quad (1.6)$$

где матрица $Z_{1\dots N}$ действует в пространстве V_0 как единичный оператор. То есть в произведении $Z_{1\dots N} P_{0k}$ только матрица перестановки P_{0k} нетривиально действует в пространстве V_0 , поэтому матрица $Z_{1\dots N}$ может быть вынесена из под знака следа tr_0 . Поскольку $\text{tr}_0 P_{0k} = \mathbf{1}$, мы находим

$$\text{tr}_0 \left(Z_{1\dots N} P_{0k} \right) = Z_{1\dots N} \cdot \text{tr}_0 P_{0k} = Z_{1\dots N} \quad (1.7)$$

и, следовательно,

$$\mathcal{T}(\xi_k) = R_{kk-1}(\xi_k, \xi_{k-1}) \cdots R_{k1}(\xi_k, \xi_1) R_{kN}(\xi_k, \xi_N) \cdots R_{kk+1}(\xi_k, \xi_{k+1}). \quad (1.8)$$

Оказывается, что произведения трансфер-матриц $\mathcal{T}(\xi_k)$ являются операторами циклических перестановок. Более точно,

$$\prod_{k=1}^m \mathcal{T}(\xi_k) \cdot T_{0;1\dots N}(u|\{\xi\}) \cdot \prod_{k=1}^m \mathcal{T}^{-1}(\xi_k) = R_{0m}(u, \xi_m) \cdots R_{01}(u, \xi_1) R_{0N}(u, \xi_N) \cdots R_{0m+1}(u, \xi_{m+1}), \quad (1.9)$$

т. е. при действии на матрицу монодромии $T_{0;1\dots N}(u|\{\xi\})$ операторы $\prod_{k=1}^m \mathcal{T}(\xi_k)$ совершают циклическую перестановку R -матриц. Убедимся в этом.

Начнем со случая $m = 1$ и прежде всего напомним уравнение Янга–Бакстера, записанное для тензорного произведения пространств $V_a \otimes V_b \otimes V_c$:

$$R_{ab}(\mu_a, \mu_b) R_{ac}(\mu_a, \mu_c) R_{bc}(\mu_b, \mu_c) = R_{bc}(\mu_b, \mu_c) R_{ac}(\mu_a, \mu_c) R_{ab}(\mu_a, \mu_b). \quad (1.10)$$

Рассмотрим теперь произведение $\mathcal{T}(\xi_1) T_0(u)$:

$$\mathcal{T}(\xi_1) T_{0;1\dots N}(u|\{\xi\}) = \mathcal{T}(\xi_1) R_{0N}(u, \xi_N) \cdots R_{02}(u, \xi_2) R_{01}(u, \xi_1). \quad (1.11)$$

Подставляя сюда $\mathcal{T}(\xi_1)$ из равенства (1.8), находим

$$\mathcal{T}(\xi_1) T_{0;1\dots N}(u|\{\xi\}) = R_{1N}(\xi_1, \xi_N) \cdots \underline{R_{12}(\xi_1, \xi_2)} R_{0N}(u, \xi_N) \cdots \underline{R_{02}(u, \xi_2)} R_{01}(u, \xi_1). \quad (1.12)$$

Заметим, что комбинация подчеркнутых членов совпадает с правой частью уравнения (1.10), если в последней положить $a = 0$, $b = 1$ и $c = 2$. Кроме того, R -матрица $R_{12}(\xi_1, \xi_2)$ действует тривиально в пространстве $V_0 \otimes V_3 \otimes \cdots \otimes V_N$ и поэтому коммутирует со всеми R -матрицами $R_{0k}(u, \xi_k)$ при $k = 3, \dots, N$. Поэтому мы можем пронести $R_{12}(\xi_1, \xi_2)$ направо через произведение

$R_{0N}(u, \xi_N) \cdots R_{03}(u, \xi_3)$, после чего мы в точности получаем правую часть уравнения (1.10). Заменяя ее левой частью, мы приходим к выражению

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\xi_1)T_{0;1\dots N}(u|\{\xi\}) &= R_{1N}(\xi_1, \xi_N) \cdots \underline{R_{13}(\xi_1, \xi_3)} \\ &\quad \times R_{0N}(u, \xi_N) \cdots \underline{R_{03}(u, \xi_3)R_{01}(u, \xi_1)R_{02}(u, \xi_2)R_{12}(\xi_1, \xi_2)}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Мы видим, что мы снова можем применить уравнение Янга–Бакстера к новым подчеркнутым членам в (1.13), после чего получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\xi_1)T_{0;1\dots N}(u|\{\xi\}) &= R_{1N}(\xi_1, \xi_N) \cdots \underline{R_{14}(\xi_1, \xi_4)} \\ &\quad \times R_{0N}(u, \xi_N) \cdots \underline{R_{04}(u, \xi_4)R_{01}(u, \xi_1)R_{03}(u, \xi_3)R_{02}(u, \xi_2)R_{13}(\xi_1, \xi_3)R_{12}(\xi_1, \xi_2)}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

и т. д. Продолжая этот процесс, мы пронесем все R -матрицы $R_{1k}(\xi_1, \xi_k)$ направо и в итоге получим

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\xi_1)T_{0;1\dots N}(u|\{\xi\}) &= R_{01}(u, \xi_1)R_{0N}(u, \xi_N) \cdots R_{02}(u, \xi_2) \\ &\quad \times R_{1N}(\xi_1, \xi_N) \cdots R_{12}(\xi_1, \xi_2) = R_{01}(u, \xi_1)R_{0N}(u, \xi_N) \cdots R_{02}(u, \xi_2)\mathcal{T}(\xi_1). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Таким образом, равенство (1.9) доказано при $m = 1$.

Для доказательства (1.9) при $m = 2$ мы должны доказать, что

$$\mathcal{T}(\xi_2)R_{01}(u, \xi_1)R_{0N}(u, \xi_N) \cdots R_{02}(u, \xi_2)\mathcal{T}^{-1}(\xi_2) = R_{02}(u, \xi_2)R_{01}(u, \xi_1)R_{0N}(u, \xi_N) \cdots R_{03}(u, \xi_3). \quad (1.16)$$

В принципе, мы могли бы повторить все приведенные выше рассуждения, связанные с перестановкой R -матриц с помощью уравнения Янга–Бакстера. Однако этого делать не обязательно, поскольку простая замена переменных сводит нашу задачу к случаю $m = 1$. Действительно, сделаем циклическую замену переменных ξ_k на ξ'_k и пространств V_k на V'_k :

$$\begin{array}{cccccc} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{N-1} & \xi_N & & 1 & 2 & \cdots & N-1 & N \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \xi'_N & \xi'_1 & \cdots & \xi'_{N-2} & \xi'_{N-1} & & N' & 1' & \cdots & N'-2' & N'-1' \end{array} \quad (1.17)$$

Тогда в новых обозначениях равенство (1.16) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\xi'_1)R_{0N'}(u, \xi'_{N'})R_{0N'-1'}(u, \xi'_{N'-1'}) \cdots R_{01'}(u, \xi'_1)\mathcal{T}^{-1}(\xi'_1) \\ = R_{01'}(u, \xi'_1)R_{0N'}(u, \xi'_{N'})R_{0N'-1'}(u, \xi'_{N'-1'}) \cdots R_{02'}(u, \xi'_2), \end{aligned} \quad (1.18)$$

и по форме в точности совпадает с уже доказанным равенством (1.15). Ясно, что процесс может быть продолжен для $m = 3, 4, \dots$, и таким образом мы доказываем (1.9) для произвольного m .

2. Обратная задача

Формулы, приведенные выше, являются подготовительными для нашей главной цели: выразить произвольную матрицу E_m , действующую нетривиально в пространстве V_m , через матрицу E_0 , действующую во вспомогательном пространстве V_0 , и трансфер-матрицу. Для этого рассмотрим выражение

$$\mathrm{tr}_0\left(E_0T_{0;1\dots N}(\xi_m|\{\xi\})\right). \quad (2.1)$$

Воспользовавшись равенством (1.9), приведем его к виду

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_0\left(E_0 T_{0;1\dots N}(\xi_m|\{\xi\})\right) &= \mathrm{tr}_0\left(T_{0;1\dots N}(\xi_m|\{\xi\})E_0\right) = \mathrm{tr}_0\left[\left(\prod_{k=1}^m \mathcal{T}^{-1}(\xi_k)\right)\right. \\ &\quad \left.P_{0m}R_{0m-1}(\xi_m, \xi_{m-1}) \cdots R_{01}(\xi_m, \xi_1)R_{0N}(\xi_m, \xi_N) \cdots R_{0m+1}(\xi_m, \xi_{m+1}) \left(\prod_{k=1}^m \mathcal{T}(\xi_k)\right) E_0\right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

где мы учли, что $R_{0m}(\xi_m, \xi_m) = P_{0m}$. Поскольку трансфер-матрицы $\mathcal{T}(\xi_k)$ действуют в V_0 тривиально, мы можем вынести их из под знака tr_0

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_0\left(E_0 T_{0;1\dots N}(\xi_m|\{\xi\})\right) &= \left(\prod_{k=1}^m \mathcal{T}^{-1}(\xi_k)\right) \mathrm{tr}_0\left[P_{0m}R_{0m-1}(\xi_m, \xi_{m-1}) \cdots R_{01}(\xi_m, \xi_1)\right. \\ &\quad \left.\times R_{0N}(\xi_m, \xi_N) \cdots R_{0m+1}(\xi_m, \xi_{m+1})E_0 P_{0m}P_{0m}\right] \left(\prod_{k=1}^m \mathcal{T}(\xi_k)\right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где аналогично (1.4) мы вставили единичный оператор в виде $\mathbf{1} = P_{0m}^2$. Пользуясь основным свойством матрицы перестановки, мы получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_0\left(E_0 T_{0;1\dots N}(\xi_m|\{\xi\})\right) &= \left(\prod_{k=1}^m \mathcal{T}^{-1}(\xi_k)\right) \mathrm{tr}_0\left[R_{mm-1}(\xi_m, \xi_{m-1}) \cdots R_{m1}(\xi_m, \xi_1)\right. \\ &\quad \left.\times R_{mN}(\xi_m, \xi_N) \cdots R_{mm+1}(\xi_m, \xi_{m+1})E_m P_{0m}\right] \left(\prod_{k=1}^m \mathcal{T}(\xi_k)\right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Теперь след по пространству V_0 может быть взят точно так же, как мы это делали выше, что дает

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_0\left(E_0 T_{0;1\dots N}(\xi_m|\{\xi\})\right) &= \left(\prod_{k=1}^m \mathcal{T}^{-1}(\xi_k)\right) \cdot R_{mm-1}(\xi_m, \xi_{m-1}) \cdots R_{m1}(\xi_m, \xi_1) \\ &\quad \times R_{mN}(\xi_m, \xi_N) \cdots R_{mm+1}(\xi_m, \xi_{m+1})E_m \cdot \left(\prod_{k=1}^m \mathcal{T}(\xi_k)\right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^m \mathcal{T}^{-1}(\xi_k)\right) \cdot \mathcal{T}(\xi_m)E_m \cdot \left(\prod_{k=1}^m \mathcal{T}(\xi_k)\right) = \left(\prod_{k=1}^{m-1} \mathcal{T}^{-1}(\xi_k)\right) \cdot E_m \cdot \left(\prod_{k=1}^m \mathcal{T}(\xi_k)\right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отсюда мы окончательно получаем

$$E_m = \left(\prod_{k=1}^{m-1} \mathcal{T}(\xi_k)\right) \cdot \mathrm{tr}_0\left(E_0 T_0(\xi_m)\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^m \mathcal{T}^{-1}(\xi_k)\right). \quad (2.6)$$

Формула (2.6) и является искомой. В ней оператор E_m , действующий в локальном пространстве V_m , выражен через оператор E_0 , действующий во вспомогательном пространстве V_0 , и трансфер-матрицу.

ЗАМЕЧАНИЕ. Весь вывод был проделан для XXZ цепочки. Однако мы нигде не использовали явный вид R -матрицы. Для нашего вывода были существенны два условия:

- матрица монодромии представима в виде произведения R -матриц вида (1.1);
- при некотором значении аргументов R -матрица превращается в матрицу перестановки.

Если эти два условия выполнены, то обратная задача разрешима, и ее решение по-прежнему дается формулой (2.6). В частности, все сказанное выше справедливо для XXZ и даже для XYZ цепочки. Более того, мы нигде не использовали тот факт, что матрица монодромии имеет размер 2×2 , поэтому решение обратной задачи *без каких-либо изменений* переносится и на случай матриц $n \times n$. С возможными обобщениями обратной задачи можно ознакомиться в работе [18].

3. Формфакторы локальных операторов

Полученные формулы позволяют легко получить детерминантные представления для матричных элементов локальных операторов в спиновых цепочках. Будем называть матричный элемент оператора σ_m^α , $\alpha = \pm z$, между двумя on-shell векторами формфактором этого оператора. Рассмотрим обычную (однородную) XXZ (или XXZ) цепочку, в которой матрица монодромии имеет вид

$$T_0(u) = R_{0N}(u, \frac{\eta}{2}) \cdots R_{01}(u, \frac{\eta}{2}). \quad (3.1)$$

Тогда формулы обратной задачи (2.6) переписываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_m^- &= \mathcal{T}^{m-1}(\frac{\eta}{2}) \cdot B(\frac{\eta}{2}) \cdot \mathcal{T}^{-m}(\frac{\eta}{2}), \\ \sigma_m^+ &= \mathcal{T}^{m-1}(\frac{\eta}{2}) \cdot C(\frac{\eta}{2}) \cdot \mathcal{T}^{-m}(\frac{\eta}{2}), \\ \sigma_m^z &= \mathcal{T}^{m-1}(\frac{\eta}{2}) \cdot (A(\frac{\eta}{2}) - D(\frac{\eta}{2})) \cdot \mathcal{T}^{-m}(\frac{\eta}{2}), \\ \mathbf{1} &= \mathcal{T}^{m-1}(\frac{\eta}{2}) \cdot (A(\frac{\eta}{2}) + D(\frac{\eta}{2})) \cdot \mathcal{T}^{-m}(\frac{\eta}{2}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Последнее из этих равенств является очевидным тождеством, однако первые три весьма нетривиальны. С их помощью мы можем теперь вычислить формфакторы локальных спиновых операторов.

Пусть вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ является on-shell вектором, а $\langle 0|C(\bar{v})$ — дуальным on-shell вектором. Тогда мы немедленно получаем

$$\langle 0|C(\bar{v})\sigma_m^+B(\bar{u})|0\rangle = \frac{\tau^{m-1}(\frac{\eta}{2}|\bar{v})}{\tau^m(\frac{\eta}{2}|\bar{u})} \langle 0|C(\bar{v})C(\frac{\eta}{2}) \cdot B(\bar{u})|0\rangle \quad (3.3)$$

и

$$\langle 0|C(\bar{v})\sigma_m^-B(\bar{u})|0\rangle = \frac{\tau^{m-1}(\frac{\eta}{2}|\bar{v})}{\tau^m(\frac{\eta}{2}|\bar{u})} \langle 0|C(\bar{v}) \cdot B(\frac{\eta}{2})B(\bar{u})|0\rangle, \quad (3.4)$$

где τ суть собственные значения трансфер-матрицы. Таким образом, формфакторы операторов σ_m^\pm свелись к скалярным произведениям, в которых один из векторов является on-shell. Действительно, в формуле (3.3) вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ остался on-shell, а в формуле (3.4) дуальный вектор $\langle 0|C(\bar{v})$ является on-shell. В обоих случаях нам известно компактное представление для скалярных произведений в виде детерминантов.

Ситуация с формфактором оператора σ_m^z чуть более сложная. Ясно, что вместо этого оператора мы можем рассмотреть, например, оператор $\frac{1}{2}(1 - \sigma_m^z)$, формфактор которого, согласно (3.2), сводится к формфактору оператора D :

$$\frac{1}{2}\langle 0|C(\bar{v})(1 - \sigma_m^z)B(\bar{u})|0\rangle = \frac{\tau^{m-1}(\frac{\eta}{2}|\bar{v})}{\tau^m(\frac{\eta}{2}|\bar{u})} \langle 0|C(\bar{v}) \cdot D(\frac{\eta}{2}) \cdot B(\bar{u})|0\rangle. \quad (3.5)$$

В принципе, действие $D(\frac{\eta}{2})$ на вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ нам известно, поэтому не составляет труда свести и этот формфактор к скалярным произведениям, в которых дуальный вектор останется on-shell. Однако существует и другой способ вычисления формфактора оператора $D(\frac{\eta}{2})$, который

мы сейчас продемонстрируем. Данный способ может показаться простым техническим трюком, однако этот трюк имеет далеко идущие последствия, с которыми мы познакомимся позже.

Рассмотрим твистованную трансфер-матрицу $\mathcal{T}_\kappa(z) = A(z) + \kappa D(z)$, где κ — некоторый комплексный параметр. Введем величину

$$Q_\kappa = \langle 0|C(\bar{v})(\mathcal{T}_\kappa(\frac{\eta}{2}) - \mathcal{T}(\frac{\eta}{2}))B(\bar{u})|0\rangle. \quad (3.6)$$

Здесь $\mathcal{T}(\frac{\eta}{2})$ — обычная трансфер-матрица: $\mathcal{T}(\frac{\eta}{2}) = A(\frac{\eta}{2}) + D(\frac{\eta}{2})$. Будем считать, что $B(\bar{u})|0\rangle$ — обычный on-shell вектор, а $\langle 0|C(\bar{v})$ — твистованный on-shell вектор, т. е. он является собственным вектором оператора $\mathcal{T}_\kappa(\frac{\eta}{2})$. Заметим, что при $\kappa = 1$ твистованный on-shell вектор превращается в обычный on-shell вектор.

С одной стороны, $\mathcal{T}_\kappa(\frac{\eta}{2}) - \mathcal{T}(\frac{\eta}{2}) = (\kappa - 1)D(\frac{\eta}{2})$, поэтому мы имеем

$$Q_\kappa = (\kappa - 1)\langle 0|C(\bar{v})D(\frac{\eta}{2})B(\bar{u})|0\rangle. \quad (3.7)$$

Дифференцируя по κ , при $\kappa = 1$ получаем

$$\left. \frac{dQ_\kappa}{d\kappa} \right|_{\kappa=1} = \langle 0|C(\bar{v})D(\frac{\eta}{2})B(\bar{u})|0\rangle. \quad (3.8)$$

В этой формуле уже $\kappa = 1$, поэтому $\langle 0|C(\bar{v})$ — обычный on-shell вектор, и в правой части мы имеем формфактор оператора $D(\frac{\eta}{2})$.

С другой стороны,

$$Q_\kappa = (\tau_\kappa(\frac{\eta}{2}|\bar{v}) - \tau(\frac{\eta}{2}|\bar{u}))\langle 0|C(\bar{v})B(\bar{u})|0\rangle, \quad (3.9)$$

где $\tau_\kappa(\frac{\eta}{2}|\bar{v})$ — собственное значение твистованной трансфер-матрицы

$$\tau_\kappa(z|\bar{v}) = a(z)f(\bar{v}, z) + \kappa d(z)f(z, \bar{v}). \quad (3.10)$$

Собственное значение обычной трансфер-матрицы $\tau(\frac{\eta}{2}|\bar{u})$ дается формулой (3.10), в которой $\kappa = 1$ и набор \bar{v} заменен на набор \bar{u} .

Поэтому мы получаем соотношение

$$\langle 0|C(\bar{v})D(\frac{\eta}{2})B(\bar{u})|0\rangle = \left. \frac{d}{d\kappa} (\tau_\kappa(\frac{\eta}{2}|\bar{v}) - \tau(\frac{\eta}{2}|\bar{u})) \langle 0|C(\bar{v})B(\bar{u})|0\rangle \right|_{\kappa=1}. \quad (3.11)$$

Итак, для вычисления формфактора оператора $D(\frac{\eta}{2})$ достаточно вычислить скалярное произведение обычного и твистованного on-shell векторов, после чего продифференцировать результат по κ при $\kappa = 1$.

Можно пройти немного дальше. Рассмотрим случай, когда $\bar{v} = \bar{u}$ при $\kappa = 1$. По-другому можно сказать, что параметры \bar{v} являются κ -деформацией параметров \bar{u} . Тогда разность $\tau_\kappa(\frac{\eta}{2}|\bar{v}) - \tau(\frac{\eta}{2}|\bar{u})$ обращается в нуль при $\kappa = 1$. Следовательно, производная по κ в (3.11) должна действовать только на эту разность, но не на скалярное произведение:

$$\langle 0|C(\bar{v})D(\frac{\eta}{2})B(\bar{v})|0\rangle = \left. \frac{d}{d\kappa} \tau_\kappa(\frac{\eta}{2}|\bar{v}) \right|_{\kappa=1} \langle 0|C(\bar{v})B(\bar{v})|0\rangle. \quad (3.12)$$

Пусть теперь $\bar{v} \neq \bar{u}$ при $\kappa = 1$. Тогда при $\kappa = 1$ скалярное произведение $\langle 0|C(\bar{v})B(\bar{u})|0\rangle$ должно обращаться в нуль как произведение двух разных on-shell векторов. Следовательно, в этом случае производная по κ в (3.11) должна действовать только на скалярное произведение, но не на разность собственных значений трансфер-матрицы, в которой мы можем просто положить $\kappa = 1$:

$$\langle 0|C(\bar{v})D(\frac{\eta}{2})B(\bar{u})|0\rangle = (\tau(\frac{\eta}{2}|\bar{v}) - \tau(\frac{\eta}{2}|\bar{u})) \left. \frac{d}{d\kappa} \langle 0|C(\bar{v})B(\bar{u})|0\rangle \right|_{\kappa=1}, \quad \bar{v} \neq \bar{u}. \quad (3.13)$$

Лекция 11. Композитная модель

Формулы квантовой обратной задачи позволяют вычислять формфакторы локальных операторов в спиновых цепочках. Однако не для всякой квантовой модели решение квантовой обратной задачи известно. Как вычислить формфакторы локальных операторов в этом случае? Для этого вводится *композитная модель*, в которой появляется выделенная точка интервала, на котором была определена исходная модель (например, некоторая точка x на интервале $[0, L]$ в модели квантового нелинейного уравнения Шрёдингера). В этой лекции мы познакомимся с композитной моделью. Мы также введем понятие обобщенной модели, с помощью которого получим удобный способ доказательства нетривиальных тождеств.

1. Обобщенная модель

Скалярное произведение двух произвольных векторов Бете

$$S_n(\bar{v}|\bar{u}) = \frac{\langle 0|C(\bar{v})B(\bar{u})|0\rangle}{d(\bar{v})d(\bar{u})} \quad (1.1)$$

дается формулой (9.3.11). Допустим, что оба вектора в этой формуле являются on-shell. Тогда в силу уравнений Бете имеем

$$r(\bar{u}_{\text{II}})f(\bar{u}_{\text{I}}, \bar{u}_{\text{II}}) = f(\bar{u}_{\text{II}}, \bar{u}_{\text{I}}), \quad r(\bar{v}_{\text{I}})f(\bar{v}_{\text{II}}, \bar{v}_{\text{I}}) = f(\bar{v}_{\text{I}}, \bar{v}_{\text{II}}). \quad (1.2)$$

Подставляя эти выражения в (9.3.11), получаем

$$S_n(\bar{v}|\bar{u}) = \sum_{\substack{\bar{v} \mapsto \{\bar{v}_{\text{I}}, \bar{v}_{\text{II}}\} \\ \bar{u} \mapsto \{\bar{u}_{\text{I}}, \bar{u}_{\text{II}}\}}} K_k(\bar{u}_{\text{I}}|\bar{v}_{\text{I}})K_{n-k}(\bar{v}_{\text{II}}|\bar{u}_{\text{II}}) f(\bar{v}_{\text{I}}, \bar{v}_{\text{II}})f(\bar{u}_{\text{II}}, \bar{u}_{\text{I}}). \quad (1.3)$$

Напомним, что здесь суммирование ведется по разбиениям множеств \bar{u} и \bar{v} на два подмножества каждое. Оба разбиения независимы, за исключением ограничения на количество элементов в подмножествах: $\#\bar{u}_{\text{I}} = \#\bar{v}_{\text{I}} = k$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Скалярное произведение двух различных on-shell векторов должно обращаться в нуль. Действительно, вставим между двумя векторами трансфер-матрицу $\mathcal{T}(w)$. Мы можем подействовать этим оператором либо налево, либо направо. В зависимости от этого получаем

$$\frac{\langle 0|C(\bar{v})\mathcal{T}(w)B(\bar{u})|0\rangle}{d(\bar{v})d(\bar{u})} = \tau(w|\bar{v})S_n(\bar{v}|\bar{u}) = \tau(w|\bar{u})S_n(\bar{v}|\bar{u}). \quad (1.4)$$

Если $\bar{u} \neq \bar{v}$, то и $\tau(w|\bar{u}) \neq \tau(w|\bar{v})$. Здесь уместно напомнить, что собственное значение трансфер-матрицы является *функцией* от w (см. (3.3.33)). Поэтому при несовпадающих \bar{v} и \bar{u} равенство двух функций $\tau(w|\bar{u})$ и $\tau(w|\bar{v})$ возможно лишь в некоторых точках w_k , но не для любого комплексного w . Отсюда следует $S_n(\bar{v}|\bar{u}) = 0$.

Возникает подозрение, что сумма по разбиениям в формуле (1.3) равна нулю (точнее, $S_n(\bar{v}|\bar{u}) = \delta_{n0}$, поскольку при $n = 0$ мы имеем дело с произведением вакуумного вектора на дуальный). Однако имеется ряд вопросов.

Во-первых, является ли равенство

$$\sum_{\substack{\bar{v} \rightarrow \{\bar{v}_I, \bar{v}_II\} \\ \bar{u} \rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_II\}}} K_k(\bar{u}_I | \bar{v}_I) K_{n-k}(\bar{v}_II | \bar{u}_II) f(\bar{v}_I, \bar{v}_II) f(\bar{u}_II, \bar{u}_I) = \delta_{n0} \quad (1.5)$$

тождеством? Ведь при выводе этого равенства мы пользовались уравнениями Бете, поэтому возможно, что (1.5) выполнено не для любых \bar{u} и \bar{v} , а лишь в том случае, если эти параметры удовлетворяют определенным условиям. Во-вторых, справедливо ли равенство (1.5), если $\bar{u} = \bar{v}$? Ведь в этом случае мы должны получить квадрат нормы on-shell вектора, который, вообще говоря, отличен от нуля.

Рассмотрим простейший пример, когда $n = 1$. В этом случае существует всего два разбиения: либо первый набор пуст, либо второй. Подставляя $K_1(x|y) = g(x, y)$ в формулу (9.3.11) при $n = 1$, получаем

$$S_1(v|u) = r(u)g(v, u) + r(v)g(u, v). \quad (1.6)$$

Уравнения Бете в этом случае имеют вид $r(u) = r(v) = 1$, откуда

$$S_1(v|u) = g(v, u) + g(u, v) = 0, \quad (1.7)$$

в силу антисимметрии функции $g(v, u)$. Равенство (1.7), безусловно, является тождеством. Более точно, оно справедливо для любых $u \neq v$, а при $u = v$ мы имеем устранимую особенность. Доопределяя в этой точке $S_1(v|u)$ по непрерывности, мы получаем, что $S_1(v|u)$ тождественно равно нулю.

Приведенный пример наводит на мысль, что равенство (1.5) все-таки является тождеством. Становится понятным также, что происходит в случае, когда $\bar{u} = \bar{v}$. Как уже обсуждалось в разделе 9.7, для того чтобы получить квадрат нормы on-shell вектора, мы должны *сначала* выполнить предельный переход $\bar{u} \rightarrow \bar{v}$ в формуле (9.3.11), а потом уже наложить уравнения Бете на параметры \bar{v} . Так, если мы рассмотрим предел $u \rightarrow v$ в формуле (1.6), то получим $S_1(v|v) = -cr'(v)$. Это выражение вполне может быть отличным от нуля, даже если v является корнем уравнения Бете. Мы же поступили наоборот. Мы сначала наложили на параметры \bar{u} и \bar{v} уравнения Бете, а потом уже стали изучать поведение полученной функции в пределе $\bar{u} \rightarrow \bar{v}$.

Тождество (1.5) можно доказать прямым вычислением. Собственно, мы уже проделывали это в лекции 9. Там мы вычисляли скалярное произведение при условии, что вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ был on-shell вектором, а второй вектор оставался произвольным¹. Мы можем потребовать, чтобы и второй вектор был on-shell. Тогда мы получим сумму (1.3). Но с другой стороны, мы можем наложить уравнения Бете на параметры \bar{v} уже в конечном детерминантном представлении (9.5.17), (9.5.18). Тогда мы получим детерминант матрицы (9.6.2) с $\kappa = 1$. Мы знаем, что этот детерминант равен нулю.

Существует, однако, и более простой способ доказательства тождества (1.5), который основан на понятии *обобщенной модели*.

Обобщенная модель — это на самом деле не одна модель, а класс моделей. Матрица монодромии каждого представителя этого класса удовлетворяет $R\bar{T}\bar{T}$ -соотношению с фиксированной R -матрицей и имеет вакуумный вектор (а также дуальный к нему). Различные представители этого класса параметризуются различными функциями $r(u)$. Можно сказать, что конкретный представитель обобщенной модели — это конкретное представление алгебры операторов, задаваемой $R\bar{T}\bar{T}$ -соотношением.

¹Напомним, что все формулы лекции 9 оставались справедливыми в том числе и при значении параметра твиста $\kappa = 1$.

Мы уже видели, как строится модель, в которой функция $r(u)$ имеет вид

$$r(u) = \prod_{k=1}^N \frac{a_k^{(1)}u + a_k^{(0)}}{d_k^{(1)}u + d_k^{(0)}}, \quad (1.8)$$

где на константы $a_k^{(j)}$ и $d_k^{(j)}$ ($j = 0, 1$) наложено единственное условие: $a_k^{(1)} \neq 0$, $d_k^{(1)} \neq 0$. Можно также рассматривать всевозможные пределы выражения (1.8), в которых произвольное натуральное N стремится к бесконечности. Таким образом, у нас есть весьма большой запас функций $r(u)$. Можно сказать, что если переменная u фиксирована, то, перебирая различные представители обобщенной модели, мы всегда можем найти такой, в котором $r(u)$ принимает любое наперед заданное значение. В этом смысле мы можем рассматривать переменные u и $r(u)$ как независимые. Тогда скалярное произведение двух векторов общего вида становится функцией переменных двух типов: с одной стороны, это переменные u_k и v_k , с другой — переменные $r(u_k)$ и $r(v_k)$. В обобщенной модели оба типа переменных принимают произвольные значения независимо друг от друга.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если мы хотим избежать сингулярностей в скалярных произведениях, когда в наборах \bar{u} и \bar{v} есть совпадающие элементы, то одно ограничение все же требуется наложить. В этом случае разумно потребовать, что если $u_k = v_j$, то и $r(u_k) = r(v_j)$. Понятно, что при этом нам следует ограничиться гладкими функциями $r(u)$.

Если же один или оба вектора являются on-shell, то ситуация меняется. Тогда между двумя типами переменных возникает связь, которая задается уравнениями Бете. Важно подчеркнуть, однако, что в рамках обобщенной модели уравнения Бете более не являются уравнениями. Это просто связи между двумя типами переменных. Если представитель обобщенной модели зафиксирован (т. е. задана конкретная функция $r(u)$), то уравнения Бете снова становятся уравнениями: требуется определить возможные значения параметров u_k по заданной функции $r(u)$. Но в рамках обобщенной модели мы можем посмотреть на эти связи и с другой точки зрения, а именно, мы можем считать переменные u_k произвольными комплексными числами и определить по ним значения функции $r(u)$ в точках u_k .

В рамках обобщенной модели доказательство тождества (1.5) становится тривиальным. Мы сначала рассматриваем скалярное произведение (9.3.11) для случая общего положения, т. е. параметры \bar{u} и \bar{v} являются произвольными комплексными числами с единственным ограничением $u_j \neq v_k$, $j, k = 1, \dots, n$. Затем мы налагаем на параметры $r(u_j)$ и $r(v_k)$ связи (уравнения Бете), продолжая считать \bar{u} и \bar{v} произвольными. С одной стороны, мы получаем (1.3), с другой стороны мы имеем скалярное произведение двух on-shell векторов, которое должно равняться нулю. Таким образом мы доказываем тождество (1.5) при произвольных несовпадающих u_j и v_k . В точках, где некоторые (или все) u_j совпадают с v_k , тождество доопределяется по непрерывности. Ясно, что если некоторая рациональная функция равна нулю всюду, за исключением, быть может, конечного числа изолированных точек, то по непрерывности она доопределяется нулем везде.

1.1. Два представления для скалярного произведения. Приведем еще один пример, который демонстрирует преимущества обобщенной модели. Рассмотрим скалярное произведение двух векторов Бете (1.1), в котором вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ является твистованным on-shell вектором, а вектор $\langle 0|C(\bar{v})$ — обычным on-shell вектором. Этот пример является частным случаем скалярного произведения, который рассматривался в разделах 9.3 и 9.5. Там вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ был твистованным on-shell вектором, а вектор $\langle 0|C(\bar{v})$ был произвольным вектором Бете. В частном случае он может являться и обычным on-shell вектором. Ответ для такого скалярного произведения дается формулами (9.5.17) и (9.5.18). Однако теперь с помощью уравнений Бете мы можем выразить

функции $r(v_k)$ через произведения функций f . Сделав это, мы после несложных преобразований получим

$$S_n(\bar{v}|\bar{u}) = \Delta'_n(\bar{u})\Delta_n(\bar{v}) h(\bar{u}, \bar{v}) \det_n \mathcal{M}_{jk}^{(1)}, \quad (1.9)$$

где

$$\mathcal{M}_{jk}^{(1)} = t(u_j, v_k) + \kappa t(v_k, u_j) \frac{h(v_k, \bar{u})h(\bar{v}, v_k)}{h(\bar{u}, v_k)h(v_k, \bar{v})}. \quad (1.10)$$

Это один возможный ответ, но есть и другой. Согласно равенству (9.3.9), мы можем поменять местами векторы $B(\bar{u})|0\rangle$ и $\langle 0|C(\bar{v})$

$$S_n(\bar{v}|\bar{u}) = \frac{\langle 0|C(\bar{u})B(\bar{v})|0\rangle}{d(\bar{v})d(\bar{u})}. \quad (1.11)$$

Теперь мы можем считать, что вектор $B(\bar{v})|0\rangle$ является твистованным on-shell вектором с $\kappa = 1$, а вектор $\langle 0|C(\bar{u})$ — произвольным вектором Бете (который в частном случае может быть и твистованным on-shell вектором). Ясно, что ответ для такого скалярного произведения снова дается формулами (9.5.17) и (9.5.18), в которых нужно заменить $\bar{u} \leftrightarrow \bar{v}$ и положить $\kappa = 1$:

$$S_n(\bar{v}|\bar{u}) = \Delta'_n(\bar{u})\Delta_n(\bar{v}) h(\bar{u}, \bar{v}) \det_n \mathcal{M}_{jk}^{(2)}, \quad (1.12)$$

где

$$\mathcal{M}_{jk}^{(2)} = t(u_k, v_j) \left(1 - r(u_k) \frac{f(\bar{v}_j, u_k)}{f(u_k, \bar{v}_j)} \right), \quad (1.13)$$

и мы учли, что $\Delta'_n(\bar{u})\Delta_n(\bar{v}) = \Delta'_n(\bar{v})\Delta_n(\bar{u})$. Теперь нам следует выразить функции $r(u_k)$ через произведения функций f с помощью твистованных уравнений Бете, и мы получим

$$\mathcal{M}_{jk}^{(2)} = t(u_k, v_j) + \kappa t(v_j, u_k) \frac{h(u_k, \bar{u})h(\bar{v}, u_k)}{h(\bar{u}, u_k)h(u_k, \bar{v})}. \quad (1.14)$$

Таким образом, мы получаем два разных представления для одного и того же скалярного произведения $S_n(\bar{v}|\bar{u})$ и, следовательно, должно иметь место равенство детерминантов:

$$\det_n \left(t(u_j, v_k) + \kappa t(v_k, u_j) \frac{h(v_k, \bar{u})h(\bar{v}, v_k)}{h(\bar{u}, v_k)h(v_k, \bar{v})} \right) = \det_n \left(t(u_k, v_j) + \kappa t(v_j, u_k) \frac{h(u_k, \bar{u})h(\bar{v}, u_k)}{h(\bar{u}, u_k)h(u_k, \bar{v})} \right). \quad (1.15)$$

С точки зрения какой-либо конкретной модели это равенство должно выполняться в том случае, если параметры \bar{u} удовлетворяют твистованным уравнениям Бете, а \bar{v} — обычным. Однако с точки зрения обобщенной модели равенство (1.15) должно являться тождеством, поскольку при его выводе мы налагали ограничения только на параметры $r(u_k)$ и $r(v_k)$, в то время как параметры \bar{v} и \bar{u} оставались произвольными комплексными числами. И действительно, два детерминанта в формуле (1.15) тождественно равны друг другу, что видно невооруженным глазом по крайней мере при $n = 1$. При $n > 1$ это уже далеко не очевидно, но тождество (1.15) можно доказать по индукции. Метод доказательства достаточно стандартный. Мы приведем лишь основную идею, предоставив читателю проверить детали.

Рассмотрим для определенности случай тригонометрической R -матрицы. Первым делом следует умножить оба детерминанта на произведение $\Delta'_n(\bar{u})\Delta_n(\bar{v}) h(\bar{u}, \bar{v})$. Затем следует перейти от переменных \bar{v} , \bar{u} и η к переменным $x_j = e^{2v_j}$, $y_j = e^{2u_j}$ и $q = e^\eta$, после чего нужно рассмотреть обе части равенства (1.15) как рациональные функции от \bar{x} и \bar{y} (с точностью до тривиального произведения радикалов, как в формуле для ССДС (6.4.12)). После этого надо удостовериться в том, что вычеты в точках $y_k = x_j$ сводятся к детерминантам матриц $(n-1) \times (n-1)$, которые

должны совпадать по индуктивному предположению. Отдельная задача — доказать, что детерминант матрицы $\mathcal{M}_{jk}^{(1)}$ не имеет полюсов в точках $x_j q^2 = x_k$, а детерминант матрицы $\mathcal{M}_{jk}^{(2)}$ — в точках $y_j q^2 = y_k$. Это действительно так, потому что в этих точках два столбца у каждой из этих матриц оказываются пропорциональны друг другу. Прделав все это, мы увидим, что разность двух детерминантов (умноженная на $\Delta'_n(\bar{u})\Delta_n(\bar{v})h(\bar{u}, \bar{v})$) является аналитической функцией во всей комплексной плоскости, которая убывает, когда один из ее аргументов стремится к бесконечности, а остальные фиксированы. Отсюда по теореме Лиувилля и следует доказательство тождества (1.15).

2. Композитная модель

2.1. Определение композитной модели. Допустим, что мы имеем некоторую решеточную модель. Тогда ее матрица монодромии является произведением L -операторов (2.3.14). Если исходная модель непрерывная, то мы можем считать определение (2.3.14) решеточной аппроксимацией матрицы монодромии рассматриваемой модели. Локальные операторы входят в L -операторы. В то же время, матрица монодромии является глобальным объектом: ее матричные элементы зависят от локальных операторов во всех узлах решетки. В частности, векторы Бете $B(\bar{u})|0\rangle$ являются глобальными объектами. Поэтому при вычислении формфакторов локальных операторов нам необходимо установить коммутационные соотношения между локальными и глобальными операторами.

Данная задача решается в рамках композитной модели. Зафиксируем среди узлов решетки некоторый узел с номером m и введем *парциальные матрицы монодромии* $T^{(1)}(u)$ и $T^{(2)}(u)$ следующим образом

$$T^{(2)}(u) = L_N(u) \dots L_{m+1}(u), \quad T^{(1)}(u) = L_m(u) \dots L_1(u). \quad (2.1)$$

Тогда полная матрица монодромии оказывается равной произведению парциальных матриц монодромии

$$T(u) = T^{(2)}(u)T^{(1)}(u). \quad (2.2)$$

Мы будем называть такую модель обобщенной композитной моделью².

Описанный прием позволяет, с одной стороны, включить в рассмотрение операторы, так или иначе зависящие от некоторого выделенного узла с номером m , а с другой стороны, по-прежнему работать с матрицами монодромии и R -матрицей. Матричные элементы матриц $T^{(1)}(u)$ и $T^{(2)}(u)$ снабдим верхним индексом

$$T^{(j)}(u) = \begin{pmatrix} A^{(j)}(u) & B^{(j)}(u) \\ C^{(j)}(u) & D^{(j)}(u) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2. \quad (2.3)$$

Каждая из парциальных матриц удовлетворяет RTT -соотношению с той же самой R -матрицей, что и полная матрица монодромии. Это следует из того, что они обе являются произведением L -операторов, каждый из которых удовлетворяет RTT -соотношению. Операторы, входящие в разные парциальные матрицы, коммутируют друг с другом. Каждая из матриц $T^{(j)}(u)$ обладает вектором $|0\rangle^{(j)}$ и дуальным вектором $\langle 0|^{(j)}$, причем $|0\rangle = |0\rangle^{(2)} \otimes |0\rangle^{(1)}$. Формулы для действия

²В работе [19], где эта модель была введена впервые, она называлась обобщенной двухузельной моделью. Позднее, в работе [20] использовался термин двухкомпонентная модель. К сожалению, оба термина могут вызвать недоразумения: первый — при рассмотрении спиновых цепочек, второй — при рассмотрении моделей многокомпонентных газов.

операторов на эти векторы аналогичны формулам действия для полной матрицы монодромии

$$\begin{aligned} A^{(j)}(u)|0\rangle^{(j)} &= a^{(j)}(u)|0\rangle^{(j)}, & D^{(j)}(u)|0\rangle^{(j)} &= d^{(j)}(u)|0\rangle^{(j)}, & C^{(j)}(u)|0\rangle^{(j)} &= 0, \\ \langle 0|^{(j)}A^{(j)}(u) &= a^{(j)}(u)\langle 0|^{(j)}, & \langle 0|^{(j)}D^{(j)}(u) &= d^{(j)}(u)\langle 0|^{(j)}, & \langle 0|^{(j)}B^{(j)}(u) &= 0, \end{aligned}$$

где $a^{(j)}(u)$ и $d^{(j)}(u)$ суть некоторые функции, явный вид которых мы не конкретизируем. Легко видеть, что $a(u) = a^{(1)}(u)a^{(2)}(u)$ и $d(u) = d^{(1)}(u)d^{(2)}(u)$.

Определим парциальные векторы Бете и дуальные к ним стандартным образом

$$B^{(j)}(\bar{u})|0\rangle^{(j)}, \quad \langle 0|^{(j)}C^{(j)}(\bar{u}). \quad (2.4)$$

Действие парциальных операторов $A^{(j)}$, $B^{(j)}$, $C^{(j)}$ и $D^{(j)}$ на соответствующие векторы Бете такое же, как и действие полных операторов на полные векторы Бете. Надо только всюду заменить функции $a(u)$ и $d(u)$ на $a^{(j)}(u)$ и $d^{(j)}(u)$. Именно таким образом в формулах для скалярных произведений и формфакторов возникает зависимость от выделенного узла. Если, например, мы имеем дело с однородной моделью и действие диагональных матричных элементов L -операторов на вакуум задается формулами

$$L_n^{11}(u)|0\rangle = \alpha(u)|0\rangle, \quad L_n^{22}(u)|0\rangle = \delta(u)|0\rangle, \quad (2.5)$$

то

$$a(u) = \alpha^N(u), \quad d(u) = \delta^N(u). \quad (2.6)$$

В то же время

$$\begin{aligned} a^{(1)}(u) &= \alpha^m(u), & d^{(1)}(u) &= \delta^m(u), \\ a^{(2)}(u) &= \alpha^{N-m}(u), & d^{(2)}(u) &= \delta^{N-m}(u). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Как мы увидим в последующих лекциях, в конечные ответы для формфакторов локальных операторов так или иначе входят функции $a^{(j)}(u)$ и $d^{(j)}(u)$, и тем самым в них появляется зависимость от выделенного узла с номером m .

Для того чтобы получить формулы действия парциальных операторов на полный вектор Бете $B(\bar{u})|0\rangle$, необходимо выразить полный вектор через парциальные (2.4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Произвольный полный вектор Бете выражается через парциальные векторы следующим образом:*

$$B(\bar{u})|0\rangle = \sum_{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\}} a^{(2)}(\bar{u}_I) d^{(1)}(\bar{u}_{II}) B^{(1)}(\bar{u}_I) B^{(2)}(\bar{u}_{II})|0\rangle \cdot f(\bar{u}_{II}, \bar{u}_I). \quad (2.8)$$

Здесь суммирование ведется по всем возможным разбиениям множества \bar{u} на два подмножества \bar{u}_I и \bar{u}_{II} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (2.8) может быть доказана индукцией по $n = \#\bar{u}$. Для $n = 1$ соотношение (2.8) справедливо. Действительно, из (2.2) находим

$$B(u) = A^{(2)}(u)B^{(1)}(u) + B^{(2)}(u)D^{(1)}(u), \quad (2.9)$$

откуда и следует формула (2.8) при $n = 1$. Пусть (2.8) верна для $n - 1$:

$$B(\bar{u}_n)|0\rangle = \sum_{\bar{u}_n \rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\}} a^{(2)}(\bar{u}_I) d^{(1)}(\bar{u}_{II}) B^{(1)}(\bar{u}_I) B^{(2)}(\bar{u}_{II})|0\rangle \cdot f(\bar{u}_{II}, \bar{u}_I), \quad (2.10)$$

где суммирование ведется по разбиениям множества $\bar{u}_n = \bar{u} \setminus u_n$. Тогда

$$B(\bar{u})|0\rangle = (A^{(2)}(u_n)B^{(1)}(u_n) + B^{(2)}(u_n)D^{(1)}(u_n)) \times \sum_{\bar{u}_n \mapsto \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\}} a^{(2)}(\bar{u}_I)d^{(1)}(\bar{u}_{II})B^{(1)}(\bar{u}_I)B^{(2)}(\bar{u}_{II})|0\rangle \cdot f(\bar{u}_{II}, \bar{u}_I). \quad (2.11)$$

Подействуем операторами $A^{(2)}(u_n)$ и $D^{(1)}(u_n)$ на получившиеся состояния. Для этого надо воспользоваться формулами (3.3.21) и (3.3.29), заменив в них повсюду a , d и B соответственно на $a^{(2)}$, $d^{(1)}$ и $B^{(1)}$ или $B^{(2)}$. Удобно записать формулы действия в следующем виде:

$$A^{(2)}(v)B^{(2)}(\bar{u})|0\rangle^{(2)} = f(\bar{u}, v)a^{(2)}(v)B^{(2)}(\bar{u})|0\rangle^{(2)} + \sum_{\bar{u} \mapsto \{u_i, \bar{u}_{ii}\}} a^{(2)}(u_i)g(v, u_i)f(\bar{u}_{ii}, u_i)B^{(2)}(v)B^{(2)}(\bar{u}_{ii})|0\rangle^{(2)}. \quad (2.12)$$

В этой формуле, во второй строке суммирование ведется по разбиению набора \bar{u} на подмножества u_i и \bar{u}_{ii} , причем подмножество u_i состоит из одного элемента. Аналогично,

$$D^{(1)}(v)B^{(1)}(\bar{u})|0\rangle^{(1)} = f(v, \bar{u})d^{(1)}(v)B^{(1)}(\bar{u})|0\rangle^{(1)} + \sum_{\bar{u} \mapsto \{u_i, \bar{u}_{ii}\}} d^{(1)}(u_i)g(u_i, v)f(u_i, \bar{u}_{ii})B^{(1)}(v)B^{(1)}(\bar{u}_{ii})|0\rangle^{(1)}. \quad (2.13)$$

Рассмотрим сначала вклады, возникающие в случае, когда операторы $A^{(2)}$ и $D^{(1)}$ обмениваются своими аргументами с операторами $B^{(2)}$ и $B^{(1)}$. Тогда для действия оператора $A^{(2)}(u_n)$ нужно взять слагаемые только из второй строки формулы (2.12). Мы получаем вклад

$$\sum_{\bar{u}_n \mapsto \{\bar{u}_I, u_i, \bar{u}_{ii}\}} g(u_n, u_i)a^{(2)}(u_i)a^{(2)}(\bar{u}_I)d^{(1)}(u_i)d^{(1)}(\bar{u}_{ii})B^{(1)}(u_n)B^{(2)}(u_n) \times B^{(1)}(\bar{u}_I)B^{(2)}(\bar{u}_{ii})|0\rangle \cdot f(u_i, \bar{u}_I)f(\bar{u}_{ii}, \bar{u}_I)f(\bar{u}_{ii}, u_i). \quad (2.14)$$

Сделаем необходимые пояснения. В формуле (2.11) набор \bar{u}_n уже был разбит на подмножества \bar{u}_I и \bar{u}_{II} . После действия оператора $A^{(2)}(u_n)$ на вектор $B^{(2)}(\bar{u}_{II})|0\rangle$ согласно (2.12) возникло дополнительное разбиение набора \bar{u}_{II} на подмножества u_i и \bar{u}_{ii} . В результате набор \bar{u}_n оказался разбит на три подмножества $\bar{u}_n \mapsto \{\bar{u}_I, u_i, \bar{u}_{ii}\}$, причем u_i состоит из одного элемента. Очевидно также, что $d^{(1)}(\bar{u}_{II}) = d^{(1)}(u_i)d^{(1)}(\bar{u}_{ii})$ и $f(\bar{u}_{II}, \bar{u}_I) = f(u_i, \bar{u}_I)f(\bar{u}_{ii}, \bar{u}_I)$.

Аналогично, пользуясь второй строкой формулы (2.13), находим вклад от действия оператора $D^{(1)}(u_n)$

$$\sum_{\bar{u}_n \mapsto \{\bar{u}_{ii}, u_i, \bar{u}_{II}\}} g(u_i, u_n)a^{(2)}(u_i)a^{(2)}(\bar{u}_{ii})d^{(1)}(u_i)d^{(1)}(\bar{u}_{II})B^{(1)}(u_n)B^{(2)}(u_n) \times B^{(1)}(\bar{u}_{ii})B^{(2)}(\bar{u}_{II})|0\rangle \cdot f(u_i, \bar{u}_{ii})f(\bar{u}_{II}, \bar{u}_{ii})f(\bar{u}_{II}, u_i). \quad (2.15)$$

На первый взгляд кажется, что вклады (2.14) и (2.15) не имеют друг с другом ничего общего. На самом же деле они отличаются друг от друга только знаком. Для того чтобы этого увидеть, достаточно переименовать подмножества в одной из этих формул так, чтобы произведения операторов $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ в обеих формулах брались бы по одним и тем же подмножествам. Например, мы можем в формуле (2.14) сначала сделать замену \bar{u}_{ii} на \bar{u}_{II} , а потом заменить \bar{u}_I на \bar{u}_{ii} . Тогда вклад (2.14) принимает вид

$$\sum_{\bar{u}_n \mapsto \{\bar{u}_{ii}, u_i, \bar{u}_{ii}\}} g(u_n, u_i) a^{(2)}(u_i) a^{(2)}(\bar{u}_{ii}) d^{(1)}(u_i) d^{(1)}(\bar{u}_{ii}) B^{(1)}(u_n) B^{(2)}(u_n) \times B^{(1)}(\bar{u}_{ii}) B^{(2)}(\bar{u}_{ii}) |0\rangle \cdot f(u_i, \bar{u}_{ii}) f(\bar{u}_{ii}, \bar{u}_{ii}) f(\bar{u}_{ii}, u_i). \quad (2.16)$$

Теперь мы видим, что в силу $g(u_n, u_i) = -g(u_i, u_n)$, выражение (2.16) отличается от (2.15) только знаком. Поэтому в сумме эти вклады сокращают друг друга, и у нас остаются только вклады, в которых операторы $A^{(2)}$ и $D^{(1)}$ при действии на парциальные векторы сохраняют свои аргументы (т.е. слагаемые в первых строках формул (2.12) и (2.13)). Мы получаем

$$B(\bar{u})|0\rangle = \sum_{\bar{u}_n \mapsto \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\}} a^{(2)}(u_n) a^{(2)}(\bar{u}_I) d^{(1)}(\bar{u}_{II}) B^{(1)}(u_n) B^{(1)}(\bar{u}_I) B^{(2)}(\bar{u}_{II}) |0\rangle \cdot f(\bar{u}_{II}, u_n) f(\bar{u}_{II}, \bar{u}_I) + \sum_{\bar{u}_n \mapsto \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\}} a^{(2)}(\bar{u}_I) d^{(1)}(u_n) d^{(1)}(\bar{u}_{II}) B^{(1)}(\bar{u}_I) B^{(2)}(u_n) B^{(2)}(\bar{u}_{II}) |0\rangle \cdot f(u_n, \bar{u}_I) f(\bar{u}_{II}, \bar{u}_I). \quad (2.17)$$

Легко видеть, что это и есть формула (2.8). Действительно, при разбиении полного набора \bar{u} на два подмножества переменная u_n может попасть либо в первое подмножество, либо во второе. Каждое из двух слагаемых в формуле (2.17) соответствует одной из указанных возможностей.

Формула, аналогичная (2.8), существует и для дуальных состояний

$$\langle 0|C(\bar{u}) = \langle 0| \sum_{\bar{u} \mapsto \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\}} a^{(1)}(\bar{u}_{II}) d^{(2)}(\bar{u}_I) C^{(1)}(\bar{u}_I) C^{(2)}(\bar{u}_{II}) \cdot f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II}). \quad (2.18)$$

Доказательство этой формулы полностью аналогично приведенному выше.

2.2. Мультикомпозиционная модель. Для вычисления формфакторов локальных операторов уже достаточно композитной модели, описанной в предыдущем пункте. С деталями этого вычисления мы познакомимся в следующих лекциях. А пока отметим, что можно пойти дальше и разбить полную матрицу монодромии не на две, а на большее число парциальных матриц $T^{(j)}(u)$

$$T(u) = T^{(M)}(u) \dots T^{(1)}(u). \quad (2.19)$$

Такую модель называют мультикомпозиционной. Для каждой матрицы монодромии $T^{(j)}(u)$ можно определить парциальные векторы Бете $B^{(j)}|0\rangle^{(j)}$. Тогда полный вектор Бете выражается через парциальные следующим образом

$$B(\bar{u})|0\rangle = \sum_{\bar{u} \mapsto \{\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^M\}} \prod_{1 \leq k < j \leq M} \left\{ a^{(j)}(\bar{u}^k) d^{(k)}(\bar{u}^j) f(\bar{u}^j, \bar{u}^k) \right\} \prod_{j=1}^M \left\{ B^{(j)}(\bar{u}^j) \right\} |0\rangle. \quad (2.20)$$

Ввиду большого количества подмножеств, в этой формуле мы не используем римские цифры, а обозначаем подмножества верхним индексом, набранным жирным шрифтом. Сумма берется по всем разбиениям исходного множества \bar{u} на M подмножеств $\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^M$. Функции $a^{(j)}(u)$ и $d^{(j)}(u)$ являются вакуумными собственными значениями соответственно операторов $A^{(j)}(u)$ и $D^{(j)}(u)$. Важно подчеркнуть, что количество парциальных матриц монодромии M никак не связано с количествами параметров Бете $n = \#\bar{u}$. В частности, можно рассматривать случай $M > n$. Тогда некоторые подмножества в формуле (2.20) заведомо пусты. Однако не следует забывать, что и при $M \leq n$ в формуле (2.20) могут быть слагаемые, в которых некоторые из подмножеств пусты.

Формулу (2.20) легко доказать индукцией по M . В самом деле, предполагая, что она верна для $M - 1$ парциальных матриц монодромии, мы применяем к парциальному вектору

$B^{(M-1)}(\bar{u}^{M-1})|0\rangle^{(M-1)}$ равенство (2.8). Это немедленно дает нам формулу (2.20) для M парциальных матриц монодромии.

Введение мультикомполитной модели является удобным способом выразить векторы Бете через локальные операторы. Рассмотрим, например, неоднородную XXZ цепочку, состоящую из N узлов. Матрица монодромии определяется как произведение локальных L -операторов

$$T(u) = L_N(u - \xi_M) \dots L_1(u - \xi_1), \quad (2.21)$$

где ξ_k суть неоднородности и

$$L_n(u) = \frac{1}{u} \begin{pmatrix} u + \frac{c}{2}(1 + \sigma_n^z) & c \sigma_n^- \\ c \sigma_n^+ & u + \frac{c}{2}(1 - \sigma_n^z) \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Нормировочный множитель $1/u$ выбран таким образом, чтобы иметь $d(u) = 1$. Напомним, что вакуумный вектор представляет собой состояние со всеми спинами вверх

$$|0\rangle = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_N \otimes \dots \otimes \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_1. \quad (2.23)$$

Рассмотрим мультикомполитную модель, состоящую из N парциальных матриц монодромии $T^{(j)}$. Это означает, что каждая матрица $T^{(j)}$ совпадает с L -оператором $L_j(u - \xi_j)$, а парциальный вакуумный вектор имеет вид $|0\rangle^{(j)} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_j$. Тогда каждый парциальный вектор Бете в формуле (2.20) соответствует j -му узлу цепочки, поэтому в силу (2.22) мы получим

$$B^{(j)}(\bar{u}^j)|0\rangle^{(j)} = g(\bar{u}^j, \xi_j) \left(\sigma_j^-\right)^{n_j} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_j, \quad (2.24)$$

где n_j — количество переменных в наборе \bar{u}^j . Очевидно, что этот вектор обращается в нуль при $n_j > 1$, поскольку $(\sigma_j^-)^2 = 0$. Таким образом, мы приходим к выводу, что все $n_j \leq 1$, и подмножества \bar{u}^j либо пусты, либо состоят из одного элемента. Пусть полное количество переменных в наборе \bar{u} равно n , и пусть подмножества \bar{u}^{j_k} ($k = 1, \dots, n$), соответствующие узлам решетки с номерами j_1, \dots, j_n , содержат один элемент u_k , в то время как остальные подмножества пусты. Тогда сумма по разбиениям набора \bar{u} превращается в сумму по перестановкам в наборе \bar{u} и сумму по узлам решетки j_1, \dots, j_n при условии $j_n > \dots > j_1$.

Легко видеть, что

$$\frac{u - \xi_j + \frac{c}{2}(1 + \sigma_j^z)}{u - \xi_j} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_j = f(u, \xi_j) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_j, \quad \frac{u - \xi_j + \frac{c}{2}(1 - \sigma_j^z)}{u - \xi_j} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_j = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)_j \quad (2.25)$$

и, следовательно,

$$a^{(j)}(u) = f(u, \xi_j), \quad d^{(j)}(u) = 1. \quad (2.26)$$

Тогда формула (2.20) принимает вид

$$B(\bar{u})|0\rangle = \text{Sym}_{\bar{u}} \prod_{1 \leq k < j \leq n} f(u_j, u_k) \sum_{N \geq j_n > \dots > j_1 \geq 1} \prod_{k=1}^n \left[\left(\prod_{m=j_k+1}^N f(u_k, \xi_m) \right) g(u_k, \xi_{j_k}) \sigma_{j_k}^- \right] |0\rangle, \quad (2.27)$$

где символ Sym означает симметризацию (т. е. сумму по перестановкам) по набору, который указан в нижнем индексе. В формуле (2.27) симметризация действует на все выражение, зависящее от \bar{u} . В однородном пределе $\xi_k = c/2$ это выражение совпадает с формулой для собственного вектора гамильтониана XXZ цепочки, найденной Г. Бете в 1931 г. (см. [1, 2]).

Все рассуждения, приведенные выше, полностью переносятся на случай XXZ цепочки, и формула для вектора Бете (2.27) сохраняется. Приведем ее в развернутом виде для однородной модели

$$B(\bar{u})|0\rangle = \prod_{j=1}^n \frac{\text{sh } \eta}{\text{sh}(u_j - \frac{\eta}{2})} \text{Sym}_{\bar{u}} \prod_{1 \leq k < j \leq n} \frac{\text{sh}(u_j - u_k + \eta)}{\text{sh}(u_j - u_k)} \sum_{N \geq j_n > \dots > j_1 \geq 1} \prod_{k=1}^n \left(\frac{\text{sh}(u_k + \frac{\eta}{2})}{\text{sh}(u_k - \frac{\eta}{2})} \right)^{N-j_k} \sigma_{j_k}^- |0\rangle. \quad (2.28)$$

Если в этой формуле заменить все гиперболические функции на рациональные (т.е. сделать замену $u_k \rightarrow \epsilon u_k$, $\eta \rightarrow \epsilon \eta$ и рассмотреть предел $\epsilon \rightarrow 0$), то мы получим вектор Бете для цепочки XXX .

Достоинство формулы (2.28) в том, что в ней вектор Бете выражен через локальные операторы. Поэтому мы легко можем вычислить действие локальных спиновых операторов σ_k^α , $\alpha = x, y, z$, на это состояние. Однако если сравнить правую часть (2.28) с левой, то ясно, что последняя выглядит несколько проще.

3. Особый on-shell вектор Бете

В этом разделе мы закончим рассмотрение примера вектора Бете $B(u_1)B(u_2)|0\rangle$ в спиновой цепочке из четырех узлов. Мы начали рассмотрение этого примера в разделе 4.2.2 и продолжили в разделе 5.3. Напомним вкратце, что нам известно к этому моменту. Для определенности будем говорить об XXZ цепочке.

Значения $u_1 = \eta/2$ и $u_2 = -\eta/2$ формально удовлетворяют уравнениям Бете, но вектор Бете, построенный по такому решению, обращается в нуль-вектор. Если же нормировать исходный вектор $B(u_1)B(u_2)|0\rangle$ так, чтобы при произвольных u_1 и u_2 он имел бы единичную норму, то результат предела $u_1 \rightarrow \eta/2$ и $u_2 \rightarrow -\eta/2$ зависит от того, как именно u_1 и u_2 стремятся к своим предельным значениям. Если же мы вообще не будем учитывать это решение уравнений Бете, то тогда у нас останется всего пять on-shell векторов Бете, и мы заведомо не сможем построить базис в 6-мерном пространстве.

Из создавшейся ситуации можно выйти с помощью перехода к твистованным уравнениям Бете. В этом случае при $\kappa \neq 1$ можно найти 6 допустимых решений твистованных уравнений Бете и построить по ним 6 твистованных on-shell векторов. Мы уже знаем, что твистованные on-shell векторы, отвечающие различным решениям, взаимно ортогональны. Поэтому этот набор из 6 векторов образует базис в 6-мерном пространстве. Нам остается выяснить, что происходит в пределе $\kappa \rightarrow 1$. Напомним, что в этом пределе одно из допустимых решений твистованных уравнений Бете стремится как раз к значениям $u_1 = \eta/2$ и $u_2 = -\eta/2$.

Запишем представление (2.28) для случая $N = 4$ и $n = 2$. Для удобства дальнейших вычислений умножим этот вектор на коэффициент

$$\frac{\text{sh}(u_1 - u_2) \text{sh}(u_1 + \frac{\eta}{2}) \text{sh}(u_2 - \frac{\eta}{2})}{\text{sh}^2 \eta \text{sh}(u_1 - u_2 + \eta)}. \quad (3.1)$$

Тогда

$$\begin{aligned} B(u_1)B(u_2)|0\rangle &= \left(\frac{\text{sh}(u_1 + \frac{\eta}{2})}{\text{sh}(u_1 - \frac{\eta}{2})} \right)^3 \left(\frac{\text{sh}(u_2 + \frac{\eta}{2})}{\text{sh}(u_2 - \frac{\eta}{2})} \right)^4 \\ &\times \left[\frac{\text{sh}(u_2 - u_1 + \eta)}{\text{sh}(u_2 - u_1 - \eta)} \sum_{4 \geq j_2 > j_1 \geq 1} \left(\frac{\text{sh}(u_1 - \frac{\eta}{2})}{\text{sh}(u_1 + \frac{\eta}{2})} \right)^{j_1} \left(\frac{\text{sh}(u_2 - \frac{\eta}{2})}{\text{sh}(u_2 + \frac{\eta}{2})} \right)^{j_2} \sigma_{j_1}^- \sigma_{j_2}^- |0\rangle \right] \end{aligned}$$

$$+ \sum_{4 \geq j_2 > j_1 \geq 1} \left(\frac{\text{sh}(u_2 - \frac{\eta}{2})}{\text{sh}(u_2 + \frac{\eta}{2})} \right)^{j_1} \left(\frac{\text{sh}(u_1 - \frac{\eta}{2})}{\text{sh}(u_1 + \frac{\eta}{2})} \right)^{j_2} \sigma_{j_1}^- \sigma_{j_2}^- |0\rangle. \quad (3.2)$$

Уже из этой формулы видно, какие возникают проблемы в пределе $u_1 \rightarrow \eta/2$ и $u_2 \rightarrow -\eta/2$. Действительно, если положить $u_1 = \epsilon_1 + \eta/2$ и $u_2 = \epsilon_2 - \eta/2$, сразу возникает вопрос о том, как ведет себя отношение ϵ_1/ϵ_2 при $\epsilon_k \rightarrow 0$, $k = 1, 2$. Но кроме этого нам еще надо указать, как в этом пределе ведет себя разность $\epsilon_1 - \epsilon_2$, потому что в формуле (3.2) есть члены, пропорциональные $u_2 - u_1 + \eta = \epsilon_2 - \epsilon_1$. Априори у нас нет никаких предписаний о том, как зафиксировать эти отношение и разность³. Однако с помощью твистованных уравнений Бете все проблемы легко решаются.

В разделе 5.3 мы вводили параметризацию для параметра твиста $\kappa = \theta^2$ и сделали замену переменных

$$\frac{\text{sh}(u_k - \frac{\eta}{2})}{\text{sh}(u_k + \frac{\eta}{2})} = w_k, \quad k = 1, 2. \quad (3.3)$$

Из твистованных уравнений Бете также следует, что

$$\frac{\text{sh}(u_2 - u_1 + \eta)}{\text{sh}(u_2 - u_1 - \eta)} = \theta^2 \left(\frac{\text{sh}(u_1 - \frac{\eta}{2})}{\text{sh}(u_1 + \frac{\eta}{2})} \right)^4 = \theta^2 w_1^4. \quad (3.4)$$

Нас интересует решение, в котором $w_1 \rightarrow 0$, $w_2 \rightarrow \infty$ и одновременно выполнено условие $w_1 w_2 = -\theta$. При этом сам параметр θ стремится к единице.

Потребуем, чтобы вектор Бете в формуле (3.2) отвечал именно такому решению твистованных уравнений Бете, и перепишем его в терминах w_1 и w_2 :

$$B(u_1)B(u_2)|0\rangle = \frac{w_1^3}{\theta^2} \sum_{4 \geq j_2 > j_1 \geq 1} w_1^{j_1} w_2^{j_2} \sigma_{j_1}^- \sigma_{j_2}^- |0\rangle + \frac{1}{w_1} \sum_{4 \geq j_2 > j_1 \geq 1} w_2^{j_1} w_1^{j_2} \sigma_{j_1}^- \sigma_{j_2}^- |0\rangle. \quad (3.5)$$

Здесь мы уже частично воспользовались условием $w_1 w_2 = -\theta$. Воспользуемся этим условием еще раз и исключим из формулы (3.5) параметр w_2 :

$$B(u_1)B(u_2)|0\rangle = \sum_{4 \geq j_2 > j_1 \geq 1} \left((-\theta)^{j_2-2} w_1^{j_1-j_2+3} + (-\theta)^{j_1} w_1^{j_2-j_1-1} \right) \sigma_{j_1}^- \sigma_{j_2}^- |0\rangle. \quad (3.6)$$

Теперь предел $w_1 \rightarrow 0$ и $\theta \rightarrow 1$ не вызывает никаких затруднений. Во втором слагаемом выживают члены с $j_2 = j_1 + 1$, а в первом только один член с $j_1 = 1$ и $j_2 = 4$. Мы получаем

$$B(u_1)B(u_2)|0\rangle = \sum_{j=1}^4 (-1)^j \sigma_j^- \sigma_{j+1}^- |0\rangle, \quad u_1 \rightarrow \frac{\eta}{2}, \quad u_2 \rightarrow -\frac{\eta}{2}, \quad (3.7)$$

где мы воспользовались условием периодичности $\sigma_5^- \equiv \sigma_1^-$. Мы рекомендуем читателю самостоятельно убедиться в том, что построенный вектор действительно является собственным вектором гамильтониана XXZ цепочки, и, таким образом, мы нашли тот вектор, которого нам не хватало для построения полного набора.

³Вообще говоря, можно подставить $u_1 = \epsilon_1 + \eta/2$ и $u_2 = \epsilon_2 - \eta/2$ в уравнения Бете и потребовать, чтобы существовал предел этих уравнений при $\epsilon_k \rightarrow 0$. Это даст дополнительные ограничения на параметры $\epsilon_k \rightarrow 0$.

В заключение заметим, что и в общем случае цепочки, состоящей из N узлов, вектор

$$\sum_{j=1}^N (-1)^j \sigma_j^- \sigma_{j+1}^- |0\rangle \quad (3.8)$$

является собственным для гамильтониана модели XXZ (и модели XXX , поскольку этот вектор не зависит от Δ). Он является специальным пределом вектора Бете $B(u_1)B(u_2)|0\rangle$, когда $u_1 \rightarrow \frac{\eta}{2}$ и $u_2 \rightarrow -\frac{\eta}{2}$.

Лекция 12. Нулевые моды

Содержание этой лекции касается моделей, которые описываются рациональной R -матрицей $R(u, v) = \mathbf{I} + g(u, v)\mathbf{P}$. Обобщение метода, который описан ниже, на случай моделей с тригонометрической R -матрицей остается открытым вопросом.

Мы введем понятие нулевых мод для матричных элементов матрицы монодромии. При этом преследуются две цели. Во-первых, с помощью нулевых мод можно решить задачу о вычислении формфакторов локальных операторов в моделях, для которых неизвестно решение квантовой обратной задачи. Идея вычисления приведена уже в этой лекции, а детали — в следующей. Во-вторых, с помощью нулевых мод можно установить дополнительные связи между формфакторами операторов $T^{ij}(z)$. Прямо скажем, что в моделях с матрицей монодромии 2×2 это не слишком актуально, потому что операторов всего четыре, и некоторые связи между формфакторами очевидны. Так, например, формфактор трансфер-матрицы между двумя различными on-shell векторами должен равняться нулю. Отсюда следует, что формфакторы операторов $A(z)$ и $D(z)$ между различными on-shell векторами отличаются друг от друга только знаком.

Однако в моделях, для которых R -матрица по-прежнему имеет вид $R(u, v) = \mathbf{I} + g(u, v)\mathbf{P}$, а матрица монодромии является матрицей $N \times N$ ($N > 2$), польза от дополнительных соотношений между различными формфакторами уже весьма существенна. С помощью метода, основанного на применении нулевых мод, удастся доказать, что в таких моделях достаточно вычислить лишь один формфактор какого-нибудь диагонального элемента $T^{ii}(z)$. Все остальные могут быть получены из этого начального формфактора с помощью простых предельных переходов. Ниже мы продемонстрируем это утверждение на примере моделей с матрицей монодромии 2×2 .

1. Нулевые моды

Предположим, что матрица монодромии $T(u)$ некоторой модели имеет следующее асимптотическое разложение при $u \rightarrow \infty$:

$$T(u) = \mathbf{1} + \sum_{n=0}^{\infty} T[n] \left(\frac{c}{u}\right)^{n+1}. \quad (1.1)$$

Здесь $T[n]$ — некоторые операторнозначные матрицы, не зависящие от u . Такое разложение согласовано со структурой R -матрицы, которая сама имеет точно такое же разложение. Нетрудно понять, однако, что разложение (1.1) справедливо далеко не для всех T -матриц, удовлетворяющих RTT -соотношению и имеющих вакуумный вектор. Действительно, если (1.1) выполнено для некоторой $T(u)$, то для твистованной матрицы монодромии $\hat{k}T(u)$ разложение начинается уже не с единичной матрицы, а с некоторой диагональной матрицы \hat{k} . Более того, очевидно, что из асимптотического разложения (1.1) следуют аналогичные разложения для вакуумных собственных значений $a(u)$, $d(u)$ и их отношения $r(u) = a(u)/d(u)$:

$$a(u) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a[n] \left(\frac{c}{u}\right)^{n+1}, \quad d(u) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} d[n] \left(\frac{c}{u}\right)^{n+1}, \quad r(u) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} r[n] \left(\frac{c}{u}\right)^{n+1}. \quad (1.2)$$

В то же время, мы уже видели, что в модели квантового нелинейного уравнения Шрёдингера функция $r(u)$ имеет вид $r(u) = e^{-iLu}$, т. е. она имеет существенную особенность в бесконечности.

Таким образом, наличие асимптотического разложения (1.1) является предположением, которое справедливо не для всех моделей с рациональной R -матрицей. Тем не менее, метод, описанный ниже, во многом применим и к тем моделям, в которых матрица монодромии имеет другое асимптотическое разложение. Мы рассмотрим такие модели более подробно в последующих лекциях, а пока будем считать, что формула (1.1) справедлива.

Коэффициенты $T[0]$ называются нулевыми модами. Собственно, только эти коэффициенты нам и потребуются в дальнейшем.

Из RTT -соотношения легко получить коммутационные соотношения между нулевыми модами и полными операторами $A(u)$, $B(u)$, $C(u)$ и $D(u)$. Возьмем, например, коммутационное соотношение операторов $A(v)$ и $B(u)$ (3.3.12). Умножая обе части на u/c и устремляя u к бесконечности, получаем

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{c} A(v)B(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{c} (f(u, v)B(u)A(v) + g(v, u)B(v)A(u)). \quad (1.3)$$

Отсюда, с учетом $f(u, v) \rightarrow 1$ при $u \rightarrow \infty$, находим

$$[B[0], A(v)] = B(v). \quad (1.4)$$

Можно продолжить процесс и устремить к бесконечности переменную v :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v}{c} [B[0], A(v) - 1] = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v}{c} B(v), \quad (1.5)$$

что дает

$$[B[0], A[0]] = B[0]. \quad (1.6)$$

Аналогично можно получить и другие коммутационные соотношения. Мы будем приводить их без подробного вывода по мере надобности.

Причин для введения нулевых мод несколько. Главная состоит в том, что с помощью нулевых мод и композитной модели мы можем вычислить формфакторы локальных операторов, не прибегая к явному решению квантовой обратной задачи. Пусть, как обычно, матрица монодромии является произведением локальных L -операторов (2.3.14), причем каждый L -оператор имеет разложение, аналогичное разложению (1.1):

$$L_k(u) = \mathbf{1} + \sum_{n=0}^{\infty} L_k[n] \left(\frac{c}{u}\right)^{n+1}. \quad (1.7)$$

Заметим, что вся зависимость матрицы монодромии от локальных операторов, связанных с узлом k , находится именно в L -операторе $L_k(u)$, в частности в его нулевой моде $L_k[0]$. С другой стороны, очевидно, что нулевые моды матрицы монодромии являются суммами нулевых мод L -операторов:

$$T[0] = \sum_{k=1}^N L_k[0]. \quad (1.8)$$

Если теперь мы введем композитную модель $T(u) = T^{(2)}(u)T^{(1)}(u)$ такую, что парциальная матрица $T^{(1)}(u)$ соответствует узлам $1, \dots, m$, где $1 \leq m \leq N$, то

$$T^{(1)}[0] = \sum_{k=1}^m L_k[0]. \quad (1.9)$$

Отсюда получаем

$$\langle 0|C(\bar{v})T_{ij}^{(1)}[0]B(\bar{u})|0\rangle = \sum_{k=1}^m \langle 0|C(\bar{v})(L_k)_{ij}[0]B(\bar{u})|0\rangle = \Phi_{ij}(m), \quad (1.10)$$

где $\Phi_{ij}(m)$ — некоторая функция, зависящая от номера узла m . Тогда

$$\Phi_{ij}(m) - \Phi_{ij}(m-1) = \langle 0|C(\bar{v})(L_m)_{ij}[0]B(\bar{u})|0\rangle. \quad (1.11)$$

Таким образом, если мы научимся вычислять формфакторы первых парциальных нулевых мод $T_{ij}^{(1)}[0]$, то тем самым мы вычислим формфакторы локальных операторов $(L_m)_{ij}[0]$, связанных с любым узлом решетки с номером m . Легко также понять, что если исходная модель непрерывная, а представление (2.3.14) является ее решеточной аппроксимацией, то в непрерывном пределе вместо конечной разности (как в формуле (1.11)) возникнет производная от формфактора первой парциальной нулевой моды.

2. Действие нулевых мод на векторы Бете

Действие нулевых мод на векторы Бете легко получить из формул действия соответствующих операторов. Начнем с очевидного равенства

$$B[0] \cdot B(\bar{u})|0\rangle = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{c} B(z)B(\bar{u})|0\rangle. \quad (2.1)$$

По большому счету, формула (2.1) является тавтологией: в правой части просто написано определение нулевой моды $B[0]$. Интересно отметить, однако, что если исходный вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ был on-shell, то вектор, возникающий в правой части равенства (2.1), тоже является on-shell. Это следует из того, что в силу (1.2) уравнения Бете допускают бесконечные решения. Действительно, уравнения Бете для множества $\{z, \bar{u}\}$ имеют вид

$$\begin{aligned} r(z) &= \frac{f(z, \bar{u})}{f(\bar{u}, z)}, \\ r(u_k) &= \frac{f(u_k, \bar{u}_k) f(u_k, z)}{f(\bar{u}_k, u_k) f(z, u_k)}, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Поскольку $r(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$, а функция $f(x, y)$ также стремится к единице, когда любой из ее аргументов стремится к бесконечности, мы видим, что в пределе $z \rightarrow \infty$ первое из уравнений (2.2) выполнено. Из оставшихся уравнений переменная z просто исчезает в пределе $z \rightarrow \infty$, и мы получаем систему уравнений Бете на набор переменных \bar{u} :

$$r(u_k) = \frac{f(u_k, \bar{u}_k)}{f(\bar{u}_k, u_k)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Таким образом, если выполнены условия (2.3), то выполнены и (2.2) при $z \rightarrow \infty$.

Действие нулевой моды $A[0]$ на вектор Бете уже менее тривиально. Для его вычисления нам нужно подействовать оператором $A(z) - 1$ на вектор $B(\bar{u})|0\rangle$, умножить результат на z/c и устремить z к бесконечности. Имеем

$$A[0] \cdot B(\bar{u})|0\rangle = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{c} \left((a(z)f(\bar{u}, z) - 1)B(\bar{u}) + \sum_{k=1}^n a(u_k)g(z, u_k)f(\bar{u}_k, u_k)B(z)B(\bar{u}_k) \right) |0\rangle. \quad (2.4)$$

Поскольку $g(z, u_k) \sim c/z$ и $B(z) \sim c/z$ при $z \rightarrow \infty$, все слагаемые в сумме по k даже после умножения на z/c стремятся к нулю. Остается единственный вклад от первого слагаемого, и мы получаем

$$A[0] \cdot B(\bar{u})|0\rangle = (a[0] - n)B(\bar{u})|0\rangle, \quad (2.5)$$

где $n = \#\bar{u}$. Аналогично находим

$$D[0] \cdot B(\bar{u})|0\rangle = (d[0] + n)B(\bar{u})|0\rangle. \quad (2.6)$$

Таким образом, любой вектор Бете является собственным для нулевых мод $A[0]$ и $D[0]$.

Пожалуй, наиболее любопытным является действие нулевой моды $C[0]$. Из формулы действия $C(z)$ на вектор Бете (9.2.5) находим

$$C[0] \cdot B(\bar{u})|0\rangle = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{c} \left[\sum_{k=1}^n (d(z)a(u_k)X_k + a(z)d(u_k)\tilde{X}_k)B(\bar{u}_k)|0\rangle + \sum_{j < k}^n (a(u_j)d(u_k)Y_{jk} + a(u_k)d(u_j)Y_{kj})B(z)B(\bar{u}_{jk})|0\rangle \right], \quad (2.7)$$

и мы напоминаем, что $\bar{u}_{jk} = \bar{u} \setminus \{u_j, u_k\}$. Коэффициенты в формуле (2.7) даются формулами (9.2.13), (9.2.15), (9.2.24). Легко видеть, что при $z \rightarrow \infty$ двойная сумма в формуле (2.7) исчезает, поскольку коэффициенты Y_{jk} ведут себя как z^{-2} при $z \rightarrow \infty$. Оставшиеся слагаемые дают

$$C[0] \cdot B(\bar{u})|0\rangle = \sum_{k=1}^n (a(u_k)f(\bar{u}_k, u_k) - d(u_k)f(u_k, \bar{u}_k))B(\bar{u}_k)|0\rangle. \quad (2.8)$$

Мы видим, что если исходный вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ был on-shell, то в силу уравнений Бете все коэффициенты в правой части (2.8) обращаются в нуль. То есть, нулевая мода $C[0]$ уничтожает on-shell векторы: $C[0]B(\bar{u})|0\rangle = 0$.

Здесь, правда, есть одна тонкость. Вычисляя пределы коэффициентов X_k и \tilde{X}_k мы считали все параметры u_k конечными. Если же среди параметров \bar{u} есть бесконечные, то результат действия $C[0]$ на on-shell вектор Бете меняется. Действительно, согласно (2.1), on-shell вектор Бете с бесконечным параметром можно интерпретировать как действие нулевой моды $B[0]$ на on-shell вектор с конечными параметрами

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{c} B(z)B(\bar{u})|0\rangle = B[0]B(\bar{u})|0\rangle, \quad (2.9)$$

где параметры \bar{u} конечны. Тогда в силу коммутационного соотношения

$$[C[0], B[0]] = A[0] - D[0], \quad (2.10)$$

и формул (1.2), (2.5), (2.6) находим

$$C[0] \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{c} B(z)B(\bar{u})|0\rangle = C[0]B[0]B(\bar{u})|0\rangle = (A[0] - D[0])B(\bar{u})|0\rangle = (r[0] - 2n)B(\bar{u})|0\rangle. \quad (2.11)$$

Действие нулевых мод на дуальные векторы вычисляется полностью аналогично. В частности, все дуальные векторы Бете являются собственными для нулевых мод $A[0]$ и $D[0]$, а нулевая мода $B[0]$ уничтожает дуальные on-shell векторы, зависящие от конечных параметров.

3. Соотношения между формфакторами матричных элементов матрицы монодромии

В этом разделе мы получим новые соотношения между формфакторами матричных элементов матрицы монодромии. Удобно нормировать исходную матрицу монодромии $T(u)$ на функцию $d(u)$. Нормированную таким образом матрицу будем обозначать жирным шрифтом $\mathbf{T}(u) = T(u)/d(u)$. Также жирным шрифтом будем обозначать нормированные матричные элементы: $\mathbf{A}(u) = A(u)/d(u)$ и т. д. Наконец, введем аналогичное обозначение для нормированного собственного значения трансфер-матрицы

$$\boldsymbol{\tau}(z|\bar{u}) = \frac{\tau(z|\bar{u})}{d(z)} = r(z)f(\bar{u}, z) + f(z, \bar{u}). \quad (3.1)$$

Как обычно, формфактором оператора $\mathbf{T}^{ij}(z)$ назовем матричный элемент этого оператора между двумя on-shell векторами $\langle 0|\mathbf{C}(\bar{v})$ и $\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle$. Будем считать, что $\#\bar{u} = n$, и обозначим формфактор матричного элемента $\mathbf{T}^{ij}(z)$ через $\mathcal{F}_n^{(ij)}(z)$. Тогда

$$\mathcal{F}_n^{(ij)}(z) \equiv \mathcal{F}_n^{(ij)}(z|\bar{v}; \bar{u}) = \langle 0|\mathbf{C}(\bar{v})\mathbf{T}^{ij}(z)\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle. \quad (3.2)$$

Заметьте, что количество переменных \bar{v} зависит от конкретного формфактора $\mathcal{F}_n^{(ij)}(z)$: если $i = j$, то $\#\bar{v} = n$; если $i > j$, то $\#\bar{v} = n - 1$; если $i < j$, то $\#\bar{v} = n + 1$.

Посмотрим теперь, как связаны между собой различные формфакторы $\mathcal{F}_n^{(ij)}(z)$. Для этого воспользуемся нулевыми модами.

В силу коммутационного соотношения (1.4) мы имеем

$$\langle 0|\mathbf{C}(\bar{v})\mathbf{B}(z)\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle = \langle 0|\mathbf{C}(\bar{v})[B[0], \mathbf{A}(z)]\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle. \quad (3.3)$$

Допустим, что оба вектора в (3.3) являются on-shell, причем среди наборов \bar{v} и \bar{u} нет бесконечных параметров. Тогда в левой части мы имеем формфактор оператора $\mathbf{B}(z)$. Рассмотрим правую часть, которая состоит из двух слагаемых

$$\langle 0|\mathbf{C}(\bar{v})B[0]\mathbf{A}(z)\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle - \langle 0|\mathbf{C}(\bar{v})\mathbf{A}(z)B[0]\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle. \quad (3.4)$$

Действие нулевой моды $B[0]$ на дуальный on-shell вектор дает нуль, поэтому первое слагаемое исчезает. Во втором слагаемом действие нулевой моды $B[0]$ на вектор $\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle$ дается формулой (2.1). Мы получаем

$$\langle 0|\mathbf{C}(\bar{v})\mathbf{B}(z)\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle = - \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \langle 0|\mathbf{C}(\bar{v})\mathbf{A}(z)\mathbf{B}(w)\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle. \quad (3.5)$$

Поскольку исходный вектор $\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle$ был on-shell, то и получившийся вектор $\frac{w}{c}\mathbf{B}(w)\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle$ тоже on-shell при $w \rightarrow \infty$. Поэтому в правой части (3.5) мы имеем формфактор оператора $\mathbf{A}(z)$, т. е.

$$\mathcal{F}_n^{(12)}(z|\bar{v}; \bar{u}) = - \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \mathcal{F}_{n+1}^{(11)}(z|\bar{v}; \{\bar{u}, w\}). \quad (3.6)$$

Мы приходим к довольно удивительному выводу: для вычисления формфактора оператора $\mathbf{B}(z)$ достаточно вычислить формфактор оператора $\mathbf{A}(z)$ и устремить в полученном результате один из параметров к бесконечности. Аналогично можно найти связи и между другими формфакторами. Например, из соотношения

$$\mathbf{C}(z) = [\mathbf{A}(z), C[0]] \quad (3.7)$$

следует

$$\mathcal{F}_n^{(21)}(z|\bar{v}; \bar{u}) = - \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \mathcal{F}_n^{(11)}(z|\{\bar{v}, w\}; \bar{u}). \quad (3.8)$$

Рассмотрим теперь случай, когда среди параметров on-shell векторов есть бесконечные. Пусть, например, дуальный вектор зависит от одного бесконечного параметра. Тогда

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \mathcal{F}_n^{(12)}(z|\{\bar{v}, w\}; \bar{u}) = \langle 0|\mathbf{C}(\bar{v})C[0]\mathbf{B}(z)\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle. \quad (3.9)$$

Воспользовавшись соотношениями

$$[C[0], \mathbf{B}(z)] = \mathbf{A}(z) - \mathbf{D}(z), \quad C[0]\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle = 0, \quad (3.10)$$

мы немедленно находим

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \mathcal{F}_n^{(12)}(z|\{\bar{v}, w\}; \bar{u}) = \mathcal{F}_n^{(11)}(z|\bar{v}; \bar{u}) - \mathcal{F}_n^{(22)}(z|\bar{v}; \bar{u}), \quad (3.11)$$

где формфакторы в правой части зависят уже только от конечных параметров.

Итак, формфакторы различных элементов матрицы монодромии оказываются связаны между собой. Интересно проверить эти соотношения с помощью явных формул для формфакторов. Это сделано в следующем разделе.

4. Сравнение детерминантных представлений

Проверим, например, равенство (3.8), связывающее формфакторы операторов $\mathbf{C}(z)$ и $\mathbf{A}(z)$. Будем для определенности считать наборы \bar{v} и \bar{u} различными и конечными. Тогда формфактор оператора $\mathbf{A}(z)$ отличается от формфактора $\mathbf{D}(z)$ только знаком, поскольку формфактор трансфер-матрицы $\mathbf{A}(z) + \mathbf{D}(z)$ очевидно равен нулю. Следовательно, мы имеем

$$\mathcal{F}_n^{(21)}(z|\bar{v}; \bar{u}) = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \mathcal{F}_n^{(22)}(z|\{\bar{v}, w\}; \bar{u}). \quad (4.1)$$

4.1. Преобразование формфактора $\mathcal{F}_n^{(21)}(z)$. Рассмотрим левую часть равенства (4.1). Формфактор оператора $\mathbf{C}(z)$ равен скалярному произведению on-shell вектора $\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle$ на дуальный вектор $\langle 0|\mathbf{C}(\bar{v})\mathbf{C}(z)$. Пусть $\bar{\xi} = \{\bar{v}, z\}$. Тогда

$$\mathcal{F}_n^{(21)}(z|\bar{v}; \bar{u}) = \langle 0|\mathbf{C}(\bar{\xi})\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle. \quad (4.2)$$

Согласно введенным выше обозначениям, количество элементов в наборе \bar{u} равно n . Количество элементов в наборе $\bar{\xi}$ тоже равно n , откуда следует, что $\#\bar{v} = n - 1$. При этом параметры \bar{v} удовлетворяют уравнениям Бете

$$r(v_k) = \frac{f(v_k, \bar{v}_k)}{f(\bar{v}_k, v_k)} = (-1)^n \frac{h(v_k, \bar{v})}{h(\bar{v}, v_k)}. \quad (4.3)$$

Скалярное произведение в формуле (4.2) имеет следующее представление:

$$\langle 0|\mathbf{C}(\bar{\xi})\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle = \Delta'_n(\bar{u})\Delta_n(\bar{\xi})h(\bar{\xi}, \bar{u}) \det_n \mathcal{M}_{jk}, \quad (4.4)$$

где

$$\mathcal{M}_{jk} = t(\xi_k, u_j) + (-1)^{n-1} r(\xi_k) t(u_j, \xi_k) \frac{h(\bar{u}, \xi_k)}{h(\xi_k, \bar{u})}. \quad (4.5)$$

В первых $n - 1$ столбцах этой матрицы переменные ξ_k принимают значения v_k , а в последнем столбце $\xi_n = z$.

Преобразуем матрицу \mathcal{M}_{jk} так, чтобы было удобно сравнивать обе части равенства (4.1). Для этого прибавим к последней строке этой матрицы все остальные строки, умноженные на коэффициенты α_j/α_n , где

$$\alpha_j = \frac{g(u_j, \bar{u}_j)}{g(u_j, \bar{v})} = \prod_{m=1}^{n-1} (u_j - v_m) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n (u_j - u_m)^{-1}. \quad (4.6)$$

Ясно, что при таком преобразовании детерминант не изменится. Модифицированную последнюю строку обозначим $\widetilde{\mathcal{M}}_{nk}$. Чтобы получить явный вид этой строки, вычислим сумму

$$H_k^+ = \sum_{j=1}^n \alpha_j t(u_j, \xi_k). \quad (4.7)$$

Мы уже проделывали подобное вычисление при доказательстве ортогональности on-shell векторов. Приведем еще раз это вычисление, поскольку в этом примере имеются некоторые отличия. Рассмотрим вспомогательный интеграл по окружности большого радиуса

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|x|=R \rightarrow \infty} \frac{c^2 dx}{(x - \xi_k)(x - \xi_k + c)} \frac{\prod_{m=1}^{n-1} (x - v_m)}{\prod_{m=1}^n (x - u_m)}. \quad (4.8)$$

Поскольку подынтегральное выражение ведет себя как x^{-3} при $x \rightarrow \infty$, мы заключаем, что $I = 0$. С другой стороны, интеграл (4.8) равен сумме вычетов во всех полюсах, расположенных внутри контура. Во-первых, это полюсы при $x = u_\ell$, $\ell = 1, \dots, n$. Легко видеть, что сумма вычетов в этих полюсах в точности дает H_k^+ . Остаются еще два полюса при $x = \xi_k$ и $x = \xi_k - c$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \frac{c^2}{(z - \xi_k)(z - \xi_k + c)} \frac{\prod_{m=1}^{n-1} (x - v_m)}{\prod_{m=1}^n (x - u_m)} \Big|_{x=\xi_k} &= c \frac{\prod_{m=1}^{n-1} (\xi_k - v_m)}{\prod_{m=1}^n (\xi_k - u_m)} = -\frac{g(\bar{u}, \xi_k)}{g(\bar{v}, \xi_k)}, \\ \operatorname{Res} \frac{c^2}{(z - \xi_k)(z - \xi_k + c)} \frac{\prod_{m=1}^{n-1} (x - v_m)}{\prod_{m=1}^n (x - u_m)} \Big|_{x=\xi_k - c} &= -c \frac{\prod_{m=1}^{n-1} (\xi_k - v_m - c)}{\prod_{m=1}^n (\xi_k - u_m - c)} = \frac{h(\bar{v}, \xi_k)}{h(\bar{u}, \xi_k)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Отсюда находим

$$H_k^+ = \frac{g(\bar{u}, \xi_k)}{g(\bar{v}, \xi_k)} - \frac{h(\bar{v}, \xi_k)}{h(\bar{u}, \xi_k)}. \quad (4.10)$$

Аналогично можно вычислить сумму

$$H_k^- = \sum_{j=1}^n \alpha_j t(\xi_k, u_j). \quad (4.11)$$

Можно, однако, обойтись без дополнительных вычислений, заметив, что сумма (4.11) получается из (4.7) при замене $c \rightarrow -c$. Отсюда мы немедленно получаем

$$H_k^- = \frac{g(\xi_k, \bar{u})}{g(\xi_k, \bar{v})} - \frac{h(\xi_k, \bar{v})}{h(\xi_k, \bar{u})}, \quad (4.12)$$

поскольку замена $c \rightarrow -c$ приводит к тому, что аргументы у каждой из функций g и h меняются местами. Теперь с учетом (4.10) и (4.12) мы находим

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_{nk} &= \mathcal{M}_{nk} + \frac{1}{\alpha_n} \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \mathcal{M}_{jk} = \frac{1}{\alpha_n} \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathcal{M}_{jk} \\ &= \frac{1}{\alpha_n} \left[(-1)^{n-1} r(\xi_k) \frac{h(\bar{u}, \xi_k)}{h(\xi_k, \bar{u})} \left(\frac{g(\bar{u}, \xi_k)}{g(\bar{v}, \xi_k)} - \frac{h(\bar{v}, \xi_k)}{h(\bar{u}, \xi_k)} \right) + \frac{g(\xi_k, \bar{u})}{g(\xi_k, \bar{v})} - \frac{h(\xi_k, \bar{v})}{h(\xi_k, \bar{u})} \right], \end{aligned} \quad (4.13)$$

или после несложных преобразований

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{nk} = \frac{\tau(\xi_k|\bar{u}) - \tau(\xi_k|\bar{v})}{\alpha_n g(\xi_k, \bar{v}) h(\xi_k, \bar{u})}. \quad (4.14)$$

Несложно заметить, что $\widetilde{\mathcal{M}}_{nk} = 0$ при $k < n$. Действительно, если $k < n$, то $\xi_k = v_k$, и тогда $g^{-1}(\xi_k, \bar{v}) = 0$. Правда собственное значение $\tau(\xi_k|\bar{v})$ содержит произведения $f(\xi_k, \bar{v})$ и $f(\bar{v}, \xi_k)$, которые компенсируют этот нуль. Однако в силу уравнений Бете (4.3)

$$-\frac{\tau(\xi_k|\bar{v})}{g(\xi_k, \bar{v})} \Big|_{\xi_k=v_k} = (-1)^n r(v_k) h(\bar{v}, v_k) - h(v_k, \bar{v}) = 0. \quad (4.15)$$

Итак, вся последняя строка после модификации обращается в нуль, кроме последнего элемента, в котором

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{nn} = \frac{g(u_n, \bar{v})(\tau(z|\bar{u}) - \tau(z|\bar{v}))}{g(u_n, \bar{u}_n)g(z, \bar{v})h(z, \bar{u})}. \quad (4.16)$$

Детерминант сводится к произведению этого элемента на соответствующий минор, и мы получаем

$$\mathcal{F}_n^{(21)}(z|\bar{v}; \bar{u}) = (\tau(z|\bar{u}) - \tau(z|\bar{v})) \frac{\Delta'_n(\bar{u}) \Delta_n(\bar{\xi}) h(\bar{\xi}, \bar{u}) g(u_n, \bar{v})}{g(u_n, \bar{u}_n) g(z, \bar{v}) h(z, \bar{u})} \det_{n-1} \mathcal{M}_{jk}. \quad (4.17)$$

Остается выделить в префакторе явную зависимость от переменной z . Очевидно, что

$$\Delta_n(\bar{\xi}) = \Delta_{n-1}(\bar{v})g(z, \bar{v}), \quad h(\bar{\xi}, \bar{u}) = h(\bar{v}, \bar{u})h(z, \bar{u}). \quad (4.18)$$

Подставляя эти формулы в (4.17), получаем окончательно

$$\mathcal{F}_n^{(21)}(z|\bar{v}; \bar{u}) = (\tau(z|\bar{u}) - \tau(z|\bar{v}))\Delta'_n(\bar{u})\Delta_{n-1}(\bar{v})h(\bar{v}, \bar{u})\frac{g(u_n, \bar{v})}{g(u_n, \bar{u}_n)} \det_{n-1} \mathcal{M}_{jk}^{(21)}, \quad (4.19)$$

где

$$\mathcal{M}_{jk}^{(21)} = t(v_k, u_j) - t(u_j, v_k) \frac{h(\bar{u}, v_k)h(v_k, \bar{v})}{h(v_k, \bar{u})h(\bar{v}, v_k)}. \quad (4.20)$$

Заметьте, что матрица $\mathcal{M}_{jk}^{(21)}$ по сути совпадает с исходной матрицей \mathcal{M}_{jk} , однако с помощью уравнений Бете мы выразили функции $r(v_k)$ через произведения функций h .

4.2. Преобразование формфактора $\mathcal{F}_n^{(22)}(z)$. Рассмотрим теперь правую часть равенства (4.1). Мы уже вычисляли формфактор оператора $D(z)$ в терминах производной от скалярного произведения твистованного on-shell вектора и обычного on-shell вектора¹. Напомним это представление:

$$\mathcal{F}_n^{(22)}(z|\bar{\xi}; \bar{u}) = (\tau(z|\bar{\xi}) - \tau(z|\bar{u})) \frac{d}{d\kappa} \langle 0|\mathcal{C}(\bar{\xi})\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle \Big|_{\kappa=1}. \quad (4.21)$$

Здесь параметры \bar{u} удовлетворяют обычным уравнениям Бете, а параметры $\bar{\xi}$ — твистованным, с параметром твиста κ . Скалярное произведение в правой части (4.21) имеет вид

$$\langle 0|\mathcal{C}(\bar{\xi})\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle = \Delta'_n(\bar{u})\Delta_n(\bar{\xi})h(\bar{\xi}, \bar{u}) \det_n \mathcal{M}_{jk}^{(\kappa)}, \quad (4.22)$$

где

$$\mathcal{M}_{jk}^{(\kappa)} = t(\xi_k, u_j) + \kappa t(u_j, \xi_k) \frac{h(\bar{u}, \xi_k)h(\xi_k, \bar{\xi})}{h(\xi_k, \bar{u})h(\bar{\xi}, \xi_k)}. \quad (4.23)$$

Вычислим явно производную по κ в формуле (4.21). Для этого преобразуем матрицу $\mathcal{M}_{jk}^{(\kappa)}$ так же, как ранее мы преобразовывали матрицу \mathcal{M}_{jk} . А именно, прибавим к последней строке этой матрицы все остальные строки, умноженные на коэффициенты ν_j/ν_n , где

$$\nu_j = \frac{g(u_j, \bar{u}_j)}{g(u_j, \bar{\xi})} = \frac{1}{c} \prod_{m=1}^n (u_j - \xi_m) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n (u_j - u_m)^{-1}. \quad (4.24)$$

Вычисление возникающих сумм вновь может быть проведено с помощью вспомогательного контурного интеграла. Приведем сразу же результат:

$$\sum_{j=1}^n \nu_j t(u_j, \xi_k) = \frac{h(\bar{\xi}, \xi_k)}{h(\bar{u}, \xi_k)}, \quad \sum_{j=1}^n \nu_j t(\xi_k, u_j) = -\frac{h(\xi_k, \bar{\xi})}{h(\xi_k, \bar{u})}. \quad (4.25)$$

Отсюда находим

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{nk}^{(\kappa)} = \mathcal{M}_{nk}^{(\kappa)} + \frac{1}{\nu_n} \sum_{j=1}^{n-1} \nu_j \mathcal{M}_{jk}^{(\kappa)} = (\kappa - 1) \frac{g(u_n, \bar{\xi})}{g(u_n, \bar{u}_n)} \frac{h(\xi_k, \bar{\xi})}{h(\xi_k, \bar{u})}. \quad (4.26)$$

¹Строго говоря, мы вычисляли формфактор оператора $D(\frac{\eta}{2})$ в спиновой цепочке XXZ . Однако вычисление формфактора оператора $D(z)$ в моделях с рациональной R -матрицей точно такое же.

Таким образом, последняя строка матрицы $\mathcal{M}_{jk}^{(\kappa)}$ после модификации оказалась пропорциональной $(\kappa - 1)$. Следовательно, при взятии производной по κ при $\kappa = 1$ нам надо дифференцировать только элементы этой строки, полагая в остальных местах $\kappa = 1$. В результате мы получаем

$$\langle 0 | \mathbf{C}(\bar{\xi}) \mathbf{D}(z) \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle = (\tau(z|\bar{\xi}) - \tau(z|\bar{u})) \Delta'_n(\bar{u}) \Delta_n(\bar{\xi}) h(\bar{\xi}, \bar{u}) \frac{g(u_n, \bar{\xi})}{g(u_n, \bar{u}_n)} \det_n \mathcal{M}_{jk}^{(22)}, \quad (4.27)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{jk}^{(22)} &= t(\xi_k, u_j) + t(u_j, \xi_k) \frac{h(\bar{u}, \xi_k) h(\xi_k, \bar{\xi})}{h(\xi_k, \bar{u}) h(\bar{\xi}, \xi_k)}, \quad j < n, \\ \mathcal{M}_{nk}^{(22)} &= \frac{h(\xi_k, \bar{\xi})}{h(\xi_k, \bar{u})}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Теперь следует положить $\bar{\xi} = \{\bar{v}, w\}$ и рассмотреть предел $w \rightarrow \infty$. При этом мы будем пользоваться формулами

$$g(w, x) \sim \frac{c}{w}, \quad f(w, x) \sim 1, \quad h(w, x) \sim \frac{w}{c}, \quad t(w, x) \sim \frac{c^2}{w^2}, \quad w \rightarrow \infty. \quad (4.29)$$

Легко видеть, что

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \tau(z|\bar{\xi}) = \tau(z|\bar{v}), \quad (4.30)$$

поскольку $\tau(z|\bar{\xi})$ зависит от w только через функции $f(z, w)$ и $f(w, z)$, которые стремятся к единице при $w \rightarrow \infty$.

В префакторе получаем

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow \infty} \Delta_n(\bar{\xi}) h(\bar{\xi}, \bar{u}) g(u_n, \bar{\xi}) &= \lim_{w \rightarrow \infty} \Delta_n(\bar{v}) h(\bar{v}, \bar{u}) g(u_n, \bar{v}) g(w, \bar{v}) h(w, \bar{u}) g(u_n, w) \\ &= -\Delta_n(\bar{v}) h(\bar{v}, \bar{u}) g(u_n, \bar{v}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Теперь рассмотрим пределы матричных элементов матрицы $\mathcal{M}_{jk}^{(22)}$, предварительно внося в ее последний столбец множитель w/c , который фигурирует в формуле (4.1). Тогда в последнем столбце при $j < n$ имеем

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \mathcal{M}_{jn}^{(22)} = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \left(t(w, u_j) + t(u_j, w) \frac{h(\bar{u}, w) h(w, \bar{v})}{h(w, \bar{u}) h(\bar{v}, v)} \right) = 0, \quad j < n, \quad (4.32)$$

а при $j = n$

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \mathcal{M}_{nn}^{(22)} = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \frac{h(w, \bar{v})}{h(w, \bar{u})} = 1. \quad (4.33)$$

Здесь важно напомнить, что $\#\bar{u} = n$, а $\#\bar{v} = n - 1$.

Итак, детерминант матрицы $\mathcal{M}_{jk}^{(22)}$ сводится к ее минору, построенному на первых $n - 1$ строках и столбцах. Для этих матричных элементов получаем

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \mathcal{M}_{jk}^{(22)} = \lim_{w \rightarrow \infty} \left(t(v_k, u_j) + t(u_j, v_k) \frac{h(\bar{u}, v_k) h(v_k, \bar{v}) h(v_k, w)}{h(v_k, \bar{u}) h(\bar{v}, v_k) h(w, v_k)} \right) = \mathcal{M}_{jk}^{(21)}, \quad j, k < n, \quad (4.34)$$

где матрица $\mathcal{M}_{jk}^{(21)}$ задана формулой (4.20). В результате имеем

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \mathcal{F}_n^{(22)}(z|\{\bar{v}, w\}; \bar{u}) = (\tau(z|\bar{u}) - \tau(z|\bar{v})) \Delta'_n(\bar{u}) \Delta_{n-1}(\bar{v}) h(\bar{v}, \bar{u}) \frac{g(u_n, \bar{v})}{g(u_n, \bar{u}_n)} \det_{n-1} \mathcal{M}_{jk}^{(21)}. \quad (4.35)$$

Сравнивая формулы (4.35) и (4.19), мы видим, что они совпадают.

5. Универсальный формфактор

Мы уже видели, что по крайней мере некоторые формфакторы матричных элементов матрицы монодромии представимы в виде

$$\mathcal{F}_n^{(ij)}(z|\bar{v}; \bar{u}) = (\tau(z|\bar{v}) - \tau(z|\bar{u})) \mathfrak{F}_n^{(ij)}(\bar{v}; \bar{u}), \quad (5.1)$$

где функция $\mathfrak{F}_n^{(ij)}(\bar{v}; \bar{u})$ не зависит от z . Легко показать, что такое представление справедливо всегда, если $\bar{v} \neq \bar{u}$. Для этого запишем RTT -соотношение для произвольных матричных элементов $T^{ij}(z)$ и $T^{kl}(w)$

$$[T^{ij}(z), T^{kl}(w)] = g(z, w)(T^{kj}(w)T^{il}(z) - T^{kj}(z)T^{il}(w)). \quad (5.2)$$

Заметим, что правая часть формулы (5.2) не меняется при замене z на w . Отсюда следует, что коммутатор любого матричного элемента $T^{ij}(z)$ с трансфер-матрицей $\mathcal{T}(w)$ является симметричной функцией переменных z и w :

$$[T^{ij}(z), \mathcal{T}(w)] = [T^{ij}(w), \mathcal{T}(z)]. \quad (5.3)$$

Разделим равенство (5.3) на произведение $d(z)d(w)$, после чего умножим его справа на on-shell вектор $\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle$ и слева на дуальный on-shell вектор $\langle 0|\mathbf{C}(\bar{v})$. Получим

$$\langle 0|\mathbf{C}(\bar{v})[T^{ij}(z), \mathcal{T}(w)]\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle = \langle 0|\mathbf{C}(\bar{v})[T^{ij}(w), \mathcal{T}(z)]\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle. \quad (5.4)$$

Вычисляя действие трансфер-матрицы на on-shell векторы, находим

$$(\tau(w|\bar{u}) - \tau(w|\bar{v}))\langle 0|\mathbf{C}(\bar{v})\mathbf{T}^{ij}(z)\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle = (\tau(z|\bar{u}) - \tau(z|\bar{v}))\langle 0|\mathbf{C}(\bar{v})\mathbf{T}^{ij}(w)\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle. \quad (5.5)$$

Остается поделить обе части равенства на разности собственных значений трансфер-матрицы, что дает

$$\frac{\mathcal{F}_n^{(ij)}(z|\bar{v}; \bar{u})}{\tau(z|\bar{v}) - \tau(z|\bar{u})} = \frac{\mathcal{F}_n^{(ij)}(w|\bar{v}; \bar{u})}{\tau(w|\bar{v}) - \tau(w|\bar{u})}. \quad (5.6)$$

Левая часть формулы (5.6) зависит только от z , в то время как правая — только от w . Это возможно только в том случае, если

$$\frac{\mathcal{F}_n^{(ij)}(z|\bar{v}; \bar{u})}{\tau(z|\bar{v}) - \tau(z|\bar{u})} = \mathfrak{F}_n^{(ij)}(\bar{v}; \bar{u}), \quad (5.7)$$

где $\mathfrak{F}_n^{(ij)}(\bar{v}; \bar{u})$ не зависит от z .

Функция $\mathfrak{F}_n^{(ij)}(\bar{v}; \bar{u})$ называется универсальным формфактором оператора $\mathbf{T}^{ij}(z)$. Смысл этого названия состоит в том, что $\mathfrak{F}_n^{(ij)}(\bar{v}; \bar{u})$ не зависит от конкретной модели, если в наборах \bar{v} и \bar{u} нет совпадающих элементов. Действительно, вся информация о конкретной модели содержится в функции $r(w) = a(w)/d(w)$. При вычислении формфакторов возникают функции r , зависящие от переменных z , \bar{v} и \bar{u} . Но функции $r(v_i)$ и $r(u_i)$ должны быть выражены через произведения функций f , согласно уравнениям Бете. Тогда единственная функция, которая “помнит” о рассматриваемой модели — это функция $r(z)$. Но вся зависимость от переменной z в формуле (5.7) уже выделена в виде разности собственных значений трансфер-матрицы. Поэтому величина $\mathfrak{F}_n^{(ij)}(\bar{v}; \bar{u})$ не зависит от рассматриваемой модели.

Если же среди параметров \bar{v} и \bar{u} есть совпадающие элементы, то, как мы видели ранее, формфактор зависит от производных $r'(v_i)$ или $r'(u_i)$, которые уже не выражаются через уравнения Бете. В этом случае универсальный формфактор все еще “помнит” о конкретной модели и, строго говоря, не является универсальным.

Все соотношения между обычными формфакторами $\mathcal{F}_n^{(ij)}(z)$ переносятся на универсальные формфакторы $\mathfrak{F}_n^{(ij)}$. Это связано с тем, что собственные значения трансфер-матрицы $\tau(z|\bar{u})$ снова переходят в собственные значения, когда один из параметров u_i стремится к бесконечности

$$\lim_{u_i \rightarrow \infty} \tau(z|\bar{u}) = \lim_{u_i \rightarrow \infty} (r(z)f(\bar{u}, z) + f(z, \bar{u})) = r(z)f(\bar{u}_i, z) + f(z, \bar{u}_i) = \tau(z|\bar{u}_i). \quad (5.8)$$

Поэтому, например, из равенства (3.6) следует

$$- \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \mathfrak{F}_{n+1}^{(11)}(\bar{v}; \{\bar{u}, w\}) = - \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\frac{w}{c} \mathcal{F}_{n+1}^{(11)}(z|\bar{v}; \{\bar{u}, w\})}{\tau(z|\bar{v}) - \tau(z|\{\bar{u}, w\})} = \frac{\mathcal{F}_n^{(12)}(z|\bar{v}; \bar{u})}{\tau(z|\bar{v}) - \tau(z|\bar{u})} = \mathfrak{F}_n^{(12)}(z|\bar{v}; \bar{u}). \quad (5.9)$$

Лекция 13. Формфакторы локальных операторов

В этой лекции мы получаем детерминантные представления для формфакторов локальных операторов с помощью метода, основанного на применении нулевых мод. При этом наличие решения квантовой обратной задачи не предполагается, однако мы по-прежнему вынуждены рассматривать только такие модели, которые описываются рациональной R -матрицей, поскольку обобщение этого метода на модели с тригонометрической R -матрицей пока не найдено.

1. Необходимые формулы

В предыдущей лекции мы ввели “нормированную” матрицу монодромии $\mathbf{T}(u) = T(u)/d(u)$. Поэтому эту лекцию мы начнем с того, что приведем еще раз уже знакомые формулы, записанные в терминах нормированных матричных элементов $\mathbf{T}^{ij}(u)$.

Скалярное произведение двух векторов Бете, определяемое формулой (9.3.10), теперь имеет вид

$$S_n(\bar{v}|\bar{u}) = \langle 0|\mathbf{C}(\bar{v})\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle. \quad (1.1)$$

Если на параметры \bar{v} и \bar{u} не наложено никаких дополнительных условий, то это скалярное произведение равно сумме по разбиениям (9.3.11).

Рассмотрим твистованную матрицу монодромии с матрицей твиста $\hat{\kappa} = \text{diag}(\kappa_1, \kappa_2)$, и пусть $\kappa_j = e^{\beta_j}$, $j = 1, 2$. Пусть параметры \bar{v} удовлетворяют твистованным уравнениям Бете, а параметры \bar{u} обычным уравнениям Бете. Запишем эти уравнения в следующем виде

$$r(\bar{u}_I) = \frac{f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II})}{f(\bar{u}_{II}, \bar{u}_I)}, \quad r(\bar{v}_I) = e^{(\beta_2 - \beta_1)n_I} \frac{f(\bar{v}_I, \bar{v}_{II})}{f(\bar{v}_{II}, \bar{v}_I)}. \quad (1.2)$$

Здесь мы имеем дело с двумя произвольными разбиениями $\bar{u} \mapsto \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\}$ и $\bar{v} \mapsto \{\bar{v}_I, \bar{v}_{II}\}$, а целое число n_I равно количеству элементов в подмножестве \bar{v}_I , т.е. $n_I = \#\bar{v}_I$. Легко видеть, что такая форма записи эквивалентна (твистованным) уравнениям Бете в их привычной форме. Действительно, в частном случае, когда $\#\bar{v}_I = \#\bar{u}_I = 1$, система (1.2) совпадает с (твистованными) уравнениями Бете. Если же $\#\bar{v}_I > 1$ или $\#\bar{u}_I > 1$, то достаточно взять произведение (твистованных) уравнений Бете по соответствующим наборам, и мы приходим к системе (1.2).

Обозначим через $S_n^{(\kappa)}(\bar{v}|\bar{u})$ скалярное произведение твистованного и обычного on-shell векторов. Тогда из (9.3.11) получаем

$$S_n^{(\kappa)}(\bar{v}|\bar{u}) = \sum_{\substack{\bar{v} \mapsto \{\bar{v}_I, \bar{v}_{II}\} \\ \bar{u} \mapsto \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\}}} e^{\beta n_I} K_{n_I}(\bar{u}_I|\bar{v}_I) K_{n_{II}}(\bar{v}_{II}|\bar{u}_{II}) f(\bar{v}_I, \bar{v}_{II}) f(\bar{u}_{II}, \bar{u}_I). \quad (1.3)$$

Напомним теперь формулы для векторов Бете в композитной модели. Из формулы (11.2.8) следует, что

$$\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle = \sum_{\bar{u} \mapsto \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\}} r^{(2)}(\bar{u}_I) f(\bar{u}_{II}, \bar{u}_I) \mathbf{B}^{(1)}(\bar{u}_I) \mathbf{B}^{(2)}(\bar{u}_{II})|0\rangle. \quad (1.4)$$

Если исходный вектор $\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle$ является on-shell, то с помощью уравнений Бете (1.2) мы можем выразить функцию $r^{(2)}(u)$ через функцию $r^{(1)}(u)$ и произведение функций f :

$$r^{(2)}(\bar{u}_I) f(\bar{u}_{II}, \bar{u}_I) = \frac{r(\bar{u}_I) f(\bar{u}_{II}, \bar{u}_I)}{r^{(1)}(\bar{u}_I)} = \frac{f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II})}{r^{(1)}(\bar{u}_I)}. \quad (1.5)$$

Тогда формула (1.4) приобретает вид

$$\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle = \sum_{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\}} \frac{f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II})}{r^{(1)}(\bar{u}_I)} \mathbf{B}^{(1)}(\bar{u}_I) \mathbf{B}^{(2)}(\bar{u}_{II})|0\rangle. \quad (1.6)$$

Наконец, нам потребуется формула для дуального вектора Бете (11.2.18), которая теперь записывается следующим образом:

$$\langle 0|\mathbf{C}(\bar{v}) = \langle 0| \sum_{\bar{v} \rightarrow \{\bar{v}_I, \bar{v}_{II}\}} r^{(1)}(\bar{v}_{II}) f(\bar{v}_I, \bar{v}_{II}) \mathbf{C}^{(1)}(\bar{v}_I) \mathbf{C}^{(2)}(\bar{v}_{II}). \quad (1.7)$$

2. Формфакторы парциальных нулевых мод

Как мы установили в предыдущей лекции, для вычисления формфакторов локальных операторов достаточно рассмотреть композитную модель и вычислить формфакторы нулевых мод первой парциальной матрицы монодромии $T_{ij}^{(1)}[0]$. Введем обозначение

$$\mathbf{M}_n^{(ij)}(\bar{v}; \bar{u}) = \langle 0|\mathbf{C}(\bar{v}) T_{ij}^{(1)}[0] \mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle. \quad (2.1)$$

Здесь оба вектора $\langle 0|\mathbf{C}(\bar{v})$ и $\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle$ являются on-shell векторами, причем $n = \#\bar{u}$. Как и в случае обычных формфакторов, количество переменных \bar{v} зависит от конкретного оператора $T_{ij}^{(1)}[0]$.

Мы уже видели, что формфакторы матричных элементов полной матрицы $T(z)$ монодромии связаны между собой. Фактически, достаточно вычислить формфактор одного оператора, например оператора $A(z)$, и тогда формфакторы остальных операторов можно получить предельным переходом, когда один из параметров в наборах \bar{v} или \bar{u} устремляется к бесконечности. Легко показать, что точно таким же свойством обладают и формфакторы нулевых мод первой парциальной матрицы монодромии. Например, из соотношения для полных нулевых мод (12.3.7) следует

$$C[0] = [A[0], C[0]]. \quad (2.2)$$

Ясно, что такое же соотношение справедливо и для парциальных нулевых мод

$$C^{(1)}[0] = [A^{(1)}[0], C^{(1)}[0]], \quad (2.3)$$

поскольку парциальная матрица монодромии удовлетворяет RTT -соотношению с той же R -матрицей, что и полная матрица монодромии. С другой стороны, полная нулевая мода является суммой парциальных $C[0] = C^{(1)}[0] + C^{(2)}[0]$ и, кроме того, $[A^{(1)}[0], C^{(2)}[0]] = 0$. Следовательно,

$$C^{(1)}[0] = [A^{(1)}[0], C[0]]. \quad (2.4)$$

Теперь нам остается вычислить матричный элемент равенства (2.4) между двумя on-shell векторами

$$\langle 0|\mathbf{C}(\bar{v}) C^{(1)}[0] \mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle = \langle 0|\mathbf{C}(\bar{v}) [A^{(1)}[0], C[0]] \mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle. \quad (2.5)$$

Отсюда, так же как и для обычных формфакторов, мы находим

$$\mathbf{M}_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u}) = - \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \mathbf{M}_n^{(11)}(\{\bar{v}, w\}; \bar{u}). \quad (2.6)$$

Аналогично доказывается еще одно соотношение

$$\mathbf{M}_n^{(12)}(\bar{v}; \bar{u}) = - \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \mathbf{M}_n^{(11)}(\bar{v}; \{\bar{u}, w\}). \quad (2.7)$$

В следующем разделе мы вычислим формфакторы диагональных операторов $A^{(1)}[0]$ и $D^{(1)}[0]$. В этом случае удобно иметь дело с твистованными on-shell векторами, поэтому мы рассмотрим матричный элемент вида

$$\mathbf{M}_n^{(\kappa)}(\bar{v}; \bar{u}) = \langle 0 | \mathbf{C}(\bar{v}) e^{\beta_1 A^{(1)}[0] + \beta_2 D^{(1)}[0]} \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle. \quad (2.8)$$

Здесь $\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle$ — обычный on-shell вектор, а $\langle 0 | \mathbf{C}(\bar{v})$ — твистованный on-shell вектор, причем параметры твиста выбраны как в предыдущем разделе: $\kappa_j = e^{\beta_j}$. Матричный элемент (2.8) является производящим функционалом для формфакторов операторов $A^{(1)}[0]$ и $D^{(1)}[0]$, которые можно получить, дифференцируя $\mathbf{M}_n^{(\kappa)}$ по β_j при $\beta_j = 0$.

Причина, по которой мы ввели производящий функционал, достаточно проста. В разделе 10.3 мы уже сталкивались с формфактором оператора D и видели, что при его вычислении следует различать два случая: $\bar{v} = \bar{u}$ и $\bar{v} \neq \bar{u}$. То же самое справедливо и относительно формфакторов операторов $A^{(1)}[0]$ и $D^{(1)}[0]$. Введение производящего функционала (2.8) позволяет рассматривать эти два случая одновременно.

3. Вычисление производящего функционала

Для вычисления действия оператора $\exp\{\beta_1 A^{(1)}[0] + \beta_2 D^{(1)}[0]\}$ на вектор Бете необходимо выразить полный вектор Бете через парциальные. То же самое нужно сделать и с полным дуальным вектором Бете, чтобы иметь возможность вычислять возникающие скалярные произведения. Подставляя в производящий функционал (2.8) представления (1.6) и (1.7), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_n^{(\kappa)}(\bar{v}; \bar{u}) = & \sum_{\substack{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\} \\ \bar{v} \rightarrow \{\bar{v}_I, \bar{v}_{II}\}}} \frac{\ell(\bar{v}_{II})}{\ell(\bar{u}_I)} f(\bar{v}_I, \bar{v}_{II}) f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II}) \\ & \times \langle 0 |^{(1)} \mathbf{C}^{(1)}(\bar{v}_I) e^{\beta_1 A^{(1)}[0] + \beta_2 D^{(1)}[0]} \mathbf{B}^{(1)}(\bar{u}_I) | 0 \rangle^{(1)} \\ & \times \langle 0 |^{(2)} \mathbf{C}^{(2)}(\bar{v}_{II}) \mathbf{B}^{(2)}(\bar{u}_{II}) | 0 \rangle^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где мы ввели обозначение

$$\ell(u) = r^{(1)}(u). \quad (3.2)$$

Теперь мы можем воспользоваться формулами действия

$$\begin{aligned} A^{(1)}[0] \mathbf{B}^{(1)}(\bar{u}_I) | 0 \rangle^{(1)} &= (a^{(1)}[0] - n_I) \mathbf{B}^{(1)}(\bar{u}_I) | 0 \rangle^{(1)}, \\ D^{(1)}[0] \mathbf{B}^{(1)}(\bar{u}_I) | 0 \rangle^{(1)} &= (d^{(1)}[0] + n_I) \mathbf{B}^{(1)}(\bar{u}_I) | 0 \rangle^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $n_I = \#\bar{u}_I$. Отсюда находим

$$e^{\beta_1 A^{(1)}[0] + \beta_2 D^{(1)}[0]} \mathbf{B}^{(1)}(\bar{u}_I) | 0 \rangle^{(1)} = e^{\beta_1 a^{(1)}[0] + \beta_2 d^{(1)}[0] + n_I(\beta_2 - \beta_1)} \mathbf{B}^{(1)}(\bar{u}_I) | 0 \rangle^{(1)}, \quad (3.4)$$

и производящий функционал $\mathbf{M}_n^{(\kappa)}(\bar{v}; \bar{u})$ приобретает вид

$$\mathbf{M}_n^{(\kappa)}(\bar{v}; \bar{u}) = \sum_{\substack{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\} \\ \bar{v} \rightarrow \{\bar{v}_I, \bar{v}_{II}\}}} e^{\beta_1 a^{(1)}[0] + \beta_2 d^{(1)}[0] + n_I(\beta_2 - \beta_1)} \frac{\ell(\bar{v}_{II})}{\ell(\bar{u}_I)} f(\bar{v}_I, \bar{v}_{II}) f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II}) S_{n_I}^{(1)}(\bar{v}_I | \bar{u}_I) S_{n_{II}}^{(2)}(\bar{v}_{II} | \bar{u}_{II}). \quad (3.5)$$

В этой формуле величины $S_m^{(j)}(\bar{v} | \bar{u})$ суть скалярные произведения парциальных векторов Бете:

$$S_m^{(j)}(\bar{v} | \bar{u}) = \langle 0 |^{(j)} \mathbf{C}^{(j)}(\bar{v}) \mathbf{B}^{(j)}(\bar{u}) | 0 \rangle^{(j)}, \quad j = 1, 2, \quad m = n_I, n_{II}. \quad (3.6)$$

Для их вычисления мы можем воспользоваться формулой (9.3.11), заменяя в ней функции r на функции $r^{(1)} = \ell$ в случае скалярного произведения $S_{n_1}^{(1)}$, и r на $r^{(2)}$ для скалярного произведения $S_{n_{\text{II}}}^{(2)}$. При этом возникнут новые разбиения на подмножества. Ввиду большого количества таких подмножеств мы на время откажемся от использования римских цифр и будем нумеровать подмножества верхними жирными индексами. Тогда для скалярного произведения $S_{n_1}^{(1)}$ получаем

$$S_{n_1}^{(1)}(\bar{v}_1|\bar{u}_1) = \sum_{\substack{\bar{u}_1 \mapsto \{\bar{u}^1, \bar{u}^3\} \\ \bar{v}_1 \mapsto \{\bar{v}^1, \bar{v}^3\}}} \ell(\bar{u}^3)\ell(\bar{v}^1) K_{n_1}(\bar{u}^1|\bar{v}^1)K_{n_3}(\bar{v}^3|\bar{u}^3) f(\bar{v}^3, \bar{v}^1)f(\bar{u}^1, \bar{u}^3). \quad (3.7)$$

Здесь суммирование ведется по всем возможным разбиениям $\bar{u}_1 \mapsto \{\bar{u}^1, \bar{u}^3\}$ и $\bar{v}_1 \mapsto \{\bar{v}^1, \bar{v}^3\}$ с условиями $\#\bar{u}^1 = \#\bar{v}^1 = n_1$, $\#\bar{u}^3 = \#\bar{v}^3 = n_3$ и $n_1 + n_3 = n_1$.

Аналогично,

$$S_{n_{\text{II}}}^{(2)}(\bar{v}_{\text{II}}|\bar{u}_{\text{II}}) = \sum_{\substack{\bar{u}_{\text{II}} \mapsto \{\bar{u}^2, \bar{u}^4\} \\ \bar{v}_{\text{II}} \mapsto \{\bar{v}^2, \bar{v}^4\}}} r^{(2)}(\bar{u}^4)r^{(2)}(\bar{v}^2) K_{n_2}(\bar{u}^2|\bar{v}^2)K_{n_4}(\bar{v}^4|\bar{u}^4)f(\bar{v}^4, \bar{v}^2)f(\bar{u}^2, \bar{u}^4). \quad (3.8)$$

Здесь смысл обозначений тот же, что и в формуле (3.7).

Мы уже учли, что исходный вектор $\mathbf{B}(\bar{u})|0\rangle$ был on-shell, когда подставляли в производящий функционал представление (1.6), а не (1.4). Теперь мы воспользуемся тем, что исходный дуальный вектор $\langle 0|\mathbf{C}(\bar{v})$ являлся твистованным on-shell вектором, и выразим функции $r^{(2)}$ через функции ℓ в формуле (3.8). В силу (твистованных) уравнений Бете имеем

$$r^{(2)}(\bar{u}^4) = \frac{r(\bar{u}^4)}{\ell(\bar{u}^4)} = \frac{1}{\ell(\bar{u}^4)} \frac{f(\bar{u}^4, \bar{u}^1)f(\bar{u}^4, \bar{u}^2)f(\bar{u}^4, \bar{u}^3)}{f(\bar{u}^1, \bar{u}^4)f(\bar{u}^2, \bar{u}^4)f(\bar{u}^3, \bar{u}^4)} \quad (3.9)$$

и

$$r^{(2)}(\bar{v}^2) = \frac{r(\bar{v}^2)}{\ell(\bar{v}^2)} = \frac{e^{n_2(\beta_2 - \beta_1)}}{\ell(\bar{v}^2)} \frac{f(\bar{v}^2, \bar{v}^1)f(\bar{v}^2, \bar{v}^3)f(\bar{v}^2, \bar{v}^4)}{f(\bar{v}^1, \bar{v}^2)f(\bar{v}^3, \bar{v}^2)f(\bar{v}^4, \bar{v}^2)}. \quad (3.10)$$

Тогда скалярное произведение $S_{n_{\text{II}}}^{(2)}(\bar{v}_{\text{II}}|\bar{u}_{\text{II}})$ приобретает вид

$$S_{n_{\text{II}}}^{(2)}(\bar{v}_{\text{II}}|\bar{u}_{\text{II}}) = \sum_{\substack{\bar{u}_{\text{II}} \mapsto \{\bar{u}^2, \bar{u}^4\} \\ \bar{v}_{\text{II}} \mapsto \{\bar{v}^2, \bar{v}^4\}}} \frac{e^{n_2(\beta_2 - \beta_1)}}{\ell(\bar{u}^4)\ell(\bar{v}^2)} K_{n_2}(\bar{u}^2|\bar{v}^2)K_{n_4}(\bar{v}^4|\bar{u}^4) \\ \times \frac{f(\bar{u}^4, \bar{u}^1)f(\bar{u}^4, \bar{u}^2)f(\bar{u}^4, \bar{u}^3)f(\bar{v}^2, \bar{v}^1)f(\bar{v}^2, \bar{v}^3)f(\bar{v}^2, \bar{v}^4)}{f(\bar{u}^1, \bar{u}^4)f(\bar{u}^3, \bar{u}^4)f(\bar{v}^1, \bar{v}^2)f(\bar{v}^3, \bar{v}^2)}. \quad (3.11)$$

Последнее, что нам осталось сделать, это выразить произведения $\ell(\bar{v}_{\text{II}})$, $\ell(\bar{u}_{\text{II}})$, $f(\bar{v}_1, \bar{v}_{\text{II}})$ и $f(\bar{u}_1, \bar{u}_{\text{II}})$ в формуле (3.5) через новые подмножества:

$$e^{n_1(\beta_2 - \beta_1)} \frac{\ell(\bar{v}_{\text{II}})}{\ell(\bar{u}_1)} f(\bar{v}_1, \bar{v}_{\text{II}})f(\bar{u}_1, \bar{u}_{\text{II}}) = e^{(n_1 + n_3)(\beta_2 - \beta_1)} \frac{\ell(\bar{v}^2)\ell(\bar{v}^4)}{\ell(\bar{u}^1)\ell(\bar{u}^3)} f(\bar{v}^1, \bar{v}^2)f(\bar{v}^1, \bar{v}^4) \\ \times f(\bar{v}^3, \bar{v}^2)f(\bar{v}^3, \bar{v}^4)f(\bar{u}^1, \bar{u}^2)f(\bar{u}^1, \bar{u}^4)f(\bar{u}^3, \bar{u}^2)f(\bar{u}^3, \bar{u}^4). \quad (3.12)$$

Теперь необходимо подставить формулы (3.7), (3.11) и (3.12) в представление (3.5). Все перечисленные формулы достаточно длинные, поэтому следует соблюдать аккуратность. Однако ничего кроме аккуратности тут не требуется, и в результате мы получаем

$$\begin{aligned} M_n^{(\kappa)}(\bar{v}; \bar{u}) &= \sum e^{\beta_1 a^{(1)}[0] + \beta_2 d^{(1)}[0] + (n_1 + n_2 + n_3)(\beta_2 - \beta_1)} \frac{\ell(\bar{v}^1)\ell(\bar{v}^4)}{\ell(\bar{u}^1)\ell(\bar{u}^4)} F_u F_v \\ &\quad \times K_{n_1}(\bar{u}^1|\bar{v}^1)K_{n_3}(\bar{v}^3|\bar{u}^3)K_{n_2}(\bar{u}^2|\bar{v}^2)K_{n_4}(\bar{v}^4|\bar{u}^4), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} F_u &= f(\bar{u}^1, \bar{u}^2)f(\bar{u}^1, \bar{u}^3)f(\bar{u}^3, \bar{u}^2)f(\bar{u}^4, \bar{u}^1)f(\bar{u}^4, \bar{u}^2)f(\bar{u}^4, \bar{u}^3), \\ F_v &= f(\bar{v}^2, \bar{v}^1)f(\bar{v}^2, \bar{v}^4)f(\bar{v}^1, \bar{v}^4)f(\bar{v}^2, \bar{v}^3)f(\bar{v}^3, \bar{v}^4)f(\bar{v}^3, \bar{v}^1). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Суммирование в формуле (3.13) ведется по разбиениям исходных множеств \bar{v} и \bar{u} на четыре подмножества каждое:

$$\bar{u} \mapsto \{\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3, \bar{u}^4\}, \quad \bar{v} \mapsto \{\bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{v}^3, \bar{v}^4\}. \quad (3.15)$$

При этом ограничения налагаются лишь на количества элементов в подмножествах, а именно $\bar{v}^j = \bar{u}^j = n_j$, $j = 1, 2, 3, 4$. Кстати, напомним еще раз, что эти ограничения неявно указаны в формуле (3.13) в виде нижних индексов ССДС, которые определены лишь при условии, что количество элементов слева от вертикальной черты равно количеству элементов справа от вертикальной черты.

На самом деле, все вычисления уже проделаны, и нам осталось лишь увидеть ответ. Для этого введем новые подмножества:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= \{\bar{u}^1, \bar{u}^4\}, & \bar{u}_{ii} &= \{\bar{u}^2, \bar{u}^3\}, \\ \bar{v}_i &= \{\bar{v}^1, \bar{v}^4\}, & \bar{v}_{ii} &= \{\bar{v}^2, \bar{v}^3\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Легко видеть, что тогда

$$\begin{aligned} F_u &= f(\bar{u}_i, \bar{u}_{ii})f(\bar{u}^3, \bar{u}^2)f(\bar{u}^4, \bar{u}^1), \\ F_v &= f(\bar{v}_{ii}, \bar{v}_i)f(\bar{v}^1, \bar{v}^4)f(\bar{v}^2, \bar{v}^3). \end{aligned} \quad (3.17)$$

В результате мы получаем

$$M_n^{(\kappa)}(\bar{v}; \bar{u}) = e^{\beta_1 a^{(1)}[0] + \beta_2 d^{(1)}[0]} \sum_{\substack{\bar{u} \mapsto \{\bar{u}_i, \bar{u}_{ii}\} \\ \bar{v} \mapsto \{\bar{v}_i, \bar{v}_{ii}\}}} \frac{\ell(\bar{v}_i)}{\ell(\bar{u}_i)} f(\bar{u}_i, \bar{u}_{ii})f(\bar{v}_{ii}, \bar{v}_i)G_1(\bar{v}_i|\bar{u}_i)G_2(\bar{v}_{ii}|\bar{u}_{ii}), \quad (3.18)$$

а функции $G_1(\bar{v}_i|\bar{u}_i)$ и $G_2(\bar{v}_{ii}|\bar{u}_{ii})$ заданы в виде сумм по разбиениям на дополнительные подмножества:

$$G_1(\bar{v}_i|\bar{u}_i) = \sum_{\substack{\bar{u}_i \mapsto \{\bar{u}^1, \bar{u}^4\} \\ \bar{v}_i \mapsto \{\bar{v}^1, \bar{v}^4\}}} e^{(n-n_4)(\beta_2 - \beta_1)} K_{n_1}(\bar{u}^1|\bar{v}^1)K_{n_4}(\bar{v}^4|\bar{u}^4) f(\bar{v}^1, \bar{v}^4)f(\bar{u}^4, \bar{u}^1) \quad (3.19)$$

и

$$G_2(\bar{v}_{ii}|\bar{u}_{ii}) = \sum_{\substack{\bar{u}_{ii} \mapsto \{\bar{u}^2, \bar{u}^3\} \\ \bar{v}_{ii} \mapsto \{\bar{v}^2, \bar{v}^3\}}} K_{n_3}(\bar{v}^3|\bar{u}^3)K_{n_2}(\bar{u}^2|\bar{v}^2) f(\bar{v}^2, \bar{v}^3)f(\bar{u}^3, \bar{u}^2). \quad (3.20)$$

Иными словами, исходное суммирование по разбиениям (3.15) теперь организовано в несколько этапов: сначала мы имеем разбиения $\bar{u} \mapsto \{\bar{u}_i, \bar{u}_{ii}\}$ и $\bar{v} \mapsto \{\bar{v}_i, \bar{v}_{ii}\}$, после чего каждое из получившихся подмножеств еще раз разбивается на два.

Внимательно посмотрев на сумму (3.20), можно заметить, что она отличается от суммы (11.1.5) только обозначениями подмножеств. Поэтому $G_2(\bar{v}_{ii}|\bar{u}_{ii}) = \delta_{0, n_2 + n_3}$, т. е. $\bar{v}_{ii} = \bar{u}_{ii} = \emptyset$.

Отсюда следует, что $\bar{v}_i = \bar{v}$, $\bar{u}_i = \bar{u}$ и $n - n_4 = n_1$. Тогда, сравнивая сумму (3.20) с суммой (1.3), мы получаем

$$G_1(\bar{v}|\bar{u}) = S_n^{(\kappa)}(\bar{v}|\bar{u}) \quad (3.21)$$

и, следовательно,

$$M_n^{(\kappa)}(\bar{v}; \bar{u}) = e^{\beta_1 a^{(1)}[0] + \beta_2 d^{(1)}[0]} \frac{\ell(\bar{v})}{\ell(\bar{u})} S_n^{(\kappa)}(\bar{v}|\bar{u}). \quad (3.22)$$

Итак, все многочисленные и весьма громоздкие суммы по разбиениям в конечном итоге свернулись к скалярному произведению твистованного и обычного on-shell векторов, для которого у нас есть компактное представление в виде детерминанта. Для вычисления формфакторов нам осталось только взять производные по параметрам β_j . Вычислим в качестве примера формфактор оператора $A^{(1)}[0]$.

Дифференцируя определение (2.8) по β_1 , получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{dM_n^{(\kappa)}(\bar{v}; \bar{u})}{d\beta_1} \right|_{\beta_j=0} &= \left. \frac{d}{d\beta_1} \langle 0 | \mathbf{C}(\bar{v}) e^{\beta_1 A^{(1)}[0] + \beta_2 D^{(1)}[0]} \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle \right|_{\beta_j=0} \\ &= \langle 0 | \mathbf{C}(\bar{v}) A^{(1)}[0] \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle + \left. \frac{d}{d\beta_1} S_n^{(\kappa)}(\bar{v}|\bar{u}) \right|_{\beta_j=0}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Здесь $\beta_j = 0$ означает, что оба параметра β_1 и β_2 равны нулю. Обратите внимание, что в слагаемом $\langle 0 | \mathbf{C}(\bar{v}) A^{(1)}[0] \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle$ параметры β_j уже равны нулю, а это значит, что дуальный вектор $\langle 0 | \mathbf{C}(\bar{v})$ является обычным on-shell вектором, а не твистованным. То есть это тот самый формфактор парциальной нулевой моды $A^{(1)}[0]$, который мы ищем:

$$\langle 0 | \mathbf{C}(\bar{v}) A^{(1)}[0] \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle = M_n^{(11)}(\bar{v}; \bar{u}). \quad (3.24)$$

С другой стороны, дифференцируя (3.22), имеем

$$\left. \frac{dM_n^{(\kappa)}(\bar{v}; \bar{u})}{d\beta_1} \right|_{\beta_j=0} = \frac{\ell(\bar{v})}{\ell(\bar{u})} \left. \frac{d}{d\beta_1} S_n^{(\kappa)}(\bar{v}|\bar{u}) \right|_{\beta_j=0} + \delta_{\bar{u}, \bar{v}} \left(a^{(1)}[0] + \left. \frac{d}{d\beta_1} \ln \ell(\bar{v}) \right|_{\beta_j=0} \right) \langle 0 | \mathbf{C}(\bar{u}) \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle. \quad (3.25)$$

Здесь $\delta_{\bar{u}, \bar{v}} = 1$, если $\bar{u} = \bar{v}$, и $\delta_{\bar{u}, \bar{v}} = 0$ при $\bar{u} \neq \bar{v}$. В последнем случае, как было показано ранее, производная от скалярного произведения по параметру твиста¹ равна универсальному формфактору оператора $A(z)$

$$\left. \frac{d}{d\beta_1} S_n^{(\kappa)}(\bar{v}|\bar{u}) \right|_{\beta_j=0} = \mathfrak{F}_n^{(11)}(\bar{v}; \bar{u}), \quad \bar{u} \neq \bar{v}. \quad (3.26)$$

Таким образом, сравнивая (3.23) с (3.25), мы окончательно находим с учетом (3.26)

$$\begin{aligned} M_n^{(11)}(\bar{v}; \bar{u}) &= \langle 0 | \mathbf{C}(\bar{v}) A^{(1)}[0] \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle = \left(\frac{\ell(\bar{v})}{\ell(\bar{u})} - 1 \right) \mathfrak{F}_n^{(11)}(\bar{v}; \bar{u}) \\ &\quad + \delta_{\bar{u}, \bar{v}} \left(a^{(1)}[0] + \left. \frac{d}{d\beta_1} \ln \ell(\bar{v}) \right|_{\beta_j=0} \right) \langle 0 | \mathbf{C}(\bar{u}) \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.27)$$

¹Ранее мы вычисляли производные не по параметрам β_j , а по параметрам $\kappa_j = e^{\beta_j}$. Легко видеть, однако, что в точке $\beta_j = 0$ это одно и то же.

Полностью аналогично вычисляется формфактор оператора $D^{(1)}[0]$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_n^{(22)}(\bar{v}; \bar{u}) &= \langle 0 | \mathbf{C}(\bar{v}) D^{(1)}[0] \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle = \left(\frac{\ell(\bar{v})}{\ell(\bar{u})} - 1 \right) \mathfrak{F}_n^{(22)}(\bar{v}; \bar{u}) \\ &\quad + \delta_{\bar{u}, \bar{v}} \left(d^{(1)}[0] + \frac{d}{d\beta_2} \ln \ell(\bar{v}) \Big|_{\beta_j=0} \right) \langle 0 | \mathbf{C}(\bar{u}) \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Оставшиеся два формфактора (операторов $C^{(1)}[0]$ и $B^{(1)}[0]$) вычисляются с помощью формул (2.6), (2.7). Легко видеть, что

$$\mathbf{M}_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u}) = \langle 0 | \mathbf{C}(\bar{v}) C^{(1)}[0] \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle = \left(\frac{\ell(\bar{v})}{\ell(\bar{u})} - 1 \right) \mathfrak{F}_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u}) \quad (3.29)$$

и

$$\mathbf{M}_n^{(12)}(\bar{v}; \bar{u}) = \langle 0 | \mathbf{C}(\bar{v}) B^{(1)}[0] \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle = \left(\frac{\ell(\bar{v})}{\ell(\bar{u})} - 1 \right) \mathfrak{F}_n^{(12)}(\bar{v}; \bar{u}). \quad (3.30)$$

При выводе этих формул мы воспользовались соотношениями между универсальными формфакторами, а также свойством функции $\ell(w) \rightarrow 1$ при $w \rightarrow \infty$. Напоминаем, что это свойство следует из асимптотического разложения матрицы монодромии $T(u)$ по параметру u . Кроме того, в случае формфакторов операторов $C^{(1)}[0]$ и $B^{(1)}[0]$ количество элементов в наборах \bar{u} и \bar{v} различно, поэтому всегда $\bar{u} \neq \bar{v}$.

Если первая парциальная матрица монодромии $T^{(1)}(u)$ отвечает узлам решетки с номерами $1, \dots, m$, то вся зависимость формфактора $\mathbf{M}_n^{(jk)}$ от m находится в функциях ℓ . В моделях, описывающих физические системы, функция $\ell(u)$ представима в виде $\ell(u) = \ell_0^m(u)$, где $\ell_0(u)$ — некоторая функция, отвечающая одному узлу решетки. Тогда для формфакторов локальных операторов мы получаем

$$\langle 0 | \mathbf{C}(\bar{v}) (L_m[0])_{jk} \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle = \frac{\ell_0^{m-1}(\bar{v})}{\ell_0^{m-1}(\bar{u})} \left(\frac{\ell_0(\bar{v})}{\ell_0(\bar{u})} - 1 \right) \mathfrak{F}_n^{(jk)}(\bar{v}; \bar{u}), \quad \bar{u} \neq \bar{v}. \quad (3.31)$$

В случае $\bar{v} = \bar{u}$ имеем

$$\langle 0 | \mathbf{C}(\bar{u}) (L_m[0])_{jj} \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle = \frac{d}{d\beta_j} \ln \ell_0(\bar{v}) \Big|_{\beta_j=0} \langle 0 | \mathbf{C}(\bar{u}) \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle, \quad (3.32)$$

т. е. среднее от локального оператора $(L_m[0])_{jj}$ не зависит от номера узла решетки m .

3.1. Дифференцирование по параметрам твиста. Мы уже неоднократно указывали на то, что прежде чем пользоваться уравнениями Бете в формулах для скалярных произведений, необходимо убедиться в том, что в наборах \bar{u} и \bar{v} нет совпадающих элементов, т. е. $\bar{u} \cap \bar{v} = \emptyset$. Однако мы этого не сделали, когда выражали функцию $r^{(2)}(v)$ через $\ell(v)$ в формуле (3.10). При этом мы ухитрились вычислить формфакторы локальных операторов даже в том случае, когда наборы \bar{u} и \bar{v} полностью совпадают (3.32).

Причина в том, что в формуле (3.10) мы пользовались не обычными уравнениями Бете, а твистованными. Тогда переменные v_i становятся функциями от параметров твиста β_j : $v_i = v_i(\beta_j)$. Поэтому мы всегда можем выбрать такие значения β_j , при которых $\bar{u} \cap \bar{v}(\beta_j) = \emptyset$, провести все вычисления и уже в конечном ответе рассмотреть какие-либо специальные значения β_j , при которых наборы \bar{u} и \bar{v} частично или даже полностью совпадают. Собственно, именно это и делается в формуле (3.32).

В этом месте может возникнуть вопрос о вычислении производных по параметрам твиста. Формально, можно найти производные $dv_i/d\beta_j$ при $\beta_j = 0$, дифференцируя твистованные уравнения Бете. Однако в большинстве случаев этого не требуется. Например, как следует из формулы (3.26), для вычисления универсального формфактора $\mathfrak{F}_n^{(11)}$ нам нужно просто взять производную по β_1 от скалярного произведения твистованного и обычного on-shell векторов при $\beta_j = 0$. Скалярное произведение $S_n^{(\kappa)}(\bar{v}|\bar{u})$ дается формулами (11.1.12), (11.1.14), в которых следует сделать замену $\bar{u} \leftrightarrow \bar{v}$:

$$S_n^{(\kappa)}(\bar{v}|\bar{u}) = \Delta'_n(\bar{u})\Delta_n(\bar{v}) h(\bar{v}, \bar{u}) \det_n \mathcal{M}_{jk}^{(2)}, \quad (3.33)$$

где

$$\mathcal{M}_{jk}^{(2)} = t(v_k, u_j) + e^{\beta_2 - \beta_1} t(u_j, v_k) \frac{h(v_k, \bar{v})h(\bar{u}, v_k)}{h(\bar{v}, v_k)h(v_k, \bar{u})}. \quad (3.34)$$

Строго говоря, дифференцируя по β_1 , нам следует дифференцировать все параметры \bar{v} , которые входят как в префактор (3.33), так и в матричные элементы (3.34). Однако нетрудно показать, что детерминант матрицы $\mathcal{M}_{jk}^{(2)}$ пропорционален $(e^{\beta_2 - \beta_1} - 1)$. Для этого следует прибавить к последней (или любой другой) строке матрицы $\mathcal{M}_{jk}^{(2)}$ все остальные строки, умноженные на коэффициенты $\nu_j^{(n)}/\nu_n^{(n)}$, где $\nu_j^{(n)}$ определяются формулой (9.6.4). Повторяя вычисления, сделанные при доказательстве предложения 9.6.1, мы получим, что новая последняя строка пропорциональна $(e^{\beta_2 - \beta_1} - 1)$. А раз так, то при взятии производной по β_1 при $\beta_j = 0$ достаточно дифференцировать только эту экспоненту. При этом мы избавляемся от необходимости дифференцировать параметры v_i , которые зависят от β_1 неявно через твистованные уравнения Бете.

Описанный метод не проходит, когда $\bar{u} = \bar{v}$ при $\beta_j = 0$ (в этом случае $\nu_j^{(n)} = 0$). Однако и тут можно сделать вычисление производных по параметрам β_j более явным. Так, логарифмическая производная произведения функций ℓ_0 по β_1 в формуле (3.32) имеет вид

$$\frac{d}{d\beta_1} \ln \ell_0(\bar{v}) \Big|_{\beta_j=0} = \frac{d \ln \ell_0(v)}{d\beta_1} \sum_{k=1}^n \frac{dv_k}{d\beta_1} \Big|_{\beta_j=0}. \quad (3.35)$$

С другой стороны, дифференцируя твистованную систему уравнений Бете, записанную в терминах функций Ψ_j (9.7.15), находим

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \Psi_j}{\partial u_k} \frac{dv_k}{d\beta_1} \Big|_{\beta_j=0} = -1, \quad (3.36)$$

где мы учли, что $\bar{v} = \bar{u}$ при $\beta_j = 0$. После этого нам остается воспользоваться формулой (9.7.17), которая утверждает, что норма вектора пропорциональна якобиану матрицы $\partial \Psi_j / \partial u_k$

$$\langle 0 | \mathbf{C}(\bar{u}) \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle = (-c)^n \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^n f(u_j, u_k) \det_n \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial u_k} \right). \quad (3.37)$$

Легко видеть, что в силу системы (3.36) имеет место тождество

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \det_n \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial u_k} - \alpha \right) \Big|_{\alpha=0} &= \det_n \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial u_k} \right) \cdot \frac{d}{d\alpha} \det_n \left(\delta_{jk} + \alpha \frac{dv_k}{d\beta_1} \Big|_{\beta_j=0} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \det_n \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial u_k} \right) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{dv_i}{d\beta_1} \Big|_{\beta_j=0}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Отсюда находим

$$\frac{d}{d\beta_j} \ln \ell_0(\bar{v}) \Big|_{\beta_j=0} \langle 0 | \mathbf{C}(\bar{u}) \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle = (-c)^n \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^n f(u_j, u_k) \frac{d}{d\alpha} \det_n \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial u_k} - \alpha \right) \Big|_{\alpha=0}. \quad (3.39)$$

Взятие производной по вспомогательному параметру α в равенстве (3.39) уже не представляет никакого труда. Можно, например, вычесть последний столбец из всех остальных, после чего зависимость от α останется только в этом последнем столбце. Следовательно, производная от детерминанта сводится к дифференцированию последнего столбца.

Такой способ взятия производных по параметрам β_j подходит и в том случае, когда наборы \bar{v} и \bar{u} пересекаются лишь частично, и нам нужно раскрыть неопределенности, возникающие в матричных элементах $\mathcal{M}_{jk}^{(2)}$ из-за полюсов функций $t(v_k, u_j)$ и $t(u_j, v_k)$. Однако проще выразить отношения $h(v_k, \bar{v})/h(\bar{v}, v_k)$ через функции $r(v_k)$ и переписать матричные элементы в виде

$$\mathcal{M}_{jk}^{(2)} = t(v_k, u_j) + (-1)^{n-1} e^{\beta_2 - \beta_1} r(v_k) t(u_j, v_k) \frac{h(\bar{u}, v_k)}{h(v_k, \bar{u})}. \quad (3.40)$$

Теперь уже мы можем раскрыть неопределенность, просто устремив $v_k \rightarrow u_j$ (т.е. уже необязательно считать, что $v_k = v_k(\beta_1, \beta_2)$ и равенство $v_k = u_j$ достигается в пределе $\beta_{1,2} \rightarrow 0$). Представлением (3.40) также удобнее пользоваться для вычисления с помощью формул (2.6), (2.7) формфакторов внедиагональных элементов $M_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u})$ и $M_n^{(12)}(\bar{v}; \bar{u})$, если $\bar{u} \cap \bar{v} \neq \emptyset$.

4. Вычисление формфакторов внедиагональных элементов

В этом разделе мы получим представление для формфактора парциальной нулевой моды $C^{(1)}[0]$ прямым вычислением. Мы делаем это несмотря на то, что такое представление уже получено (см. (3.29)). Однако прямое вычисление позволит нам установить новые полезные тождества, которые нам пригодятся в дальнейшем. Для определенности будем считать, что $\bar{u} \cap \bar{v} = \emptyset$.

Итак, нам необходимо вычислить

$$M_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u}) = \langle 0 | \mathbf{C}(\bar{v}) C^{(1)}[0] \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle, \quad (4.1)$$

где оба вектора являются on-shell. Подставляя для них выражения через парциальные векторы, получаем

$$M_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u}) = \sum_{\substack{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\} \\ \bar{v} \rightarrow \{\bar{v}_I, \bar{v}_{II}\}}} \frac{\ell(\bar{v}_{II})}{\ell(\bar{u}_I)} f(\bar{v}_I, \bar{v}_{II}) f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II}) \langle 0 | {}^{(1)}\mathbf{C}^{(1)}(\bar{v}_I) C^{(1)}[0] \mathbf{B}^{(1)}(\bar{u}_I) | 0 \rangle^{(1)} \\ \times \langle 0 | {}^{(2)}\mathbf{C}^{(2)}(\bar{v}_{II}) \mathbf{B}^{(2)}(\bar{u}_{II}) | 0 \rangle^{(2)}. \quad (4.2)$$

Действие оператора $C^{(1)}[0]$ на дуальный вектор дается формулой

$$\langle 0 | {}^{(1)}\mathbf{C}^{(1)}(\bar{v}_I) C^{(1)}[0] = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \langle 0 | {}^{(1)}\mathbf{C}^{(1)}(\bar{v}_I) \mathbf{C}^{(1)}(w). \quad (4.3)$$

Таким образом, мы сводим матричный элемент парциальной нулевой моды $C^{(1)}[0]$ к сумме скалярных произведений парциальных векторов Бете:

$$M_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u}) = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \sum_{\substack{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\} \\ \bar{v} \rightarrow \{\bar{v}_I, \bar{v}_{II}\}}} \frac{\ell(\bar{v}_{II})}{\ell(\bar{u}_I)} f(\bar{v}_I, \bar{v}_{II}) f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II}) S_{n_I}^{(1)}(\{\bar{v}_I, w\} | \bar{u}_I) S_{n_{II}}^{(2)}(\bar{v}_{II} | \bar{u}_{II}). \quad (4.4)$$

До сих пор все было полностью аналогично вычислению производящего функционала $M_n^{(\kappa)}$ (2.8). Теперь начинаются небольшие отличия. Введем набор переменных $\bar{\eta} = \{\bar{v}, w\}$. Тогда формулу (4.4) можно переписать в виде:

$$M_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u}) = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \sum_{\substack{\bar{u} \mapsto \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\} \\ \bar{\eta} \mapsto \{\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}\} \\ w \in \bar{\eta}_I}} \frac{\ell(\bar{\eta}_{II})}{\ell(\bar{u}_I)} f(\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}) f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II}) S_{n_I}^{(1)}(\bar{\eta}_I | \bar{u}_I) S_{n_{II}}^{(2)}(\bar{\eta}_{II} | \bar{u}_{II}). \quad (4.5)$$

Здесь сумма берется по разбиениям $\bar{u} \mapsto \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\}$ и $\bar{\eta} \mapsto \{\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}\}$, но на разбиения наложено дополнительное ограничение $w \in \bar{\eta}_I$. Действительно, при таком ограничении мы можем положить $\bar{\eta}_I = \{\bar{v}_I, w\}$ и $\bar{\eta}_{II} = \bar{v}_{II}$. Видно, что тогда формулы (4.5) и (4.4) совпадают, если учесть, что $f(w, \bar{\eta}_{II}) = 1$ при $w \rightarrow \infty$.

Теперь мы вновь в основном повторяем уже проделанные вычисления. Сначала надо явно записать скалярные произведения, которые входят в формулу (4.5). Это даст нам сумму по разбиениям

$$\bar{u} \mapsto \{\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3, \bar{u}^4\}, \quad \bar{\eta} \mapsto \{\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2, \bar{\eta}^3, \bar{\eta}^4\}, \quad (4.6)$$

причем исходное ограничение $w \in \bar{\eta}_I$ трансформируется в $w \in \{\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^3\}$, или, что то же самое, $w \notin \{\bar{\eta}^2, \bar{\eta}^4\}$. При вычислении скалярных произведений возникнут функции $r^{(2)}$, которые по аналогии с формулами (3.9), (3.10) надо будет выразить с помощью уравнений Бете через функции ℓ . Здесь встретится только одно небольшое отличие, а именно, аналог формулы (3.10) теперь имеет вид

$$r^{(2)}(\bar{\eta}^2) = \frac{r(\bar{\eta}^2)}{\ell(\bar{\eta}^2)} = \frac{1}{\ell(\bar{\eta}^2)} \frac{f(\bar{\eta}^2, \bar{\eta}^1) f(\bar{\eta}^2, \bar{\eta}^3) f(\bar{\eta}^2, \bar{\eta}^4)}{f(\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2) f(\bar{\eta}^3, \bar{\eta}^2) f(\bar{\eta}^4, \bar{\eta}^2)}. \quad (4.7)$$

Во-первых, здесь мы используем не твистованные уравнения Бете, а обычные. Во-вторых, в правую часть (4.7) входят функции f , зависящие от параметра w , в то время как в уравнениях Бете на переменные \bar{v} этот параметр не фигурирует. Однако при $w \rightarrow \infty$ уравнения (4.7) действительно переходят в уравнения Бете, поскольку функция f стремится к единице, когда любой из ее аргументов стремится к бесконечности.

В конечном итоге мы приходим к аналогу формулы (3.18)

$$M_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u}) = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \sum_{\substack{\bar{u} \mapsto \{\bar{u}_i, \bar{u}_{ii}\} \\ \bar{\eta} \mapsto \{\bar{\eta}_i, \bar{\eta}_{ii}\}}} \frac{\ell(\bar{\eta}_i)}{\ell(\bar{u}_i)} f(\bar{u}_i, \bar{u}_{ii}) f(\bar{\eta}_{ii}, \bar{\eta}_i) G_1(\bar{\eta}_i | \bar{u}_i) G_2(\bar{\eta}_{ii} | \bar{u}_{ii}), \quad (4.8)$$

где функции $G_1(\bar{\eta}_i | \bar{u}_i)$ и $G_2(\bar{\eta}_{ii} | \bar{u}_{ii})$ заданы в виде сумм по разбиениям на дополнительные подмножества:

$$G_1(\bar{\eta}_i | \bar{u}_i) = \sum_{\substack{\bar{u}_i \mapsto \{\bar{u}^1, \bar{u}^4\} \\ \bar{\eta}_i \mapsto \{\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^4\} \\ w \notin \bar{\eta}^4}} K_{n_1}(\bar{u}^1 | \bar{\eta}^1) K_{n_4}(\bar{\eta}^4 | \bar{u}^4) f(\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^4) f(\bar{u}^4, \bar{u}^1) \quad (4.9)$$

и

$$G_2(\bar{\eta}_{ii} | \bar{u}_{ii}) = \sum_{\substack{\bar{u}_{ii} \mapsto \{\bar{u}^2, \bar{u}^3\} \\ \bar{\eta}_{ii} \mapsto \{\bar{\eta}^2, \bar{\eta}^3\} \\ w \notin \bar{\eta}^2}} K_{n_3}(\bar{\eta}^3 | \bar{u}^3) K_{n_2}(\bar{u}^2 | \bar{\eta}^2) f(\bar{\eta}^2, \bar{\eta}^3) f(\bar{u}^3, \bar{u}^2). \quad (4.10)$$

В обоих случаях мы имеем дело с суммами с дополнительными ограничениями, которые вытекают из условия $w \in \{\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^3\}$.

Допустим, что $w \in \bar{\eta}^1$. Тогда $G_2 = \delta_{0, n_2 + n_3}$. Действительно, в этом случае в сумме (4.10) нет никаких ограничений, и тогда с точностью до обозначений она совпадает с тождеством (11.1.5). Следовательно, $\bar{\eta}_{ii} = \bar{u}_{ii} = \emptyset$, и наоборот, $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}$, $\bar{u}_i = \bar{u}$.

Аналогично, если $w \in \bar{\eta}^3$, то $G_1 = \delta_{0, n_1 + n_4}$. В этом случае $\bar{\eta}_i = \bar{u}_i = \emptyset$, и $\bar{\eta}_{ii} = \bar{\eta}$, $\bar{u}_{ii} = \bar{u}$. Мы приходим к выводу, что формфактор $M_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u})$ имеет вид

$$M_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u}) = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \left(\frac{\ell(\bar{\eta})}{\ell(\bar{u})} \Omega_1(\bar{\eta}|\bar{u}) + \Omega_2(\bar{\eta}|\bar{u}) \right), \quad (4.11)$$

где

$$\Omega_1(\bar{\eta}|\bar{u}) = \sum_{\substack{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}^1, \bar{u}^4\} \\ \bar{\eta} \rightarrow \{\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^4\} \\ w \in \bar{\eta}^1}} K_{n_1}(\bar{u}^1|\bar{\eta}^1) K_{n_4}(\bar{\eta}^4|\bar{u}^4) f(\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^4) f(\bar{u}^4, \bar{u}^1) \quad (4.12)$$

и

$$\Omega_2(\bar{\eta}|\bar{u}) = \sum_{\substack{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}^2, \bar{u}^3\} \\ \bar{\eta} \rightarrow \{\bar{\eta}^2, \bar{\eta}^3\} \\ w \in \bar{\eta}^3}} K_{n_3}(\bar{\eta}^3|\bar{u}^3) K_{n_2}(\bar{u}^2|\bar{\eta}^2) f(\bar{\eta}^2, \bar{\eta}^3) f(\bar{u}^3, \bar{u}^2). \quad (4.13)$$

Сделаем замену переменных в формулах (4.12), (4.13). А именно, подмножества с верхними индексами 1 и 3 переименуем в подмножества с нижним индексом I , а подмножества с верхними индексами 2 и 4 — в подмножества с нижним индексом II . Тогда

$$\Omega_1(\bar{\eta}|\bar{u}) = \sum_{\substack{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\} \\ \bar{\eta} \rightarrow \{\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}\} \\ w \in \bar{\eta}_I}} K_{n_I}(\bar{u}_I|\bar{\eta}_I) K_{n_{II}}(\bar{\eta}_{II}|\bar{u}_{II}) f(\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}) f(\bar{u}_{II}, \bar{u}_I), \quad (4.14)$$

$$\Omega_2(\bar{\eta}|\bar{u}) = \sum_{\substack{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\} \\ \bar{\eta} \rightarrow \{\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}\} \\ w \in \bar{\eta}_{II}}} K_{n_I}(\bar{u}_I|\bar{\eta}_I) K_{n_{II}}(\bar{\eta}_{II}|\bar{u}_{II}) f(\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}) f(\bar{u}_{II}, \bar{u}_I). \quad (4.15)$$

Видно, что функции Ω_1 и Ω_2 заданы одной и той же суммой по разбиениям, однако в первом случае $w \in \bar{\eta}_I$, а во втором $w \in \bar{\eta}_{II}$. Тогда сумма $\Omega_1 + \Omega_2$ дается суммой по разбиениям без дополнительных ограничений, которая совпадает с тождеством (11.1.5). Следовательно, если исходные множества \bar{v} и \bar{u} не пусты, то $\Omega_1 + \Omega_2 = 0$. Таким образом, мы получаем

$$M_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u}) = \left(\frac{\ell(\bar{v})}{\ell(\bar{u})} - 1 \right) \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \Omega_1(\bar{\eta}|\bar{u}). \quad (4.16)$$

Здесь мы уже частично взяли предел, заменив $\ell(\bar{\eta})$ на $\ell(\bar{v})$, поскольку $\ell(w) \rightarrow 1$ при $w \rightarrow \infty$. Сравнивая равенства (4.16) и (3.29), мы видим, что

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \Omega_1(\bar{\eta}|\bar{u}) = \mathfrak{F}_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u}). \quad (4.17)$$

Таким образом, мы получаем тождество.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть даны два набора переменных \bar{v} и \bar{u} , таких что $\#\bar{v} = n - 1$, $\#\bar{u} = n$ ($n > 0$) и $\bar{v} \cap \bar{u} = \emptyset$. Пусть $\bar{\eta} = \{\bar{v}, w\}$. Тогда

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \sum_{\substack{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\} \\ \bar{\eta} \rightarrow \{\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}\} \\ w \in \bar{\eta}_I}} K_{n_I}(\bar{u}_I|\bar{\eta}_I) K_{n_{II}}(\bar{\eta}_{II}|\bar{u}_{II}) f(\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}) f(\bar{u}_{II}, \bar{u}_I) = \mathfrak{F}_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u}). \quad (4.18)$$

Суммирование ведется по разбиениям с ограничением $w \in \bar{\eta}_I$.

Равенство (4.18) является тождеством, поскольку оно было получено в рамках обобщенной модели, и никаких условий на параметры \bar{v} и \bar{u} не налагалось, кроме $\bar{v} \cap \bar{u} = \emptyset$.

Полностью аналогично можно доказать и еще одно тождество.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть даны два набора переменных \bar{v} и \bar{u} , таких что $\#\bar{v} = n + 1$, $\#\bar{u} = n$ ($n \geq 0$) и $\bar{v} \cap \bar{u} = \emptyset$. Пусть $\bar{\eta} = \{\bar{u}, w\}$. Тогда

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} \sum_{\substack{\bar{u} \rightarrow \{\bar{v}_I, \bar{v}_{II}\} \\ \bar{\eta} \rightarrow \{\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}\} \\ w \in \bar{\eta}_I}} K_{n_I}(\bar{\eta}_I | \bar{v}_I) K_{n_{II}}(\bar{v}_{II} | \bar{\eta}_{II}) f(\bar{v}_I, \bar{v}_{II}) f(\bar{\eta}_{II}, \bar{\eta}_I) = \mathfrak{F}_n^{(12)}(\bar{v}; \bar{u}). \quad (4.19)$$

Суммирование ведется по разбиениям с ограничением $w \in \bar{\eta}_I$.

В случае, когда в наборах \bar{u} и \bar{v} есть совпадающие элементы, вычисления значительно усложняются. Поэтому наиболее простой способ действий — это воспользоваться формулами (2.6), (2.7).

5. Доказательство новых тождеств

Ради полноты изложения приведем прямое доказательство тождества (4.18). В предыдущей лекции мы уже вычисляли универсальный формфактор оператора $C(z)$. Напомним явную формулу:

$$\mathfrak{F}_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u}) = -\Delta'_n(\bar{u}) \Delta_{n-1}(\bar{v}) h(\bar{v}, \bar{u}) \frac{g(u_n, \bar{v})}{g(u_n, \bar{u}_n)} \det_{n-1} \mathcal{M}_{jk}^{(21)}, \quad (5.1)$$

где матрица $\mathcal{M}_{jk}^{(21)}$ дана равенством (12.4.20).

Воспроизведем этот результат, вычислив сумму по разбиениям в формуле (4.14). Тождество суммирования (8.2.4) для ССДС позволяет вычислить сумму по разбиениям набора \bar{u} :

$$\sum_{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\}} K_{n_I}(\bar{u}_I | \bar{\eta}_I) K_{n_{II}}(\bar{\eta}_{II} | \bar{u}_{II}) f(\bar{u}_{II}, \bar{u}_I) = (-1)^{n_I} f(\bar{u}, \bar{\eta}_I) K_n(\{\bar{\eta}_I - c, \bar{\eta}_{II}\} | \bar{u}). \quad (5.2)$$

Тогда формула (4.14) превращается в

$$\Omega_1(\bar{\eta} | \bar{u}) = \sum_{\substack{\bar{\eta} \rightarrow \{\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}\} \\ w \in \bar{\eta}_I}} (-1)^{n_I} f(\bar{u}, \bar{\eta}_I) f(\bar{\eta}_{II}, \bar{\eta}_I) K_n(\{\bar{\eta}_I - c, \bar{\eta}_{II}\} | \bar{u}). \quad (5.3)$$

Суммирование по разбиениям набора $\bar{\eta}$ проведем с помощью леммы, которая доказывалась при выводе детерминантного представления для скалярного произведения. Напомним эту лемму.

ЛЕММА 5.1. Пусть $\bar{\eta}$ и \bar{u} суть два набора комплексных чисел, таких что $\#\bar{\eta} = \#\bar{u} = n$. Пусть также $\phi_1(\eta)$ и $\phi_2(\eta)$ — две произвольные функции комплексной переменной η . Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{\eta} \rightarrow \{\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}\}} K_n(\{\bar{\eta}_I - c, \bar{\eta}_{II}\} | \bar{u}) f(\bar{u}, \bar{\eta}_I) f(\bar{\eta}_{II}, \bar{\eta}_I) \phi_1(\bar{\eta}_I) \phi_2(\bar{\eta}_{II}) \\ &= \Delta'_n(\bar{u}) \Delta_n(\bar{\eta}) \det_n \left(\phi_2(\eta_k) t(\eta_k, u_j) h(\eta_k, \bar{u}) + (-1)^n \phi_1(\eta_k) t(u_j, \eta_k) h(\bar{u}, \eta_k) \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

В этой формуле использованы сокращенные обозначения для произведений функций ϕ_1 и ϕ_2 .

Нам нужно подобрать такие функции ϕ_1 и ϕ_2 , чтобы сумма в формуле (5.4) превратилась бы в сумму (5.3). Легко видеть, что функции

$$\begin{aligned}\phi_1(\eta_i) &= -1, \\ \phi_2(\eta_i) &= \frac{f(\bar{\eta}_i, \eta_i)}{f(\eta_i, \bar{\eta}_i)} = (-1)^{n-1} \frac{h(\bar{\eta}, \eta_i)}{h(\eta_i, \bar{\eta})}, \quad \eta_i \in \bar{v}, \\ \phi_2(w) &= 0,\end{aligned}\tag{5.5}$$

удовлетворяют нужным требованиям. Действительно, в этом случае

$$f(\bar{\eta}_{\text{II}}, \bar{\eta}_{\text{I}}) \phi_2(\bar{\eta}_{\text{II}}) = f(\bar{\eta}_{\text{II}}, \bar{\eta}_{\text{I}}) \frac{f(\bar{\eta}_{\text{I}}, \bar{\eta}_{\text{II}})}{f(\bar{\eta}_{\text{II}}, \bar{\eta}_{\text{I}})} = f(\bar{\eta}_{\text{I}}, \bar{\eta}_{\text{II}}),\tag{5.6}$$

а условие $\phi_2(w) = 0$ автоматически оставляет только те разбиения, для которых $w \in \bar{\eta}_{\text{I}}$. Тогда получаем

$$\Omega_1(\bar{\eta}|\bar{u}) = \Delta'_n(\bar{u}) \Delta_n(\bar{\eta}) \det_n \mathcal{N}_{jk}^{(21)},\tag{5.7}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{jk}^{(21)} &= (-1)^{n-1} t(\eta_k, u_j) \frac{h(\eta_k, \bar{u}) h(\bar{\eta}, \eta_k)}{h(\eta_k, \bar{\eta})} + (-1)^{n-1} t(u_j, \eta_k) h(\bar{u}, \eta_k), \quad k < n, \\ \mathcal{N}_{jn}^{(21)} &= (-1)^{n-1} t(u_j, \eta_n) h(\bar{u}, \eta_n), \quad \eta_n = w.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Вынесем из каждого столбца множитель

$$(-1)^{n-1} \frac{h(\eta_k, \bar{u}) h(\bar{\eta}, \eta_k)}{h(\eta_k, \bar{\eta})}.\tag{5.9}$$

Получаем

$$\Omega_1(\bar{\eta}|\bar{u}) = \Delta'_n(\bar{u}) \Delta_n(\bar{\eta}) h(\bar{\eta}, \bar{u}) \det_n \tilde{\mathcal{N}}_{jk}^{(21)},\tag{5.10}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{N}}_{jk}^{(21)} &= t(v_k, u_j) + t(u_j, v_k) \frac{h(v_k, \bar{\eta}) h(\bar{u}, v_k)}{h(v_k, \bar{u}) h(\bar{\eta}, v_k)}, \quad k < n, \\ \tilde{\mathcal{N}}_{jn}^{(21)} &= t(u_j, w) \frac{h(w, \bar{\eta}) h(\bar{u}, w)}{h(w, \bar{u}) h(\bar{\eta}, w)}.\end{aligned}\tag{5.11}$$

Здесь мы уже явно указали, что $\eta_k = v_k$ при $k < n$ и $\eta_n = w$.

Полученный результат следует умножить на w/c и устремить w к бесконечности. Удобно представить w/c как произведение w^2/c^2 и c/w и внести множитель w^2/c^2 в последний столбец матрицы $\tilde{\mathcal{N}}^{(21)}$. Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{w \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{N}}_{jk}^{(21)} &= \mathcal{M}_{jk}^{(21)}, \quad k < n, \\ \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w^2}{c^2} \tilde{\mathcal{N}}_{jn}^{(21)} &= -1,\end{aligned}\tag{5.12}$$

где $\mathcal{M}_{jk}^{(21)}$ дано формулой (12.4.20), и

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{c}{w} \Delta'_n(\bar{u}) \Delta_n(\bar{\eta}) h(\bar{\eta}, \bar{u}) = \Delta'_n(\bar{u}) \Delta_{n-1}(\bar{v}) h(\bar{v}, \bar{u}).\tag{5.13}$$

Мы почти воспроизвели результат (5.1). Осталось только избавиться от последнего столбца в матрице $\tilde{\mathcal{N}}^{(21)}$. Это делается стандартным образом. Добавим к последней строке матрицы $\tilde{\mathcal{N}}_{jk}^{(21)}$ все остальные строки, умноженные на коэффициенты α_j/α_n , где

$$\alpha_j = \frac{g(u_j, \bar{u}_j)}{g(u_j, \bar{v})} = \prod_{m=1}^{n-1} (u_j - v_m) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n (u_j - u_m)^{-1}.\tag{5.14}$$

Возникающие при этом суммы вычисляются явно с помощью вспомогательных контурных интегралов. Собственно, мы уже доказывали, что

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathcal{M}_{jk}^{(21)} = 0, \quad k < n, \quad (5.15)$$

поэтому после такой операции в последней строке мы получаем нули всюду, кроме последнего элемента. Последний элемент равен $-1/\alpha_n$ благодаря тождеству

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1. \quad (5.16)$$

Таким образом, детерминант матрицы $n \times n$ сводится к произведению коэффициента $-1/\alpha_n$ и минора, построенного на первых $n - 1$ строках и столбцах. Матричные элементы этого минора совпадают с $\mathcal{M}_{jk}^{(21)}$, и мы воспроизводим ответ (5.1).

Лекция 14. Формфакторы локальных операторов в квантовом нелинейном уравнении Шрёдингера

Данная лекция посвящена вычислению формфакторов локальных операторов в модели квантового нелинейного уравнения Шрёдингера. Дело в том, что асимптотическое разложение матрицы монодромии $T(u)$ при $u \rightarrow \infty$ в этой модели имеет структуру, которая отличается от рассмотренной в предыдущих лекциях. Из-за этого меняется определение нулевых мод. Мы увидим, однако, что несмотря на эти изменения, основные действия по вычислению формфакторов локальных операторов остаются практически теми же самыми, что и в лекции 13.

1. Квантовое нелинейное уравнение Шрёдингера

Описание модели квантового нелинейного уравнения Шрёдингера и ее формулировка на языке КМОЗ была дана в разделе 3.1.2. Поэтому здесь мы напомним лишь основные формулы.

Гамильтониан квантового нелинейного уравнения Шрёдингера имеет вид

$$H = \int_0^L \left(\partial_x \Psi^\dagger(x) \partial_x \Psi(x) + \varkappa \Psi^\dagger(x) \Psi^\dagger(x) \Psi(x) \Psi(x) \right) dx, \quad (1.1)$$

где $\Psi(x)$ и $\Psi^\dagger(x)$ — канонические бозонные поля, а \varkappa — константа связи, которая связана с константой c , входящей в R -матрицу, соотношением $\varkappa = ic$. Мы рассматриваем модель, определенную на конечном интервале $[0, L]$ с периодическими граничными условиями.

Для формулировки квантового нелинейного уравнения Шрёдингера на языке КМОЗ вводят решеточную аппроксимацию. А именно, на интервале $[0, L]$ выбирается N точек x_1, \dots, x_N , так что $x_n = \Delta n$, где $\Delta = L/N$ — шаг решетки. С каждым узлом решетки ассоциируется L -оператор (3.1.7), в котором операторы ψ_n и ψ_n^\dagger являются решеточными аппроксимациями исходных бозонных полей и удовлетворяют соотношениям

$$[\psi_n, \psi_m^\dagger] = \frac{\delta_{nm}}{\Delta}. \quad (1.2)$$

Матрица монодромии возникает при взятии непрерывного предела $\Delta \rightarrow 0$ в стандартном выражении

$$T(u) = L_N(u) \dots L_1(u). \quad (1.3)$$

Наша задача состоит в том, чтобы получить явные представления матричных элементов матрицы монодромии через бозонные поля. Зная такие представления, мы можем получить асимптотическое разложение $T(u)$ при $u \rightarrow \infty$ и определить нулевые моды.

1.1. Представление для матрицы монодромии через бозонные поля. Для вычисления матрицы монодромии в непрерывном пределе нам потребуется L -оператор с точностью до членов, линейных по Δ :

$$L_n(u) = \frac{1}{1 - \frac{i u \Delta}{2}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{i u \Delta}{2} & -i \sqrt{\varkappa} \Delta \psi_n^\dagger \\ i \sqrt{\varkappa} \Delta \psi_n & 1 + \frac{i u \Delta}{2} \end{pmatrix} + O(\Delta^2), \quad (1.4)$$

где нормировочный множитель выбран так, чтобы обеспечить равенство $a(u) = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вообще говоря, следует с большой осторожностью писать подобное разложение, если члены порядка $O(\Delta^2)$ зависят от неограниченных операторов. Дело в том, что при коммутировании операторов ψ_n и ψ_n^\dagger могут возникнуть члены порядка $1/\Delta$. Однако в нашем случае мы будем перемножать L -операторы, отвечающие различным узлам решетки, поэтому представление (1.4) оправдано.

Представим инфинитезимальный L -оператор (1.4) в виде суммы диагональной и антидиагональной матриц¹:

$$L_n(u) = \frac{\Lambda(u) + W_n}{1 - \frac{i u \Delta}{2}}, \quad (1.5)$$

где

$$\Lambda(u) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{i u \Delta}{2} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{i u \Delta}{2} \end{pmatrix}, \quad W_n = \begin{pmatrix} 0 & b_n \\ c_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{\varkappa}\Delta\psi_n^\dagger \\ i\sqrt{\varkappa}\Delta\psi_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Подставим представление (1.5) в формулу (1.3) и разложим получившееся выражение по степеням W_n . Мы получаем

$$T(u) = \sum_{n=0}^N T_n(u), \quad (1.7)$$

где

$$T_n(u) = \left(1 - \frac{i u \Delta}{2}\right)^{-N} \sum_{N \geq k_n > \dots > k_1 \geq 1} \Lambda^{N-k_n} W_{k_n} \Lambda^{k_n-k_{n-1}-1} \dots \Lambda^{k_2-k_1-1} W_{k_1} \Lambda^{k_1-1}. \quad (1.8)$$

Пусть

$$\widetilde{W}_{k_i} = \Lambda^{-k_i} W_{k_i} \Lambda^{k_i-1} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{b}_{k_i} \\ \tilde{c}_{k_i} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

где

$$\tilde{b}_{k_i} = \frac{b_{k_i}}{1 + \frac{i u \Delta}{2}} \left(\frac{1 + \frac{i u \Delta}{2}}{1 - \frac{i u \Delta}{2}} \right)^{k_i}, \quad \tilde{c}_{k_i} = \frac{c_{k_i}}{1 - \frac{i u \Delta}{2}} \left(\frac{1 - \frac{i u \Delta}{2}}{1 + \frac{i u \Delta}{2}} \right)^{k_i}. \quad (1.10)$$

Тогда равенство (1.8) принимает вид

$$T_n(u) = \left(1 - \frac{i u \Delta}{2}\right)^{-N} \Lambda^N \sum_{N \geq k_n > \dots > k_1 \geq 1} \widetilde{W}_{k_n} \widetilde{W}_{k_{n-1}} \dots \widetilde{W}_{k_1}. \quad (1.11)$$

Поскольку произведение двух матриц \widetilde{W}_{k_i} и $\widetilde{W}_{k_{i-1}}$ дает диагональную матрицу

$$\widetilde{W}_{k_i} \widetilde{W}_{k_{i-1}} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{k_i} \tilde{c}_{k_{i-1}} & 0 \\ 0 & \tilde{c}_{k_i} \tilde{b}_{k_{i-1}} \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

мы легко находим

$$\begin{aligned} T_0(u) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1 + \frac{i u \Delta}{2}}{1 - \frac{i u \Delta}{2}} \right)^N \end{pmatrix}, \\ T_{2\ell}(u) &= \begin{pmatrix} A_\ell(u) & 0 \\ 0 & D_\ell(u) \end{pmatrix}, \quad \ell = 1, 2, \dots, \\ T_{2\ell+1}(u) &= \begin{pmatrix} 0 & B_\ell(u) \\ C_\ell(u) & 0 \end{pmatrix}, \quad \ell = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (1.13)$$

¹Здесь и далее мы опускаем члены $O(\Delta^2)$, поскольку они не дают вклада в непрерывный предел.

где

$$\begin{aligned}
A_\ell(u) &= \sum_{N \geq k_{2\ell} > \dots > k_1 \geq 1} \prod_{i=1}^{\ell} \tilde{b}_{k_{2i}} \tilde{c}_{k_{2i-1}}, \\
B_\ell(u) &= \sum_{N \geq k_{2\ell+1} > \dots > k_1 \geq 1} \tilde{b}_{k_{2\ell+1}} \prod_{i=1}^{\ell} \tilde{c}_{k_{2i}} \tilde{b}_{k_{2i-1}}, \\
C_\ell(u) &= \left(\frac{1 + \frac{iu\Delta}{2}}{1 - \frac{iu\Delta}{2}} \right)^N \sum_{N \geq k_{2\ell+1} > \dots > k_1 \geq 1} \tilde{c}_{k_{2\ell+1}} \prod_{i=1}^{\ell} \tilde{b}_{k_{2i}} \tilde{c}_{k_{2i-1}}, \\
D_\ell(u) &= \left(\frac{1 + \frac{iu\Delta}{2}}{1 - \frac{iu\Delta}{2}} \right)^N \sum_{N \geq k_{2\ell} > \dots > k_1 \geq 1} \prod_{i=1}^{\ell} \tilde{c}_{k_{2i}} \tilde{b}_{k_{2i-1}}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Отметим, что в произведениях операторов, входящих в формулы (1.14), все операторы коммутируют, поскольку они отвечают разным узлам решетки.

Теперь все готово для перехода к непрерывному пределу $\Delta \rightarrow 0$. Прежде всего заметим, что в этом пределе $N \rightarrow \infty$, поэтому конечная сумма (1.7) превращается в бесконечный ряд. Также легко видеть, что

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \frac{iu\Delta}{2}}{1 - \frac{iu\Delta}{2}} \right)^{k_i} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \frac{iu\Delta}{2}}{1 - \frac{iu\Delta}{2}} \right)^{x_{k_i}/\Delta} = e^{iux_{k_i}}. \tag{1.15}$$

Отсюда находим

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \frac{iu\Delta}{2}}{1 - \frac{iu\Delta}{2}} \right)^N = e^{iuL} \tag{1.16}$$

и

$$\tilde{b}_{k_i} \rightarrow -i\sqrt{\varkappa}\Delta e^{iux_{k_i}} \psi_{k_i}^\dagger, \quad \tilde{c}_{k_i} \rightarrow i\sqrt{\varkappa}\Delta e^{-iux_{k_i}} \psi_{k_i}, \quad \Delta \rightarrow 0. \tag{1.17}$$

Подставляя эти формулы в (1.14), получаем

$$\begin{aligned}
A_\ell(u) &= \varkappa^\ell \Delta^{2\ell} \sum_{k_{2\ell} > \dots > k_1 \geq 1} \prod_{i=1}^{\ell} e^{iux_{2i}} \psi_{2i}^\dagger \prod_{i=1}^{\ell} e^{-iux_{2i-1}} \psi_{2i-1}, \\
B_\ell(u) &= -i\varkappa^{\ell+1/2} \Delta^{2\ell+1} \sum_{k_{2\ell+1} > \dots > k_1 \geq 1} \prod_{i=1}^{\ell+1} e^{iux_{2i-1}} \psi_{2i-1}^\dagger \prod_{i=1}^{\ell} e^{-iux_{2i}} \psi_{2i}, \\
C_\ell(u) &= i\varkappa^{\ell+1/2} \Delta^{2\ell+1} e^{iuL} \sum_{k_{2\ell+1} > \dots > k_1 \geq 1} \prod_{i=1}^{\ell} e^{iux_{2i}} \psi_{2i}^\dagger \prod_{i=1}^{\ell+1} e^{-iux_{2i-1}} \psi_{2i-1}, \\
D_\ell(u) &= \varkappa^\ell \Delta^{2\ell} e^{iuL} \sum_{k_{2\ell} > \dots > k_1 \geq 1} \prod_{i=1}^{\ell} e^{iux_{2i-1}} \psi_{2i-1}^\dagger \prod_{i=1}^{\ell} e^{-iux_{2i}} \psi_{2i}.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Остается перейти от дискретных операторов ψ_i и ψ_i^\dagger к полям $\Psi(x)$ и $\Psi^\dagger(x)$. Условимся, что здесь и в дальнейшем все пределы операторнозначных выражений должны пониматься в слабом смысле. Это тем более оправдано, что в конечном итоге нас интересуют формфакторы локальных операторов, а не сами операторы. Тогда ясно, что в непрерывном пределе дискретные суммы по узлам решетки переходят в интегралы. Действительно, пусть $\Phi(x)$ — интегрируемая функция

на интервале $[0, L]$. Тогда в силу (3.1.5)

$$\Delta \sum_{j=1}^N \Phi(x_j) \psi^\dagger(j) = \sum_{j=1}^N \Phi(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \Psi_k^\dagger(x) dx \longrightarrow \int_0^L \Phi(x) \Psi_k^\dagger(x) dx, \quad \Delta \rightarrow 0. \quad (1.19)$$

Таким образом, сумма по узлам решетки, умноженная на Δ , в непрерывном пределе переходит в интеграл. Тем же самым способом можно доказать, что m -кратная сумма по узлам решетки, умноженная на Δ^m , в непрерывном пределе переходит в m -кратный интеграл. В итоге мы получаем для диагональной части матрицы монодромии

$$A_\ell(u) = \varkappa^\ell \int_{\mathcal{D}_{2\ell}(\bar{x})} \prod_{i=1}^{\ell} e^{iu x_{2i}} \Psi^\dagger(x_{2i}) dx_{2i} \prod_{i=1}^{\ell} e^{-iu x_{2i-1}} \Psi(x_{2i-1}) dx_{2i-1} \quad (1.20)$$

и

$$D_\ell(u) = e^{iuL} \varkappa^\ell \int_{\mathcal{D}_{2\ell}(\bar{x})} \prod_{i=1}^{\ell} e^{iu x_{2i-1}} \Psi^\dagger(x_{2i-1}) dx_{2i-1} \prod_{i=1}^{\ell} e^{-iu x_{2i}} \Psi(x_{2i}) dx_{2i}, \quad (1.21)$$

где $\mathcal{D}_{2\ell}(\bar{x}) = \{L > x_{2\ell} > \dots > x_1 > 0\}$. Аналогично, для антидиагональной части находим

$$B_\ell(u) = -i \varkappa^{\ell+1/2} \int_{\mathcal{D}_{2\ell+1}(\bar{x})} \prod_{i=1}^{\ell+1} e^{iu x_{2i-1}} \Psi^\dagger(x_{2i-1}) dx_{2i-1} \prod_{i=1}^{\ell} e^{-iu x_{2i}} \Psi(x_{2i}) dx_{2i} \quad (1.22)$$

и

$$C_\ell(u) = i \varkappa^{\ell+1/2} e^{iuL} \int_{\mathcal{D}_{2\ell+1}(\bar{x})} \prod_{i=1}^{\ell} e^{iu x_{2i}} \Psi^\dagger(x_{2i}) dx_{2i} \prod_{i=1}^{\ell+1} e^{-iu x_{2i-1}} \Psi(x_{2i-1}) dx_{2i-1}, \quad (1.23)$$

где $\mathcal{D}_{2\ell+1}(\bar{x}) = \{L > x_{2\ell+1} > \dots > x_1 > 0\}$. Еще раз отметим, что в областях интегрирования $\mathcal{D}_{2\ell}$ и $\mathcal{D}_{2\ell+1}$ все бозонные поля коммутируют друг с другом, поэтому их порядок, на самом деле, не важен.

Таким образом, мы получили представление для матричных элементов матрицы монодромии $T(u)$ в виде ряда, члены которого явным образом зависят от локальных бозонных полей. Данный ряд является формальным, и мы не исследуем вопрос о его сходимости. Однако легко видеть, что если ввести вектор

$$|\Phi_n\rangle = \int_0^L dx_1, \dots, dx_n \Phi_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n \Psi^\dagger(x_i) |0\rangle, \quad (1.24)$$

где $\Phi_n(x_1, \dots, x_n)$ — некоторая гладкая в области интегрирования функция, то действие любого $T_{ij}(u)$ на $|\Phi_n\rangle$ превращается в конечную сумму.

2. Нулевые моды

При $u \rightarrow \infty$ разложение для матрицы монодромии содержит кратные интегралы от быстро осциллирующих функций. Методы вычисления быстро осциллирующих интегралов хорошо известны. В нашем случае одним из простейших способов получить асимптотическое разложение для $T(u)$ является интегрирование по частям.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как и предельный переход от дискретных операторов к бозонным полям, асимптотическое разложение $T(u)$ в ряд по степеням u^{-1} следует понимать в слабом смысле. Так, например, оценивая асимптотическое поведение оператора $A_\ell(u)$, мы должны исследовать матричные элементы этого оператора между векторами типа (1.24). Это приводит к асимптотическому

анализу интегралов вида

$$\mathcal{A}_\ell = \int_{\mathcal{D}_{2\ell}(\bar{x})} \left(\prod_{i=1}^{\ell} e^{iu(x_{2i}-x_{2i-1})} \right) \Phi(x_1, \dots, x_{2\ell}) dx_1, \dots, dx_{2\ell}, \quad (2.1)$$

где $\Phi(x_1, \dots, x_{2\ell})$ — некоторая гладкая функция в области интегрирования.

Легко показать (см. приложение 5), что интегралы по одной переменной интегрирования в формулах (1.22), (1.23) и двойные интегралы в формулах (1.20), (1.21) ведут себя как $1/u$ при $u \rightarrow \infty$. Все остальные слагаемые, в которых кратность интегралов больше двух, дают вклады порядка $o(u^{-1})$. Поэтому для того, чтобы найти нулевые моды, достаточно взять только первые нетривиальные члены разложения $T(u)$. Тогда мы имеем

$$A(u) = 1 + \varkappa \int_0^L e^{iu(z-y)} \theta(z-y) \Psi^\dagger(z) \Psi(y) dz dy + O(\varkappa^2), \quad (2.2)$$

$$D(u) = e^{iuL} + \varkappa e^{iuL} \int_0^L e^{iu(y-z)} \theta(z-y) \Psi^\dagger(y) \Psi(z) dz dy + O(\varkappa^2), \quad (2.3)$$

$$B(u) = -i\sqrt{\varkappa} \int_0^L e^{iuy} \Psi^\dagger(y) dy + O(\varkappa^{3/2}), \quad (2.4)$$

$$C(u) = i\sqrt{\varkappa} e^{iuL} \int_0^L e^{-iuy} \Psi(y) dy + O(\varkappa^{3/2}). \quad (2.5)$$

Все слагаемые, обозначенные через $O(\varkappa^2)$ или $O(\varkappa^{3/2})$, дают вклады $O(u^{-2})$ при $u \rightarrow \infty$, и поэтому они не важны. Интегрируя по частям, получаем

$$A(u) = 1 + \frac{i\varkappa}{u} \int_0^L \Psi^\dagger(y) \Psi(y) dy + O(u^{-2}), \quad (2.6)$$

$$D(u) = e^{iuL} - \frac{i\varkappa}{u} e^{iuL} \int_0^L \Psi^\dagger(y) \Psi(y) dy + O(u^{-2}), \quad (2.7)$$

$$B(u) = -\frac{\sqrt{\varkappa}}{u} \left(e^{iuL} \Psi^\dagger(L) - \Psi^\dagger(0) \right) + O(u^{-2}), \quad (2.8)$$

$$C(u) = -\frac{\sqrt{\varkappa}}{u} \left(\Psi(L) - e^{iuL} \Psi(0) \right) + O(u^{-2}). \quad (2.9)$$

Теперь определим нулевые моды следующим образом:

$$A[0] = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{c} (A(u) - 1) = - \int_0^L \Psi^\dagger(y) \Psi(y) dy \quad (2.10)$$

(напомним, что $c = -i\varkappa$). Это то же самое определение, что использовалось ранее. Нулевая мода $D[0]$ определяется несколько иначе:

$$D[0] = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{c} (e^{-iuL} D(u) - 1) = \int_0^L \Psi^\dagger(y) \Psi(y) dy \quad (2.11)$$

и, следовательно, $D[0] = -A[0]$.

Глядя на выражения (2.8), (2.9), мы видим, что для этих операторов имеется два типа нулевых мод:

$$\begin{aligned} B_{(\text{R})}[0] &= \lim_{u \rightarrow -i\infty} e^{-iuL \frac{u}{c}} B(u) = \frac{1}{i\sqrt{\varkappa}} \Psi^\dagger(L), \\ B_{(\text{L})}[0] &= \lim_{u \rightarrow +i\infty} \frac{u}{c} B(u) = -\frac{1}{i\sqrt{\varkappa}} \Psi^\dagger(0) \end{aligned} \quad (2.12)$$

и

$$\begin{aligned} C_{(\text{R})}[0] &= \lim_{u \rightarrow +i\infty} \frac{u}{c} C(u) = \frac{1}{i\sqrt{\varkappa}} \Psi(L), \\ C_{(\text{L})}[0] &= \lim_{u \rightarrow -i\infty} e^{-iuL \frac{u}{c}} C(u) = -\frac{1}{i\sqrt{\varkappa}} \Psi(0). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Полученные формулы для нулевых мод позволяют исследовать формфакторы локальных операторов в рамках композитной модели. Действительно, если парциальная матрица монодромии $T^{(1)}(u)$ соответствует интервалу $[0, x]$, где x — некоторая фиксированная точка интервала $[0, L]$, то парциальные нулевые моды даются выражениями (2.10)–(2.13), в которых всюду следует заменить L на x . В частности, мы получаем

$$\begin{aligned} \Psi^\dagger(x)\Psi(x) &= -\frac{d}{dx} A^{(1)}[0] = \frac{1}{i\varkappa} \frac{d}{dx} \lim_{u \rightarrow \infty} u(A^{(1)}(u) - 1), \\ \Psi^\dagger(x) &= i\sqrt{\varkappa} B_{(\text{R})}^{(1)}[0] = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \lim_{u \rightarrow -i\infty} e^{-iux} u B^{(1)}(u), \\ \Psi(x) &= i\sqrt{\varkappa} C_{(\text{R})}^{(1)}[0] = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \lim_{u \rightarrow +i\infty} u C^{(1)}(u). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Таким образом, мы вновь свели проблему вычисления локальных операторов к вычислению формфакторов парциальных нулевых мод.

3. Формфакторы локальных операторов

3.1. Формфактор оператора $\Psi^\dagger(x)\Psi(x)$. Поскольку определение парциальной нулевой моды $A^{(1)}[0]$ никак не изменилось по сравнению с тем, которое рассматривалось ранее в лекциях 12 и 13, мы сразу можем написать формулу (13.3.27) для соответствующего формфактора. Нам остается только подставить конкретные функции в это выражение. В модели квантового нелинейного уравнения Шрёдингера при выбранной нормировке L -оператора имеем

$$a(u) = 1, \quad d(u) = e^{iLu}, \quad r(u) = e^{-iLu}, \quad \ell(u) = e^{-ixu}. \quad (3.1)$$

Отсюда находим, что $a[0] = 0$.

Твистованные уравнения Бете при параметрах твиста $\kappa_1 = e^{\beta_1}$ и $\kappa_2 = 1$ имеют вид

$$e^{-iLv_j} = e^{-\beta_1} \frac{f(v_j, \bar{v}_j)}{f(\bar{v}_j, v_j)}. \quad (3.2)$$

Мы видим, что зависимость параметров v_j от β_1 очень простая: $v_j = u_j - i\beta_1/L$, где параметры u_j решают обычные уравнения Бете. Отсюда получаем

$$\frac{d}{d\beta_1} \ln \ell(v_j) = -\frac{x}{L}. \quad (3.3)$$

Таким образом, если $\bar{v} \neq \bar{u}$, то с учетом первого равенства (2.14) мы имеем

$$\langle 0 | \mathbf{C}(\bar{v}) \Psi^\dagger(x) \Psi(x) \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle = -i \mathcal{P}_{11}(\bar{u}; \bar{v}) e^{ix \mathcal{P}_{11}(\bar{u}; \bar{v})} \mathfrak{F}_n^{(11)}(\bar{v} | \bar{u}), \quad (3.4)$$

где

$$\mathcal{P}_{11}(\bar{u}; \bar{v}) = \sum_{i=1}^n (u_i - v_i). \quad (3.5)$$

Если же $\bar{v} = \bar{u}$, то

$$\langle 0 | \mathbf{C}(\bar{u}) \Psi^\dagger(x) \Psi(x) \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle = \frac{n}{L} \langle 0 | \mathbf{C}(\bar{u}) \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle, \quad (3.6)$$

где $n = \#\bar{u}$.

4. Формфакторы полей $\Psi(x)$ и $\Psi^\dagger(x)$

Согласно формулам (2.14), для вычисления формфакторов полей $\Psi(x)$ и $\Psi^\dagger(x)$ необходимо вычислить формфакторы парциальных нулевых мод $C_{(\mathbb{R})}^{(1)}[0]$ и $B_{(\mathbb{R})}^{(1)}[0]$. Рассмотрим пример первого из этих двух операторов

$$M_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u}) = \langle 0 | \mathbf{C}(\bar{v}) C_{(\mathbb{R})}^{(1)}[0] \mathbf{B}(\bar{u}) | 0 \rangle. \quad (4.1)$$

Напомним, что здесь оба вектора являются on-shell. Подставляя для них выражения через парциальные, получаем

$$M_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u}) = \sum_{\substack{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\} \\ \bar{v} \rightarrow \{\bar{v}_I, \bar{v}_{II}\}}} \frac{\ell(\bar{v}_{II})}{\ell(\bar{u}_I)} f(\bar{v}_I, \bar{v}_{II}) f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II}) \langle 0 |^{(1)} \mathbf{C}^{(1)}(\bar{v}_I) C^{(1)}[0] \mathbf{B}^{(1)}(\bar{u}_I) | 0 \rangle^{(1)} \times \langle 0 |^{(2)} \mathbf{C}^{(2)}(\bar{v}_{II}) \mathbf{B}^{(2)}(\bar{u}_{II}) | 0 \rangle^{(2)}. \quad (4.2)$$

Действие оператора $C_{(\mathbb{R})}^{(1)}[0]$ на дуальный вектор дается формулой

$$\langle 0 |^{(1)} \mathbf{C}^{(1)}(\bar{v}_I) C_{(\mathbb{R})}^{(1)}[0] = \lim_{w \rightarrow +i\infty} \frac{w}{c} \langle 0 |^{(1)} \mathbf{C}^{(1)}(\bar{v}_I) C^{(1)}(w) = \lim_{w \rightarrow +i\infty} \frac{w}{c} e^{iwx} \langle 0 |^{(1)} \mathbf{C}^{(1)}(\bar{v}_I) \mathbf{C}^{(1)}(w). \quad (4.3)$$

Собственно говоря, основное отличие от случая, рассмотренного в предыдущей лекции, заключается именно в формуле (4.3). Напомним, что $\mathbf{C}^{(1)}(w) = C^{(1)}(w)/d^{(1)}(w)$. Ранее мы рассматривали модели, в которых функция $d^{(1)}(w)$ стремилась к единице при $w \rightarrow \infty$. Поэтому действие операторов $\mathbf{C}^{(1)}(w)$ и $C^{(1)}(w)$ на дуальные векторы в этом пределе было одинаковым. Теперь же $d^{(1)}(w) = e^{iwx}$, поэтому мы должны учесть этот множитель при замене $C^{(1)}(w)$ на $\mathbf{C}^{(1)}(w)$. Кроме того, нужно учитывать, что теперь предел $w \rightarrow \infty$ вычисляется по конкретному лучу, а именно $w \rightarrow +i\infty$. Однако, несмотря на эти отличия, мы по-прежнему сводим матричный элемент парциальной нулевой моды $C_{(\mathbb{R})}^{(1)}[0]$ к сумме скалярных произведений парциальных векторов Бете:

$$M_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u}) = \lim_{w \rightarrow +i\infty} \frac{w}{c} e^{iwx} \sum_{\substack{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\} \\ \bar{v} \rightarrow \{\bar{v}_I, \bar{v}_{II}\}}} \frac{\ell(\bar{v}_{II})}{\ell(\bar{u}_I)} f(\bar{v}_I, \bar{v}_{II}) f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II}) S_{n_I}^{(1)}(\{\bar{v}_I, w\} | \bar{u}_I) S_{n_{II}}^{(2)}(\bar{v}_{II} | \bar{u}_{II}). \quad (4.4)$$

Как и прежде, введем набор переменных $\bar{\eta} = \{\bar{v}, w\}$. Тогда формулу (4.4) можно переписать в виде:

$$M_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u}) = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{w}{c} e^{iwx} \sum_{\substack{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\} \\ \bar{\eta} \rightarrow \{\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}\} \\ w \in \bar{\eta}_I}} \frac{\ell(\bar{\eta}_{II})}{\ell(\bar{u}_I)} f(\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}) f(\bar{u}_I, \bar{u}_{II}) S_{n_I}^{(1)}(\bar{\eta}_I | \bar{u}_I) S_{n_{II}}^{(2)}(\bar{\eta}_{II} | \bar{u}_{II}), \quad (4.5)$$

где сумма берется по разбиениям с дополнительным ограничением $w \in \bar{\eta}_I$. Дальнейшие вычисления полностью повторяют сделанные ранее в разделе 13.4, и в конечном итоге мы приходим к следующему результату:

$$M_n^{(21)}(\bar{v}; \bar{u}) = \lim_{w \rightarrow +i\infty} \frac{w}{c} e^{iwx} \left(\frac{\ell(\bar{\eta})}{\ell(\bar{u})} - 1 \right) \Omega_1(\bar{\eta}|\bar{u}), \quad (4.6)$$

где

$$\Omega_1(\bar{\eta}|\bar{u}) = \sum_{\substack{\bar{u}_I \rightarrow \{\bar{u}_I, \bar{u}_{II}\} \\ \bar{\eta}_I \rightarrow \{\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}\} \\ w \in \bar{\eta}_I}} K_{n_I}(\bar{u}_I|\bar{\eta}_I) K_{n_{II}}(\bar{\eta}_{II}|\bar{u}_{II}) f(\bar{\eta}_I, \bar{\eta}_{II}) f(\bar{u}_{II}, \bar{u}_I). \quad (4.7)$$

Нам остается вычислить предел $w \rightarrow +i\infty$. Очевидно, что

$$\lim_{w \rightarrow +i\infty} e^{iwx} \left(\frac{\ell(\bar{\eta})}{\ell(\bar{u})} - 1 \right) = \frac{\ell(\bar{v})}{\ell(\bar{u})} = e^{ix\mathcal{P}_{21}(\bar{u}; \bar{v})}, \quad (4.8)$$

где

$$\mathcal{P}_{21}(\bar{u}; \bar{v}) = \sum_{i=1}^n u_i - \sum_{i=1}^{n-1} v_i. \quad (4.9)$$

Оставшийся предел мы уже вычисляли

$$\lim_{w \rightarrow +i\infty} \frac{w}{c} \Omega_1(\bar{\eta}|\bar{u}) = \mathfrak{F}^{(21)}(\bar{v}; \bar{u}), \quad (4.10)$$

поскольку $\Omega_1(\bar{\eta}|\bar{u})$ является рациональной функцией w и, следовательно, предел не зависит от того, по какому лучу w стремится к бесконечности. Окончательно, с учетом (2.14), получаем

$$\langle 0|C(\bar{v}) \Psi(x) B(\bar{u})|0\rangle = i\sqrt{\varkappa} e^{ix\mathcal{P}_{21}(\bar{u}; \bar{v})} \mathfrak{F}_n^{(21)}(\bar{v}|\bar{u}). \quad (4.11)$$

Формфактор поля $\Psi^\dagger(x)$ вычисляется полностью аналогично. Нетрудно догадаться, что окончательный ответ имеет вид

$$\langle 0|C(\bar{v}) \Psi^\dagger(x) B(\bar{u})|0\rangle = i\sqrt{\varkappa} e^{ix\mathcal{P}_{12}(\bar{u}; \bar{v})} \mathfrak{F}_n^{(12)}(\bar{v}|\bar{u}), \quad (4.12)$$

где теперь

$$\mathcal{P}_{12}(\bar{u}; \bar{v}) = \sum_{i=1}^n u_i - \sum_{i=1}^{n+1} v_i. \quad (4.13)$$

Подведем итоги. Мы видели, что определение нулевых мод некоторых операторов в модели квантового нелинейного уравнения Шрёдингера отличается (и весьма значительно) от определения нулевых мод в моделях, в которых матрица монодромии стремится к единичному оператору при бесконечном значении ее аргумента. Тем не менее эти различия никак не сказываются на основном вычислении — суммировании по разбиениям. Именно по этой причине мы и не приводили подробности этих вычислений. Отличия в определениях нулевых мод сказываются только на завершающей стадии, когда требуется взять предел.

5. Интегралы от осциллирующих функций

Рассмотрим простейший пример интеграла от быстро осциллирующей функции по конечному отрезку

$$J_1(u) = \int_0^L e^{iu x} \Phi(x) dx. \quad (5.1)$$

Будем считать, что параметр u веществен и достаточно велик, а функция $\Phi(x)$ голоморфна в некоторой области, содержащей отрезок $[0, L]$. Интегрируя дважды по частям, получаем

$$J_1(u) = \frac{\Phi(L)}{iu} e^{iLu} - \frac{\Phi(0)}{iu} - \frac{\Phi'(L)}{(iu)^2} e^{iLu} + \frac{\Phi'(0)}{(iu)^2} + \frac{1}{(iu)^2} \int_0^L e^{iux} \Phi''(x) dx. \quad (5.2)$$

Ясно, что

$$\left| \int_0^L e^{iux} \Phi''(x) dx \right| \leq \int_0^L |\Phi''(x)| dx \leq L \max_{x \in [0, L]} |\Phi''(x)|. \quad (5.3)$$

Поэтому

$$J_1(u) = \frac{\Phi(L)}{iu} e^{iLu} - \frac{\Phi(0)}{iu} + O(u^{-2}). \quad (5.4)$$

Понятно, что процесс интегрирования по частям может быть продолжен для получения более точной оценки. При этом асимптотика выражается через значения функции $\Phi(x)$ и ее производных на концах интервала. Понять это можно следующим образом. При больших u вклады от интегралов по полупериоду $[x, x + \frac{\pi i}{u}]$ почти полностью компенсируются вкладами от интегралов по соседним полупериодам, поскольку функция $\Phi(x)$ не успевает сколько-нибудь значительно измениться на столь малых интервалах. Отсутствие компенсации возможно лишь на концах отрезка $[0, L]$, что и отражает асимптотическая формула.

Таким образом, интеграл от осциллирующей функции вида (5.1) ведет себя по крайней мере как u^{-1} при $u \rightarrow \infty$. Понятно также, что m -кратный интеграл вида

$$J_m(u) = \int_0^L \prod_{j=1}^m e^{iux_j} \Phi(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \quad (5.5)$$

должен вести себя как u^{-m} , поскольку интегрирование по каждой переменной должно давать вклад u^{-1} . Это, однако, справедливо при условии, если функция $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ не имеет особенностей в области интегрирования. В некоторых случаях ситуация слегка усложняется. Рассмотрим пример двойного интеграла

$$J_2 = \varkappa \int_0^L e^{iu(x_2-x_1)} \theta(x_2-x_1) \Phi(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (5.6)$$

в котором функция $\Phi(x_1, x_2)$ является гладкой в квадрате $[0, L] \times [0, L]$. Функция Хэвисайда $\theta(x_2-x_1)$ вырезает из области интегрирования подобласть $x_2 > x_1$. Именно такого сорта интегралы возникают в выражениях для матричных элементов матрицы монодромии через бозонные поля.

Интегрируя по частям по x_2 , получаем

$$J_2(u) = \frac{\varkappa}{iu} \left[e^{iuL} \int_0^L e^{-iux_1} \Phi(x_1, L) dx_1 - \int_0^L e^{iu(x_2-x_1)} \left(\delta(x_2-x_1) \Phi + \theta(x_2-x_1) \partial_{x_2} \Phi \right) dx_1 dx_2 \right]. \quad (5.7)$$

Интеграл по x_1 в первой строке (5.7) дает дополнительный множитель u^{-1} , поэтому этот член ведет себя как u^{-2} . Однако во второй строке (5.7) имеется интеграл, содержащий $\delta(x_2-x_1)$. Эта δ -функция уничтожает осциллирующую экспоненту, поэтому мы получаем

$$J_2(u) = -\frac{\varkappa}{iu} \int_0^L \Phi(x, x) dx + O(u^{-2}). \quad (5.8)$$

²Если функция $\Phi(x)$ обращается в нуль на концах интервала, то интеграл (5.1) убывает быстрее, чем u^{-1} .

Таким образом, несмотря на то что величина $J_2(u)$ задана в виде двойного интеграла от осциллирующей функции, она ведет себя как u^{-1} . Причина такого поведения заключается в наличии неаналитической функции $\theta(x_2 - x_1)$ в исходном интеграле.

В то же время тройные интегралы по области $x_3 > x_2 > x_1$ ведут себя уже как u^{-2} . Рассмотрим пример такого интеграла, который возникает в разложении оператора $C(u)$:

$$J_3(u) = i\kappa^{3/2} e^{iuL} \int_0^L e^{iu(x_2-x_1-x_3)} \theta(x_3-x_2) \theta(x_2-x_1) \Phi(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (5.9)$$

Здесь функция $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ является гладкой в области интегрирования. Интегрируя по частям по x_3 , получаем

$$J_3(u) = -\frac{\kappa^{3/2} e^{iuL}}{u} \left[e^{-iuL} \int_0^L e^{iu(x_2-x_1)} \theta(x_2-x_1) \Phi(x_1, x_2, L) dx_1 dx_2 - \int_0^L e^{iu(x_2-x_1-x_3)} \theta(x_2-x_1) \left(\delta(x_3-x_2) \Phi + \theta(x_3-x_2) \partial_{x_3} \Phi \right) dx_1 dx_2 dx_3 \right]. \quad (5.10)$$

Видно, что даже член с δ -функцией не уничтожает полностью осциллирующую экспоненту, поэтому оставшиеся интегралы дают по крайней мере еще один дополнительный множитель u^{-1} . Поэтому $J_3(u)$ ведет себя по крайней мере как u^{-2} . Ясно также, что интегралы более высокой кратности заведомо убывают быстрее, чем u^{-1} .

Лекция 15. Корреляционные функции

В этой лекции мы познакомимся с тем, как полученные ранее результаты можно применять для вычисления корреляционных функций. В этой области многие вопросы до сих пор остаются открытыми.

Методы вычисления корреляционных функций довольно разнообразны. Зачастую применимость того или иного метода зависит не только от конкретной модели, но и от конкретной корреляционной функции. Мы рассмотрим пример производящего функционала, который позволяет вычислить двухточечный коррелятор третьих компонент спинов в XXZ цепочке Гейзенберга при нулевой температуре. В специальном пределе данный производящий функционал дает еще одну корреляционную функцию, которая носит название вероятности образования пустоты. Мы будем использовать метод разложения по формфакторам, хотя в данном конкретном примере можно прибегнуть и к чисто алгебраическим методам. Однако подход, описанный в этой лекции, позволяет явно продемонстрировать всю пользу детерминантных представлений для скалярных произведений векторов Бете, а также преимущества твистованных уравнений Бете по сравнению с обычными.

1. Определение корреляционных функций

По определению корреляционной функцией оператора \mathcal{O} называется

$$\langle \mathcal{O} \rangle_T = \frac{\text{tr} \left(\mathcal{O} e^{-\frac{H}{T}} \right)}{\text{tr} e^{-\frac{H}{T}}}. \quad (1.1)$$

Здесь H — гамильтониан системы, T — температура, а след берется по пространству состояний. Если мы выберем в качестве базиса в этом пространстве систему собственных функций гамильтониана, которые мы на время обозначим символом $|\omega_n\rangle$, то формулу (1.1) можно переписать в виде

$$\langle \mathcal{O} \rangle_T = \frac{\sum_n \langle \omega_n | \mathcal{O} | \omega_n \rangle e^{-\frac{E_n}{T}}}{\sum_n \langle \omega_n | \omega_n \rangle e^{-\frac{E_n}{T}}}, \quad (1.2)$$

где E_n — собственное значение гамильтониана, отвечающее собственной функции $|\omega_n\rangle$. В случае нулевой температуры в суммах в формуле (1.2) выживает лишь одно слагаемое, отвечающее минимальному собственному значению, т.е. среднее по основному состоянию $|\omega_0\rangle$ (в предположении, что основное состояние невырождено)

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\langle \omega_0 | \mathcal{O} | \omega_0 \rangle}{\langle \omega_0 | \omega_0 \rangle}. \quad (1.3)$$

Мы ограничимся случаем нулевой температуры. Тогда в моделях, которые решаются с помощью алгебраического анзаца Бете, корреляционные функции имеют вид среднего от оператора \mathcal{O} по нормированному собственному состоянию (on-shell вектору) $B(\bar{u})|0\rangle$

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\langle 0 | C(\bar{u}) \mathcal{O} B(\bar{u}) | 0 \rangle}{\langle 0 | C(\bar{u}) B(\bar{u}) | 0 \rangle}, \quad (1.4)$$

где \bar{u} — решение уравнений Бете, отвечающее минимальному значению энергии.

ЗАМЕЧАНИЕ. В некоторых моделях (в частности, в XXZ цепочке Гейзенберга) метод алгебраического анзаца Бете хорошо работает и для вычисления корреляционных функций при конечной температуре. Мы не затрагиваем этот вопрос в настоящих лекциях, но отсылаем интересующегося читателя к работам [23, 24, 25].

Мы уже умеем вычислять некоторые корреляционные функции, например среднее от оператора σ_k^z в XXX и XXZ цепочках, или среднее от $\Psi^\dagger(x)\Psi(x)$ в модели квантового нелинейного уравнения Шрёдингера. При этом вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ может быть произвольным on-shell вектором, а не обязательно отвечающим минимальному значению энергии. Однако наибольший интерес представляют двухточечные корреляционные функции, например $\langle\sigma_{k_1}^z \sigma_{k_2}^z\rangle$ или $\langle\Psi^\dagger(x_1)\Psi(x_2)\rangle$. Одним из эффективных способов вычисления таких функций является их разложение по полному набору промежуточных состояний. Если оператор \mathcal{O} зависит от пространственной переменной x (непрерывной или дискретной) $\mathcal{O} = \mathcal{O}(x)$, то

$$\langle\mathcal{O}(x_2)\mathcal{O}(x_1)\rangle = \sum_{\bar{v}} \frac{\langle 0|C(\bar{u}) \mathcal{O}(x_2) B(\bar{v})|0\rangle \langle 0|C(\bar{v}) \mathcal{O}(x_1) B(\bar{u})|0\rangle}{\langle 0|C(\bar{u})B(\bar{u})|0\rangle \langle 0|C(\bar{v})B(\bar{v})|0\rangle}. \quad (1.5)$$

Здесь суммирование ведется по полному набору промежуточных состояний $B(\bar{v})|0\rangle$, т. е. фактически по всевозможным решениям уравнений Бете \bar{v} . Каждое слагаемое суммы (1.5) выражено через нормы on-shell векторов и формфакторы оператора $\mathcal{O}(x)$ вида $\langle 0|C(\bar{v}) \mathcal{O}(x_k) B(\bar{u})|0\rangle$. Для всех этих объектов мы уже получили компактные представления в виде детерминантов. Именно это обстоятельство делает формулу (1.5) особенно привлекательной для компьютерных вычислений. Однако она позволяет получить и некоторые аналитические результаты, что будет продемонстрировано ниже.

Разложение (1.5) также удобно для рассмотрения корреляционных функций, зависящих от времени. Если эволюция оператора $\mathcal{O}(x)$ по времени задана стандартным образом

$$\mathcal{O}(x, t) = e^{iHt} \mathcal{O}(x) e^{-iHt}, \quad (1.6)$$

то в формфакторном разложении для корреляционной функции (1.5) просто появляются фазовые множители

$$\langle\mathcal{O}(x_2, t_2)\mathcal{O}(x_1, t_1)\rangle = \sum_{\bar{v}} e^{i(t_2-t_1)(E_u-E_v)} \frac{\langle 0|C(\bar{u}) \mathcal{O}(x_2) B(\bar{v})|0\rangle \langle 0|C(\bar{v}) \mathcal{O}(x_1) B(\bar{u})|0\rangle}{\langle 0|C(\bar{u})B(\bar{u})|0\rangle \langle 0|C(\bar{v})B(\bar{v})|0\rangle}, \quad (1.7)$$

где E_u и E_v суть энергии состояний соответственно $B(\bar{u})|0\rangle$ и $B(\bar{v})|0\rangle$.

Строго говоря, именно корреляционные функции, зависящие от времени, представляют наибольший интерес, поскольку именно они измеряются экспериментально. С точки зрения компьютерных вычислений такие разновременные корреляторы (1.7) ничуть не сложнее одновременных (1.5). Однако аналитические вычисления в этом случае встречаются с серьезными техническими трудностями, поэтому мы не будем добавлять зависимость от времени и ограничимся лишь корреляционными функциями вида (1.5). Даже в этом относительно простом случае имеется масса вопросов, которые нам предстоит решить.

2. Термодинамический предел

Подавляющее большинство результатов по корреляционным функциям получено в термодинамическом пределе. Для того чтобы определить это понятие, необходимо зафиксировать модель. Пусть это будет XXZ цепочка Гейзенберга с параметром анизотропии Δ , таким что $|\Delta| < 1$. В термодинамическом пределе число узлов цепочки N стремится к бесконечности.

ЗАМЕЧАНИЕ. Более аккуратный подход состоит в том, что число N велико, но конечно. Это тем более оправдано, так как цепочек бесконечной длины не бывает. Далее, считая N достаточно большим, необходимо все ответы для физических величин разложить в асимптотический ряд по $1/N$ и оставить только те члены, которые остаются конечными при $N \rightarrow \infty$. С формальной точки зрения это эквивалентно тому, что мы рассматриваем предел бесконечной цепочки. Однако при таком подходе мы избавляемся от многих неприятностей. Так, например, нам нет необходимости определять оператор гамильтониана, который действует в бесконечном тензорном произведении пространств \mathbb{C}^2 . Напротив, до тех пор, пока мы имеем дело с операторами, мы все время остаемся в рамках линейной алгебры. И только вычислив какой-либо матричный элемент оператора, мы рассматриваем его предел при $N \rightarrow \infty$.

В термодинамическом пределе необходимо зафиксировать состояние $B(\bar{u})|0\rangle$, по отношению к которому будут вычисляться корреляционные функции. Как уже было сказано, мы ограничимся случаем основного состояния, т. е. собственным состоянием гамильтониана, отвечающим наименьшему собственному значению энергии. Более подробно о построении основного состояния в цепочке XXZ можно ознакомиться в книгах [2, 3]. Мы же приведем без доказательства лишь окончательные результаты.

Мы рассматриваем предел большого N , поэтому будем для простоты считать это число четным, поскольку результаты для физических наблюдаемых при большой длине цепочки не должны зависеть от четности N . Тогда в модели XXZ при $|\Delta| < 1$ основное состояние $B(\bar{u})|0\rangle$ имеет нулевую третью компоненту полного спина. Это означает, что в этом состоянии $N/2$ спинов направлены вверх и $N/2$ спинов направлены вниз. Поскольку число спинов вниз равно числу n параметров u_j в векторе $B(\bar{u})|0\rangle$, мы заключаем, что $n = N/2$. При этом параметры \bar{u} , как обычно, удовлетворяют системе уравнений Бете, которую мы запишем в виде

$$\left(\frac{\text{sh}(u_j - \frac{i\zeta}{2})}{\text{sh}(u_j + \frac{i\zeta}{2})} \right)^N \prod_{k=1}^n \frac{\text{sh}(i\zeta + u_j - u_k)}{\text{sh}(i\zeta - u_j + u_k)} = (-1)^{n-1}. \quad (2.1)$$

Здесь $0 < \zeta < \pi$, причем $\cos \zeta = \Delta$. Напомним, что в рамках алгебраического анзаца Бете XXZ цепочка описывается тригонометрической R -матрицей. При задании тригонометрической R -матрицы мы обычно использовали параметр η , так что $\text{ch} \eta = \Delta$. Поскольку мы рассматриваем случай $|\Delta| < 1$, то η оказывается чисто мнимым. Поэтому удобно сделать замену переменных $i\eta = \zeta$, считая ζ вещественным параметром, лежащим в интервале $0 < \zeta < \pi$. Несложно убедиться, что при таком соглашении привычная для нас форма записи уравнений Бете

$$r(u_j) = \frac{f(u_j, \bar{u}_j)}{f(\bar{u}_j, u_j)} \quad (2.2)$$

переходит в (2.1).

Беря логарифм от обеих частей (2.1), получаем

$$N \ln \frac{\text{sh}(u_j - \frac{i\zeta}{2})}{\text{sh}(u_j + \frac{i\zeta}{2})} + \sum_{k=1}^n \ln \frac{\text{sh}(i\zeta + u_j - u_k)}{\text{sh}(i\zeta - u_j + u_k)} = 2\pi i I_j, \quad (2.3)$$

где I_j — целые или полуцелые числа, в зависимости от четности n . Основное состояние соответствует набору (полу)целых

$$I_j = j - \frac{n-1}{2}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

В этом случае $I_{j+1} - I_j = 1$. При этом корни уравнений Бете u_j оказываются действительными и заполняют вещественную ось так что¹, $u_{j+1} - u_j \sim 1/N$. В этом случае вместо дискретного набора корней естественно ввести плотность распределения

$$\rho(u_j) = \frac{1}{N(u_{j+1} - u_j)}. \quad (2.5)$$

Легко видеть, что введенный объект действительно имеет смысл плотности распределения. Действительно, вычисляя среднее от какой-либо функции $\phi(u)$ по корням уравнений Бете, имеем

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^n \phi(u_j) = \sum_{j=1}^n \phi(u_j) \frac{u_{j+1} - u_j}{N(u_{j+1} - u_j)} = \sum_{j=1}^n \phi(u_j) \rho(u_j) (u_{j+1} - u_j). \quad (2.6)$$

Последняя сумма есть не что иное, как интегральная сумма, поэтому в пределе $N \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^n \phi(u_j) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \rho(u) du, \quad N \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Таким образом, $\rho(u)$ действительно имеет смысл плотности распределения².

Из уравнений Бете (2.3) легко получить интегральное уравнение на плотность распределения. Для этого рассмотрим разность уравнений для параметров u_{j+1} и u_j . Воспользовавшись тем, что разность $u_{j+1} - u_j$ мала, заменим конечные разности на производные. Тогда с точностью до членов порядка $O(N^{-1})$

$$N(u_{j+1} - u_j) \frac{d}{du_j} \ln \frac{\text{sh}(u_j - \frac{i\zeta}{2})}{\text{sh}(u_j + \frac{i\zeta}{2})} + (u_{j+1} - u_j) \frac{d}{du_j} \sum_{k=1}^n \ln \frac{\text{sh}(i\zeta + u_j - u_k)}{\text{sh}(i\zeta - u_j + u_k)} = 2\pi i. \quad (2.8)$$

Введем функции

$$p'_0(u) = \frac{\sin \zeta}{\text{sh}(u - \frac{i\zeta}{2}) \text{sh}(u + \frac{i\zeta}{2})}, \quad \mathcal{K}(u) = \frac{\sin 2\zeta}{\text{sh}(u - i\zeta) \text{sh}(u + i\zeta)}. \quad (2.9)$$

Обозначение $p'_0(u)$ связано с тем, что в модели XXZ функция $p_0(u)$ играет роль голого импульса элементарного возбуждения. Поделив обе части равенства (2.8) на $(u_{j+1} - u_j)$, получим

$$p'_0(u_j) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n \mathcal{K}(u_j - u_k) = 2\pi \rho(u_j). \quad (2.10)$$

Остается заменить дискретную сумму на интеграл, согласно формуле (2.7):

$$\rho(u) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(u - v) \rho(v) dv = \frac{1}{2\pi} p'_0(u). \quad (2.11)$$

Мы получили линейное интегральное уравнения с интегральным оператором, действующим на всей вещественной оси, и с ядром, зависящим от разности аргументов. Такие уравнения решаются с помощью преобразования Фурье. Продемонстрируем это на примере уравнения (2.11).

¹Более точно, в пределе $N \rightarrow \infty$ корни u_j находятся на интервале $[-\frac{\zeta}{\pi} \ln N, \frac{\zeta}{\pi} \ln N]$. При этом вблизи концов интервала расстояние между соседними корнями не мало, а наоборот, порядка $\ln N$. Однако “внутри” интервала разность между соседними корнями действительно порядка $1/N$.

²По традиции в методе анзаца Бете плотность распределения нормируют не на единицу, а на среднюю плотность, которая в данном случае равна $n/N = 1/2$.

Пусть

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\lambda} \rho(u) du, \\ \hat{\mathcal{K}}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\lambda} \mathcal{K}(u) du, \\ \hat{p}'_0(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\lambda} p'_0(u) du.\end{aligned}\quad (2.12)$$

Умножая уравнение (2.11) на $e^{iu\lambda}$ и интегрируя по u , получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\lambda} \rho(u) du + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-v)\lambda} e^{iv\lambda} \mathcal{K}(u-v) \rho(v) du dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\lambda} p'_0(u) du. \quad (2.13)$$

Совершая в двойном интеграле замену переменных $u-v = u'$ и $v = v'$, немедленно находим

$$\hat{\rho}(\lambda)(1 + \hat{\mathcal{K}}(\lambda)) = \hat{p}'_0(\lambda), \quad (2.14)$$

откуда

$$\hat{\rho}(\lambda) = \frac{\hat{p}'_0(\lambda)}{1 + \hat{\mathcal{K}}(\lambda)}. \quad (2.15)$$

Таким образом, для решения уравнения (2.11) необходимо найти фурье-образы $\hat{\mathcal{K}}(\lambda)$ и $\hat{p}'_0(\lambda)$. Они легко вычисляются. Рассмотрим пример вычисления $\hat{\mathcal{K}}(\lambda)$:

$$\hat{\mathcal{K}}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iu\lambda} \sin 2\zeta}{\operatorname{sh}(u-i\zeta) \operatorname{sh}(u+i\zeta)} du. \quad (2.16)$$

Пусть Λ — некоторое положительное число. Построим контур Γ , который является прямоугольником с вершинами в точках $-\Lambda$, Λ , $\Lambda + i\pi$ и $-\Lambda + i\pi$. Рассмотрим интеграл в положительном направлении по этому контуру

$$J(\lambda, \Lambda) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{e^{iu\lambda} \sin 2\zeta}{\operatorname{sh}(u-i\zeta) \operatorname{sh}(u+i\zeta)} du. \quad (2.17)$$

Поскольку подынтегральная функция экспоненциально убывает при $u \rightarrow \infty$, интегралы по вертикальным отрезкам $[\Lambda, \Lambda + i\pi]$ и $[-\Lambda + i\pi, -\Lambda]$ стремятся к нулю при $\Lambda \rightarrow \infty$. В том же пределе интеграл по отрезку $[-\Lambda, \Lambda]$ стремится к $\hat{\mathcal{K}}(\lambda)$. Наконец, в силу $\operatorname{sh}(u) = -\operatorname{sh}(u + i\pi)$ интеграл по отрезку $[\Lambda + i\pi, -\Lambda + i\pi]$ сводится к интегралу по отрезку $[-\Lambda, \Lambda]$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Lambda+i\pi}^{-\Lambda+i\pi} \frac{e^{iu\lambda} \sin 2\zeta}{\operatorname{sh}(u-i\zeta) \operatorname{sh}(u+i\zeta)} du = -e^{-\pi\lambda} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{e^{iu\lambda} \sin 2\zeta}{\operatorname{sh}(u-i\zeta) \operatorname{sh}(u+i\zeta)} du. \quad (2.18)$$

Следовательно,

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} J(\lambda, \Lambda) = (1 - e^{-\pi\lambda}) \hat{\mathcal{K}}(\lambda), \quad (2.19)$$

а интеграл по замкнутому контуру Γ равен сумме вычетов внутри контура

$$\hat{\mathcal{K}}(\lambda) (1 - e^{-\pi\lambda}) = i \operatorname{Res} \left. \frac{e^{iu\lambda} \sin 2\zeta}{\operatorname{sh}(u-i\zeta) \operatorname{sh}(u+i\zeta)} \right|_{\substack{u=i\zeta \\ u=i\pi-i\zeta}} = e^{-\zeta\lambda} - e^{-(\pi-\zeta)\lambda}. \quad (2.20)$$

Отсюда находим

$$\hat{\mathcal{K}}(\lambda) = \frac{\operatorname{sh} \lambda \left(\frac{\pi}{2} - \zeta \right)}{\operatorname{sh} \frac{\pi\lambda}{2}}. \quad (2.21)$$

Аналогично вычисляем

$$\hat{p}'_0(\lambda) = \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda}{2}(\pi - \zeta)}{\operatorname{sh} \frac{\pi\lambda}{2}}, \quad (2.22)$$

и тогда в силу равенства (2.15)

$$\hat{\rho}(\lambda) = \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\zeta\lambda}{2}}. \quad (2.23)$$

Совершая обратное преобразование Фурье, получаем окончательно

$$\rho(u) = \frac{1}{2\zeta \operatorname{ch} \frac{\pi u}{\zeta}}. \quad (2.24)$$

2.1. Резольвента интегрального оператора. Введем ядро резольвенты $\mathcal{R}(u - v)$ с помощью интегрального уравнения

$$\mathcal{R}(u - v) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(u - w) \mathcal{R}(w - v) dw = \frac{1}{2\pi} \mathcal{K}(u - v). \quad (2.25)$$

Оператор $\delta(u - v) - \mathcal{R}(u - v)$ является обратным к оператору $\delta(u - v) + \frac{1}{2\pi} \mathcal{K}(u - v)$, следовательно,

$$p'_0(u) - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(u - v) p'_0(v) dv = 2\pi \rho(u). \quad (2.26)$$

Фурье-образ ядра $\mathcal{R}(u)$ выражается через фурье-образ ядра $\mathcal{K}(u)$ по формуле

$$1 - \hat{\mathcal{R}}(\lambda) = \frac{1}{1 + \hat{\mathcal{K}}(\lambda)}, \quad (2.27)$$

Зная явное выражение для $\hat{\mathcal{K}}(\lambda)$, мы легко получаем

$$\hat{\mathcal{R}}(\lambda) = \frac{\hat{\mathcal{K}}(\lambda)}{1 + \hat{\mathcal{K}}(\lambda)} = \frac{\operatorname{sh} \lambda(\frac{\pi}{2} - \zeta)}{2 \operatorname{ch} \frac{\zeta\lambda}{2} \operatorname{sh} \lambda(\frac{\pi - \zeta}{2})}. \quad (2.28)$$

Теперь, для того чтобы найти явную формулу для $\mathcal{R}(u - v)$, достаточно сделать обратное преобразование Фурье. Однако ответ может быть выражен через элементарные функции только в случае, если $\pi/\zeta = q/p$, где q и p — целые числа.

Приведем еще одно интегральное соотношение, которое потребуется нам при вычислении корреляционных функций. Поскольку³

$$p'_0(u) = -\frac{1}{\sin \zeta} t(u, -\frac{i\zeta}{2}), \quad (2.29)$$

уравнение (2.26) можно переписать в виде

$$t(u, -\frac{i\zeta}{2}) - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(u - v) t(v, -\frac{i\zeta}{2}) dv = -2\pi \sin \zeta \rho(u). \quad (2.30)$$

Сдвигая в этом уравнении переменную u на некоторую величину w , получаем

$$t(u - w, -\frac{i\zeta}{2}) - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(u - v) t(v - w, -\frac{i\zeta}{2}) dv = -2\pi \sin \zeta \rho(u - w). \quad (2.31)$$

Такое преобразование возможно, так как ядро интегрального оператора $\mathcal{R}(u - v)$ зависит от разности аргументов и действует на всей вещественной оси. Сдвиг w может быть и мнимым, но в этом случае необходимо соблюдать условие $-\frac{\zeta}{2} < \operatorname{Im}(w) < \frac{\zeta}{2}$. Это связано с тем, что при сдвиге аргумента u мы не должны пересекать полюсы функции $t(u, -\frac{i\zeta}{2})$.

³Мы напоминаем определение функции $t(u, v)$ в формуле (3.1) на странице 163.

Воспользовавшись тем, что $t(u - w, -\frac{i\zeta}{2}) = t(u, w - \frac{i\zeta}{2})$, и полагая $w - \frac{i\zeta}{2} = z$ с условием $-\zeta < \text{Im}(z) < 0$, мы получаем

$$t(u, z) - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(u - v)t(v, z) dv = -2\pi \sin \zeta \rho(u - z - \frac{i\zeta}{2}) = \frac{-i\pi \sin \zeta}{\zeta \text{sh} \frac{\pi}{\zeta}(u - z)}. \quad (2.32)$$

Этим уравнением мы воспользуемся ниже, при вычислении термодинамического предела корреляционных функций.

3. Решения твистованных уравнений Бете

3.1. Предварительные замечания. Рассматривая модель XXZ , мы постоянно имеем дело с гиперболическими функциями, которые обладают свойством периодичности. Так, например, уравнения Бете (2.1) $i\pi$ -периодичны по любой переменной u_j . Решения, которые отличаются друг от друга только сдвигом одного или нескольких u_j на $i\pi$, описывают один и тот же on-shell вектор, поэтому естественно не делать различия между такими решениями. Дабы избежать неоднозначности, связанной с периодичностью, мы будем считать, что мнимая часть параметров u_j лежит в полосе $-\pi/2 < \text{Im}(u_j) \leq \pi/2$. Договоримся также, что аналогичное условие будет выполнено и для других аргументов гиперболических функций, которые встретятся нам в дальнейшем (например, параметры неоднородностей или решения твистованных уравнений Бете).

Мы будем по-прежнему использовать стандартные функции $g(u, v)$, $f(u, v)$, $h(u, v)$ и $t(u, v)$, однако в некоторых случаях мы будем записывать их в явном виде:

$$\begin{aligned} g(u, v) &= \frac{-i \sin \zeta}{\text{sh}(u - v)}, & f(u, v) &= \frac{\text{sh}(u - v - i\zeta)}{\text{sh}(u - v)}, \\ h(u, v) &= \frac{\text{sh}(u - v - i\zeta)}{-i \sin \zeta}, & t(u, v) &= \frac{-\sin^2 \zeta}{\text{sh}(u - v) \text{sh}(u - v - i\zeta)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Там, где это не вызывает недоразумений, мы также будем использовать соглашение о сокращенных обозначениях для произведений. Однако в ряде случаев нам придется отказаться от этой формы записи и выписывать все произведения явно.

3.2. Неоднородная модель. Как уже отмечалось, суммируя формфакторы по промежуточным состояниям, нам фактически приходится вычислять суммы по решениям уравнений Бете. При этом нам нужно решить две проблемы. Во-первых, нам следует убедиться в том, что корни уравнений Бете действительно параметризуют полный набор промежуточных состояний. Во-вторых, нам нужно отсеять лишние решения, поскольку, как мы уже видели, не каждому решению уравнений Бете соответствует собственный вектор трансфер-матрицы.

Для решения этих задач удобно рассмотреть неоднородную XXZ цепочку⁴ с параметрами неоднородностей ξ_1, \dots, ξ_N . Тогда

$$a(u) = \prod_{j=1}^N \text{sh}(u - \xi_j - i\zeta), \quad d(u) = \prod_{j=1}^N \text{sh}(u - \xi_j), \quad r(u) = \prod_{j=1}^N \frac{\text{sh}(u - \xi_j - i\zeta)}{\text{sh}(u - \xi_j)}. \quad (3.2)$$

⁴Конечно, в такой модели отсутствует понятие основного состояния, потому что собственные значения гамильтониана, вообще говоря, не являются вещественными и, следовательно, среди них нет минимального. Однако по определенному моменту мы будем рассматривать средние значения операторов по произвольному on-shell вектору и лишь на заключительной стадии перейдем к однородному пределу. Только тогда мы потребуем, чтобы рассматриваемый on-shell вектор был основным состоянием гамильтониана.

В конечном итоге нас будет интересовать однородный предел $\xi_k \rightarrow -i\zeta/2$, однако на начальном этапе полезно считать все ξ_k различными. Тем не менее мы с самого начала можем потребовать, чтобы ξ_k находились в небольшой окрестности точки $-i\zeta/2$, так что $\xi_j - \xi_k \pm i\zeta \neq 0$ для всех j и k .

Вместо обычных уравнений Бете мы будем рассматривать их твистованную версию. Действительно, в формуле (1.5) мы не обязаны суммировать по базису собственных состояний гамильтониана, а вместо этого можем вставить любую другую полную систему векторов⁵. В частности, это могут быть твистованные on-shell векторы. Как мы увидим, именно для системы твистованных on-shell векторов удастся легко доказать полноту, в то время как с доказательством полноты системы обычных on-shell векторов имеются серьезные проблемы.

Напомним, что собственное значение $\tau_\kappa(x|\bar{y})$ твистованной трансфер-матрицы $\mathcal{T}_\kappa(x)$ на твистованном on-shell векторе $B(\bar{y})|0\rangle$ имеет вид

$$\tau_\kappa(x|\bar{y}) = a(x)f(\bar{y}, x) + \kappa d(x)f(x, \bar{y}). \quad (3.3)$$

Введем новую функцию

$$Y_\kappa(x|\bar{y}) = \frac{\tau_\kappa(x|\bar{y})}{g(x, \bar{y})} = (-1)^n a(x)h(\bar{y}, x) + \kappa d(x)h(x, \bar{y}). \quad (3.4)$$

Тогда твистованные уравнения Бете можно записать в виде

$$Y_\kappa(v_j|\bar{v}) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.5)$$

или же более подробно

$$\prod_{k=1}^N \text{sh}(v_j - \xi_k - i\zeta) \prod_{\ell=1}^n \text{sh}(v_\ell - v_j - i\zeta) = \kappa \prod_{k=1}^N \text{sh}(v_j - \xi_k) \prod_{\ell=1}^n \text{sh}(v_\ell - v_j + i\zeta), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Напомним, что согласно результатам работы [9] собственные векторы твистованной трансфер-матрицы соответствуют таким решениям системы (3.6), в которых все параметры v_j попарно различны и для всех $j = 1, \dots, n$ обе части уравнений не обращаются в нуль (допустимые решения). К лишним (недопустимым) решениям, таким образом, относятся такие, при которых хотя бы для одного j обе части уравнения (3.6) зануляются. Несложно описать такие решения. Если, например, $v_1 = \xi_s$ и $v_2 = \xi_s + i\zeta$ для любого $s = 1, \dots, N$, то уравнения для $j = 1, 2$ заведомо выполнены, причем обе части равны нулю.

Другой тип недопустимого решения возникает при специальных значениях параметра $\zeta = \pi r/q$, где p и q — натуральные числа, причем $p < q$ и $q \leq n$. Легко проверить, что в этом случае подмножество параметров v_1, \dots, v_q , таких что $v_j = w + i\zeta(j-1)$, удовлетворяет уравнениям с $j = 1, \dots, q$, причем опять обе части этих уравнений обращаются в нуль. Замечательно, что константа w никак не фиксирована и, таким образом, подобные решения не изолированы друг от друга.

Ниже мы увидим, что при суммировании формфакторов описанные выше недопустимые решения автоматически отсекаются. Перейдем теперь к вопросу о полноте системы промежуточных состояний. Если обе части уравнений Бете не обращаются в нуль, то корни системы (3.6)

⁵Этот аргумент не работает для разновременных корреляционных функций. Однако в этом случае можно так деформировать исходный гамильтониан, чтобы сделать твистованные on-shell векторы его собственными состояниями (см. [22]).

зависят от параметра κ , т. е. $v_j = v_j(\kappa)$. Поэтому мы можем трактовать твистованные уравнения Бете как задание неявных функций $v_j(\kappa)$. При $\kappa = 0$ система (3.6) превращается в

$$\prod_{k=1}^N \text{sh}(v_j - \xi_k - i\zeta) \prod_{\ell=1}^n \text{sh}(v_\ell - v_j - i\zeta) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

и имеет очевидные допустимые решения $v_j = \xi_{s_j} + i\zeta$, где ξ_{s_j} — произвольное из набора $\bar{\xi}$. Всего, таким образом, существует $\binom{N}{n}$ наборов корней $\bar{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$, состоящих из попарно различных чисел. То есть количество решений уравнений Бете при $\kappa = 0$ совпадает с размерностью подпространства, в котором n спинов направлено вниз и $N - n$ спинов направлено вверх.

Матрица первых производных системы (3.7) в точке $v_j = \xi_{s_j} + i\zeta$ ($j = 1, \dots, n$) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial v_m} \prod_{k=1}^N \text{sh}(v_j - \xi_k - i\zeta) \prod_{\ell=1}^n \text{sh}(v_\ell - v_j - i\zeta) = \delta_{jm} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq s_j}}^N \text{sh}(\xi_{s_j} - \xi_k) \prod_{\ell=1}^n \text{sh}(\xi_{s_\ell} - \xi_{s_j} - i\zeta). \quad (3.8)$$

Очевидно, что якобиан системы невырожден. Именно для этого мы рассматривали неоднородную модель и налагали условие $\xi_j - \xi_k \pm i\zeta \neq 0$. Тогда выполнены все условия теоремы о неявной функции, и мы можем сформулировать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Существует такое число $\kappa_0 > 0$, что при $|\kappa| < \kappa_0$ система (3.6) имеет решения $v_j = v_j(\kappa)$, причем $v_j(\kappa)$ являются аналитическими функциями κ , такими что $v_j(0) = \xi_{s_j} + i\zeta$.*

Таким образом, при достаточно малых $|\kappa|$ система (3.6) имеет ровно $\binom{N}{n}$ допустимых решений. Мы знаем к тому же, что твистованные on-shell векторы Бете, построенные по этим решениям, попарно ортогональны. Следовательно, система этих векторов образует базис в подпространстве состояний с n спинами вниз и $N - n$ спинами вверх.

В случае однородной цепочки $\xi_k = -i\zeta/2$ якобиан твистованной системы уравнений Бете при $\kappa = 0$ становится вырожденным, и теорема о неявной функции становится неприменимой в своей классической формулировке. Однако существует множество обобщений этой теоремы, которые позволяют рассматривать и этот случай. Тогда утверждение о существовании необходимого количества допустимых решений делается для выколотой окрестности $0 < |\kappa| < \kappa_0$. Таким образом, условие неоднородности цепочки не является принципиальным, а лишь облегчает доказательство полноты системы твистованных on-shell векторов. Более существенным является наличие параметра твиста κ . Теорема о неявной функции ничего не говорит о величине окрестности $|\kappa| < \kappa_0$, и мы не можем утверждать, что корни $v_j(\kappa)$ могут быть аналитически продолжены в точку $\kappa = 1$. Следовательно, из полноты допустимых решений твистованных уравнений Бете еще не следует полнота допустимых решений обычной системы уравнений Бете. Более того, мы уже видели, что при $\kappa = 1$ возможен такой эффект, как совпадение одного из допустимых решений с недопустимым, что еще более осложняет задачу.

Невозможность достичь значения $\kappa = 1$ может показаться серьезным препятствием. Действительно, в большинстве примеров, в которых мы использовали твистованные on-shell векторы, в конечном итоге для получения окончательного результата необходимо было брать производную по κ именно в точке $\kappa = 1$. Ниже мы увидим, как обходится это препятствие.

4. Производящий функционал

В качестве примера мы рассмотрим двухточечную корреляционную функцию третьих компонент спина

$$S_{zz}(m) = \frac{\langle 0|C(\bar{u}) \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z B(\bar{u})|0\rangle}{\langle 0|C(\bar{u})B(\bar{u})|0\rangle}, \quad (4.1)$$

где вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ является on-shell. Мы будем считать, что в однородном пределе $\xi_k = -i\zeta/2$ этот вектор переходит в основное состояние гамильтониана XXZ цепочки. Однако до поры до времени мы никак не конкретизируем корни уравнений Бете \bar{u} .

Как и в случае вычисления формфакторов, вместо корреляционной функции (4.1) удобнее иметь дело со специальным производящим функционалом. Для этого введем оператор

$$\mathcal{Q}_{1,m}^{(\kappa)} = \prod_{k=1}^m e^{\frac{\beta}{2}(1-\sigma_k^z)}, \quad e^\beta = \kappa, \quad (4.2)$$

где β — комплексный параметр, и, как обычно, мы обозначаем $e^\beta = \kappa$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Несложно проверить, что в случае XXZ цепочки оператор $\mathcal{Q}_{1,m}^{(\kappa)}$ непосредственно выражается через первую парциальную нулевую моду оператора $D(u)$: $\mathcal{Q}_{1,m}^{(\kappa)} = e^{\beta D^{(1)}[0]}$.

Оператор (4.2) имеет очень простое представление в терминах решения квантовой обратной задачи. Действительно, легко видеть, что

$$\left(\frac{1-\sigma_k^z}{2}\right)^p = \frac{1-\sigma_k^z}{2}, \quad p > 0. \quad (4.3)$$

Следовательно,

$$e^{\frac{\beta}{2}(1-\sigma_k^z)} = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta^p}{p!} \frac{1-\sigma_k^z}{2} = 1 + (e^\beta - 1) \frac{1-\sigma_k^z}{2}. \quad (4.4)$$

В терминах элементарных единиц $E_k^{11} = \frac{1+\sigma_k^z}{2}$ и $E_k^{22} = \frac{1-\sigma_k^z}{2}$ равенство (4.4) приобретает вид

$$e^{\frac{\beta}{2}(1-\sigma_k^z)} = E_k^{11} + \kappa E_k^{22}. \quad (4.5)$$

Теперь, воспользовавшись решением квантовой обратной задачи, мы получаем

$$e^{\frac{\beta}{2}(1-\sigma_k^z)} = \prod_{j=1}^{k-1} \mathcal{T}(\xi_j) \cdot ((A(\xi_k) + \kappa D(\xi_k)) \cdot \prod_{j=1}^k \mathcal{T}^{-1}(\xi_j) = \prod_{j=1}^{k-1} \mathcal{T}(\xi_j) \cdot \mathcal{T}_\kappa(\xi_k) \cdot \prod_{j=1}^k \mathcal{T}^{-1}(\xi_j), \quad (4.6)$$

откуда

$$\mathcal{Q}_{1,m}^{(\kappa)} = \prod_{k=1}^m \mathcal{T}_\kappa(\xi_k) \prod_{k=1}^m \mathcal{T}^{-1}(\xi_k). \quad (4.7)$$

С другой стороны, имеем

$$\mathcal{Q}_{1,m+1}^{(\kappa)} - \mathcal{Q}_{1,m}^{(\kappa)} - \mathcal{Q}_{2,m+1}^{(\kappa)} + \mathcal{Q}_{2,m}^{(\kappa)} = \left(e^{\frac{\beta}{2}(1-\sigma_1^z)} - 1\right) \cdot \prod_{k=2}^m e^{\frac{\beta}{2}(1-\sigma_k^z)} \cdot \left(e^{\frac{\beta}{2}(1-\sigma_{m+1}^z)} - 1\right) \quad (4.8)$$

и, следовательно,

$$2 \frac{d^2}{d\beta^2} \left[\mathcal{Q}_{1,m+1}^{(\kappa)} - \mathcal{Q}_{1,m}^{(\kappa)} - \mathcal{Q}_{2,m+1}^{(\kappa)} + \mathcal{Q}_{2,m}^{(\kappa)} \right]_{\beta=0} = (1-\sigma_1^z)(1-\sigma_{m+1}^z). \quad (4.9)$$

Введем теперь производящий функционал

$$Q_m^{(\kappa)} = \frac{\langle 0|C(\bar{u})\mathcal{Q}_{1,m}^{(\kappa)}B(\bar{u})|0\rangle}{\langle 0|C(\bar{u})B(\bar{u})|0\rangle}. \quad (4.10)$$

Тогда из (4.9) следует, что

$$S_{zz}(m) = 2\frac{d^2}{d\beta^2} \left[Q_{m+1}^{(\kappa)} - 2Q_m^{(\kappa)} + Q_{m-1}^{(\kappa)} \right]_{\beta=0} + 2\langle \sigma^z \rangle - 1, \quad (4.11)$$

где мы учли трансляционную инвариантность функционала $Q_m^{(\kappa)}$. Величина $\langle \sigma^z \rangle$ является средним от оператора σ_k^z

$$\langle \sigma^z \rangle = \frac{\langle 0|C(\bar{u})\sigma_k^z B(\bar{u})|0\rangle}{\langle 0|C(\bar{u})B(\bar{u})|0\rangle}, \quad (4.12)$$

которая в силу трансляционной инвариантности не зависит от номера узла k и может быть получена путем дифференцирования по β разности $Q_m^{(\kappa)} - Q_{m-1}^{(\kappa)}$ в точке⁶ $\beta = 0$. Таким образом, мы связали искомую двухточечную корреляционную функцию с производящим функционалом $Q_m^{(\kappa)}$.

5. Суммирование формфакторов

Итак, нам необходимо вычислить нормированное среднее следующего вида:

$$Q_m^{(\kappa)} = \frac{\langle 0|C(\bar{u}) \prod_{k=1}^m \mathcal{T}_\kappa(\xi_k) \prod_{k=1}^m \mathcal{T}^{-1}(\xi_k) B(\bar{u})|0\rangle}{\langle 0|C(\bar{u})B(\bar{u})|0\rangle}. \quad (5.1)$$

Обратите внимание, что здесь и далее мы не пользуемся “нормированной” матрицей монодромии $\mathbf{T}(u) = T(u)/d(u)$. Это связано с тем, что нам часто придется иметь дело с такими аргументами функции $d(u)$, при которых она обращается в нуль. Поэтому формулы для скалярных произведений, приведенные ниже, отличаются от тех, которые мы получали ранее, нормировочными множителями.

Действие операторов $\mathcal{T}^{-1}(\xi_k)$ на on-shell вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ тривиально, однако действие твистованных трансфер-матриц $\mathcal{T}_\kappa(\xi_k)$ на обычные on-shell векторы более сложное. В принципе, это действие можно вычислить в относительно компактной форме (см. [21]), но мы поступим иначе. Будем считать параметр κ достаточно малым. Тогда мы знаем, что система твистованных on-shell векторов полна, и мы можем вставить эту систему векторов между произведениями операторов $\mathcal{T}_\kappa(\xi_k)$ и $\mathcal{T}^{-1}(\xi_k)$:

$$Q_m^{(\kappa)} = \sum_{\bar{v}} \frac{\langle 0|C(\bar{u}) \prod_{k=1}^m \mathcal{T}_\kappa(\xi_k) B(\bar{v})|0\rangle \langle 0|C(\bar{v}) \prod_{k=1}^m \mathcal{T}^{-1}(\xi_k) B(\bar{u})|0\rangle}{\langle 0|C(\bar{u})B(\bar{u})|0\rangle \langle 0|C(\bar{v})B(\bar{v})|0\rangle}. \quad (5.2)$$

Здесь суммирование берется по всем допустимым решениям твистованных уравнений Бете. Теперь действие операторов $\mathcal{T}_\kappa(\xi_k)$ на твистованные on-shell векторы тривиально, и мы получаем

$$Q_m^{(\kappa)} = \sum_{\bar{v}} \prod_{k=1}^m \frac{\tau_\kappa(\xi_k|\bar{v})}{\tau(\xi_k|\bar{u})} \frac{\langle 0|C(\bar{u})B(\bar{v})|0\rangle \langle 0|C(\bar{v})B(\bar{u})|0\rangle}{\langle 0|C(\bar{u})B(\bar{u})|0\rangle \langle 0|C(\bar{v})B(\bar{v})|0\rangle}. \quad (5.3)$$

⁶С помощью формул квантовой обратной задачи можно и непосредственно свести среднее $\langle \sigma^z \rangle$ к формфакторам операторов A и D . Кроме того, из симметрии основного состояния относительно перемены направлений всех спинов следует, что это среднее должно обращаться в нуль. Прямое вычисление подтверждает это. В общем случае $\langle \sigma^z \rangle = 1 - \frac{2n}{N}$.

Мы получили выражение, содержащее скалярные произведения твистованных и обычных on-shell векторов, их нормы, а также собственные значения твистованной и обычной трансфер-матрицы. Поскольку $d(\xi_k) = 0$ для любого ξ_k , мы получаем

$$\prod_{k=1}^m \frac{\tau_\kappa(\xi_k|\bar{v})}{\tau(\xi_k|\bar{u})} = \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^n \frac{f(v_j, \xi_k)}{f(u_j, \xi_k)}. \quad (5.4)$$

Что же касается всевозможных скалярных произведений в формуле (5.3), то для них мы имеем представления в виде детерминантов. Причем для скалярного произведения твистованного и обычного on-shell векторов у нас есть даже два представления (см. (11.1.9), (11.1.12)). Напомним, что это связано с тем, что при умножении твистованного и обычного on-shell векторов у нас есть выбор, какой из двух векторов считать твистованным on-shell вектором, потому что обычный on-shell вектор является частным случаем твистованного при $\kappa = 1$.

Нам потребуется обе эти формулы. Для того чтобы записать их единообразно, введем $n \times n$ матрицу Ω_κ с матричными элементами

$$(\Omega_\kappa)_{jk} = \Omega_\kappa(x_j, y_k|\bar{x}) = (-1)^{n-1} a(y_k) t(x_j, y_k) h(\bar{x}, y_k) + \kappa d(y_k) t(y_k, x_j) h(y_k, \bar{x}). \quad (5.5)$$

Эта матрица определена для любых двух наборов переменных \bar{x} и \bar{y} , таких что $\#\bar{x} = \#\bar{y} = n$. Условимся, что ту же самую матрицу при $\kappa = 1$ мы будем обозначать символом $\Omega(x_j, y_k|\bar{x})$ (т.е. просто опуская индекс κ). Тогда если параметры \bar{v} удовлетворяют твистованным уравнениям Бете, а \bar{u} — обычным, то

$$\langle 0|C(\bar{u})B(\bar{v})|0\rangle = \langle 0|C(\bar{v})B(\bar{u})|0\rangle = d(\bar{v})\Delta'(\bar{u})\Delta(\bar{v}) \det_n \Omega_\kappa(v_j, u_k|\bar{v}) = d(\bar{u})\Delta'(\bar{v})\Delta(\bar{u}) \det_n \Omega(u_j, v_k|\bar{u}). \quad (5.6)$$

Нормы твистованного и обычного on-shell вектора являются частными случаям скалярных произведений, описанных выше, и могут быть выражены через детерминанты тех же матриц:

$$\begin{aligned} \langle 0|C(\bar{u})B(\bar{u})|0\rangle &= d(\bar{u})\Delta'(\bar{u})\Delta(\bar{u}) \det_n \Omega(u_j, u_k|\bar{u}), \\ \langle 0|C(\bar{v})B(\bar{v})|0\rangle &= d(\bar{v})\Delta'(\bar{v})\Delta(\bar{v}) \det_n \Omega_\kappa(v_j, v_k|\bar{v}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Явные представления для матриц Ω и Ω_κ в этих частных случаях будут приведены в следующем разделе.

Таким образом, подставляя (5.4), (5.6) и (5.7) в формулу (5.3), мы получаем

$$Q_m^{(\kappa)} = \sum_{\bar{v}} \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^n \frac{f(v_j, \xi_k)}{f(u_j, \xi_k)} \frac{\det_n \Omega_\kappa(v_j, u_k|\bar{v}) \det_n \Omega(u_j, v_k|\bar{u})}{\det_n \Omega_\kappa(v_j, v_k|\bar{v}) \det_n \Omega(u_j, u_k|\bar{u})}. \quad (5.8)$$

Обратите внимание, что для скалярного произведения $\langle 0|C(\bar{u})B(\bar{v})|0\rangle$ мы использовали оба представления (5.6). В следующем пункте мы увидим, почему это было сделано.

5.1. Отсечение лишних решений. Возникает вопрос: каким образом выделить недопустимые решения твистованных уравнений Бете и не учитывать их при суммировании в формуле (5.8). Оказывается, что такое отсечение нежелательных решений происходит автоматически. Напомним еще раз формулы для матриц, чьи детерминанты входят в (5.8). В числителе мы имеем детерминанты матриц

$$\Omega_\kappa(v_j, u_k|\bar{v}) = (-1)^{n-1} a(u_k) t(v_j, u_k) h(\bar{v}, u_k) + \kappa d(u_k) t(u_k, v_j) h(u_k, \bar{v}) \quad (5.9)$$

и

$$\Omega(u_j, v_k | \bar{u}) = (-1)^{n-1} a(v_k) t(u_j, v_k) h(\bar{u}, v_k) + d(v_k) t(v_k, u_j) h(v_k, \bar{u}). \quad (5.10)$$

В знаменателе (см. (9.7.13), (9.7.14))

$$\Omega(u_j, u_k | \bar{u}) = (-1)^n a(u_k) h(\bar{u}, u_k) \sin \zeta \left[\delta_{jk} \left(-i \ln' r(u_j) - \sum_{\ell=1}^n \mathcal{K}(u_j - u_\ell) \right) + \mathcal{K}(u_j - u_k) \right] \quad (5.11)$$

и

$$\Omega_\kappa(v_j, v_k | \bar{v}) = (-1)^n a(v_k) h(\bar{v}, v_k) \sin \zeta \left[\delta_{jk} \left(-i \ln' r(v_j) - \sum_{\ell=1}^n \mathcal{K}(v_j - v_\ell) \right) + \mathcal{K}(v_j - v_k) \right], \quad (5.12)$$

где мы использовали соотношение $a(\bar{v}) = \kappa^n d(\bar{v})$, которое следует из твистованных уравнений Бете. Обратите внимание, что в формулу (5.12) параметр κ явно не входит. Он входит только неявно, через переменные \bar{v} .

Прямым вычислением можно убедиться в том, что

$$\Omega_\kappa(v_j, v_k | \bar{v}) = -i \sin \zeta \frac{\partial Y_\kappa(v_j | \bar{v})}{\partial v_k}, \quad (5.13)$$

где функция $Y_\kappa(v_j | \bar{v})$ определена формулой (3.4). Важно подчеркнуть, что равенство (5.13) имеет место на твистованных уравнениях Бете, т.е. после вычисления производных необходимо учитывать уравнения (3.5). Соотношение (5.13) сыграет очень важную роль в дальнейших преобразованиях.

Сразу видно, что если среди переменных \bar{v} есть совпадающие, то в матрицах (5.9) и (5.10) есть совпадающие строки или столбцы. В то же время, детерминант матрицы $\Omega_\kappa(v_j, v_k | \bar{v})$ не обращается в нуль из-за нетривиальной диагональной части. Следовательно, суммирование в формуле (5.8) происходит только по таким решениям, в которых все v_j попарно различны.

Пусть теперь $v_1 = \xi_s$ и $v_2 = \xi_s + i\zeta$. Докажем, что тогда детерминант матрицы $\Omega(u_j, v_k | \bar{u})$ обращается в нуль. Действительно, при таком выборе мы имеем $d(v_1) = 0$ и $a(v_2) = 0$. Тогда первый и второй столбцы матрицы $\Omega(u_j, v_k | \bar{u})$ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega(u_j, v_1 | \bar{u}) &= (-1)^{n-1} a(\xi_s) t(u_j, \xi_s) h(\bar{u}, \xi_s), \\ \Omega(u_j, v_2 | \bar{u}) &= d(\xi_s + i\zeta) t(\xi_s + i\zeta, u_j) h(\xi_s + i\zeta, \bar{u}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Но $t(\xi_s + i\zeta, u_j) = t(u_j, \xi_s)$, и мы видим, что эти два столбца оказываются пропорциональны друг другу. Следовательно, детерминант равен нулю.

Наконец, пусть $\zeta = \pi p/q$, и мы имеем параметры v_1, \dots, v_q , такие что $v_j = w + i\zeta(j-1)$. В этом случае проще доказать, что в матрице $\Omega_\kappa(v_j, u_k | \bar{v})$ есть линейно зависимые строки. Действительно, легко видеть, что в этом случае

$$\sum_{j=1}^q t(v_j, u_k) = \sum_{j=1}^q t(u_k, v_j) = 0. \quad (5.15)$$

Для доказательства этого утверждения достаточно представить функцию $t(x, y)$ в виде

$$t(x, y) = i \sin \zeta (\operatorname{cth}(x - y - i\zeta) - \operatorname{cth}(x - y)), \quad (5.16)$$

после чего подставить это выражение в суммы (5.15) со значениями $v_j = w + i\zeta(j-1)$. Поскольку матричные элементы матрицы Ω_κ имеют структуру

$$\Omega_\kappa(v_j, u_k | \bar{v}) = \alpha_k t(v_j, u_k) + \beta_k t(u_k, v_j), \quad (5.17)$$

где α_k и β_k зависят только от номера столбца, мы заключаем, что

$$\sum_{j=1}^q \Omega_{\kappa}(v_j, u_k | \bar{v}) = 0. \quad (5.18)$$

Следовательно, на таких решениях детерминант $\Omega_{\kappa}(v_j, u_k | \bar{v})$ равен нулю.

Итак, формулы для скалярных произведений оказываются достаточно “умными” и обращаются в нуль на недопустимых решениях твистованных уравнений Бете. Поэтому слагаемые, соответствующие недопустимым решениям, не дают вклада в сумму (5.8). Следовательно, суммирование автоматически происходит только по допустимым корням.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы только что убедились в полезности разных представлений для скалярных произведений. Несмотря на то что в конечном итоге детерминанты матриц $\Omega(u_j, v_k | \bar{u})$ и $\Omega_{\kappa}(v_j, u_k | \bar{v})$ описывают одно и то же скалярное произведение, свойства у матричных элементов различны. Поэтому для одного типа недопустимого решения мы легко смогли доказать линейную зависимость строк в матрице $\Omega(u_j, v_k | \bar{u})$, а для другого типа — линейную зависимость столбцов в матрице $\Omega_{\kappa}(v_j, u_k | \bar{v})$. Ниже, после того как мы выразим сумму (5.8) через многомерный контурный интеграл, мы увидим, что свойства детерминантов этих двух матриц различаются еще больше.

5.2. Суммирование по корням уравнений. Итак, мы свели производящий функционал $Q_m^{(\kappa)}$ к сумме по решениям твистованной системы уравнений Бете. Явно найти корни v_j мы не можем, однако это и не обязательно. Сумма по корням системы уравнений может быть сведена к кратному контурному интегралу типа Коши.

Рассмотрим пример алгебраического уравнения. Пусть задан некоторый полином $P_M(z)$ степени M , корни которого суть x_1, \dots, x_M :

$$P_M(x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, M. \quad (5.19)$$

Предположим, что функция $\phi(x)$ аналитична в некоторой области, содержащей корни x_j . Пусть требуется просуммировать эту функцию по корням x_j

$$S_{\phi} = \sum_{j=1}^M \phi(x_j). \quad (5.20)$$

Легко видеть, что сумма (5.20) может быть записана в виде контурного интеграла

$$S_{\phi} = \oint_{\Gamma(\bar{x})} \frac{dz}{2\pi i} \frac{\phi(z) P'_M(z)}{P_M(z)}. \quad (5.21)$$

Здесь $\Gamma(\bar{x})$ — положительно ориентированный замкнутый контур, лежащий в области аналитичности функции $\phi(z)$, охватывающий корни \bar{x} и не содержащий внутри себя никаких других особенностей подынтегрального выражения. Вычисление интеграла (5.21) по вычетам внутри контура возвращает нас к сумме (5.20). Однако мы можем взять интеграл и по вычетам вне контура. Особые точки подынтегрального выражения вне контура — это особые точки функции $\phi(z)$. Таким образом мы переходим от интеграла по контуру вокруг неизвестных полюсов x_j к интегралу вокруг особенностей известной функции $\phi(z)$.

Пусть, например, $\phi(z) = 1/(z - a)$, где a такое, что $P_M(a) \neq 0$. Тогда

$$S_{\phi} = \oint_{\Gamma(\bar{x})} \frac{dz}{2\pi i} \frac{P'_M(z)}{(z - a) P_M(z)}. \quad (5.22)$$

При $z \rightarrow \infty$ подынтегральное выражение ведет себя как z^{-2} , поэтому вычет в бесконечной точке равен нулю. Поэтому интеграл по исходному контуру сводится к интегралу по замкнутому контуру вокруг точки a с обратным знаком:

$$S_\phi = - \oint_{\Gamma(a)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{P'_M(z)}{(z-a)P_M(z)} = - \frac{P'_M(a)}{P_M(a)}. \quad (5.23)$$

Таким образом, мы вычислили сумму S_ϕ , не решая уравнения $P_M(z) = 0$.

Тот факт, что мы считали $P_M(z)$ полиномом, не является принципиальным. Ясно, что представление (5.21) остается в силе, даже если $P_M(z)$ не полином. Поэтому мы всегда можем перейти от интегрирования вокруг области, содержащей корни уравнения, к интегрированию вокруг внешней области. Однако если вне контура подынтегральное выражение имеет достаточно сложную аналитическую структуру (существенно особые точки, разрезы и т. п.), то может оказаться, что хрен редьки не слаще, и такой переход ничего не дает.

Описанный выше метод естественно обобщается на суммирование по решениям системы уравнений. Пусть задана система уравнений

$$F_j(\bar{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.24)$$

Здесь F_j — некоторые функции n переменных, а $\bar{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ — решения системы (5.24). Мы можем поставить задачу о вычислении суммы некоторой функции $\phi(\bar{z})$ по всем возможным решениям \bar{x} . Тогда

$$\sum_{\bar{x}} \phi(\bar{x}) = \oint_{\Gamma(\bar{x})} \phi(\bar{z}) \det_n \left(\frac{\partial F_j(\bar{z})}{\partial z_k} \right) \prod_{j=1}^n \frac{dz_j}{2\pi i F_j(\bar{z})}. \quad (5.25)$$

Здесь $\Gamma(\bar{x})$ — многомерный замкнутый контур (граница полидиска), охватывающий все решения системы (5.24) и не содержащий внутри себя никаких других особенностей подынтегрального выражения. Теперь в знаменателе стоит произведение функций $F_j(\bar{z})$, а в числителе вместо производной возник якобиан системы (5.24). Точно так же, как и ранее, мы можем попробовать вычислить этот интеграл по вычетам вне контура, т. е. в особых точках функции $\phi(\bar{z})$. Успех этого предприятия опять-таки зависит от свойств подынтегрального выражения вне контура интегрирования.

5.3. Интегральное представление для производящего функционала. Вернемся к сумме по промежуточным состояниям (5.8)

$$Q_m^{(\kappa)} = \left(\frac{i}{\sin \zeta} \right)^n \sum_{\bar{v}} \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^n \frac{f(v_j, \xi_k)}{f(u_j, \xi_k)} \frac{\det_n \Omega_\kappa(v_j, u_k | \bar{v}) \det_n \Omega(u_j, v_k | \bar{u})}{\det_n (\partial Y_\kappa(v_j | \bar{v}) / \partial v_k) \det_n \Omega(u_j, u_k | \bar{u})}, \quad (5.26)$$

где мы воспользовались соотношением (5.13) и заменили матрицу $\Omega_\kappa(v_j, v_k | \bar{v})$ на матрицу производных функции $Y_\kappa(v_j | \bar{v})$. Согласно результатам предыдущего раздела, мы можем заменить сумму на n -кратный контурный интеграл. При этом якобиан $\det_n (\partial Y_\kappa(v_j | \bar{v}) / \partial v_k)$ сократится, и мы получим

$$Q_m^{(\kappa)} = \frac{i^n}{(\sin^n \zeta) n!} \oint_{\Gamma(\bar{v})} \prod_{j=1}^n \frac{dz_j}{2\pi i} \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^n \frac{f(z_j, \xi_k)}{f(u_j, \xi_k)} \frac{\det_n \Omega_\kappa(z_j, u_k | \bar{z}) \det_n \Omega(u_j, z_k | \bar{u})}{\prod_{j=1}^n Y_\kappa(z_j | \bar{z}) \det_n \Omega(u_j, u_k | \bar{u})}. \quad (5.27)$$

Здесь (многомерный) контур интегрирования $\Gamma(\bar{v})$ охватывает все допустимые решения твистованных уравнений Бете. Мы знаем, что при достаточно малых κ эти решения близки к значениям $\xi_k + i\zeta$. С другой стороны, мы с самого начала договорились, что параметры неоднородностей ξ_k можно выбрать сколь угодно близкими к их предельному значению $-i\zeta/2$. Таким образом, все

допустимые решения оказываются в малой окрестности точки $i\zeta/2$. Поэтому в качестве контура $\Gamma(\bar{v})$ мы можем выбрать систему окружностей малого радиуса вокруг точки $i\zeta/2$ (для каждой переменной интегрирования z_j).

По сравнению с формулой (5.25) в интегральном представлении (5.27) появился дополнительный множитель $1/n!$. Это связано с тем, что формально интеграл (5.27) равен сумме по *всем* решениям твистованных уравнений Бете, включая и такие, которые отличаются друг от друга только перестановкой в наборе \bar{v} . Но таким решениям отвечает один и тот же собственный вектор, поэтому мы и ввели дополнительный комбинаторный множитель. Кроме того, интеграл (5.27) учитывает и недопустимые решения. Однако, как мы уже убедились, соответствующие вычеты равны нулю.

Теперь нам следует перейти от интегрирования по контуру $\Gamma(\bar{v})$ к интегрированию по новому контуру, который охватывает особенности подынтегрального выражения вне $\Gamma(\bar{v})$. Каковы эти “внешние” особенности? Во-первых, подынтегральное выражение содержит полюсы при $z_j = \xi_k$ за счет произведения функций $f(z_j, \xi_k)$. Во-вторых, имеются полюсы в точках $z_j = u_k$. Чтобы явно увидеть эти полюсы, напомним еще раз выражения для матриц Ω_κ и Ω , в которых переменные \bar{v} заменены на \bar{z} :

$$\Omega_\kappa(z_j, u_k | \bar{z}) = (-1)^{n-1} a(u_k) t(z_j, u_k) h(\bar{z}, u_k) + \kappa d(u_k) t(u_k, z_j) h(u_k, \bar{z}), \quad (5.28)$$

$$\Omega(u_j, z_k | \bar{u}) = (-1)^{n-1} a(z_k) t(u_j, z_k) h(\bar{u}, z_k) + d(z_k) t(z_k, u_j) h(z_k, \bar{u}). \quad (5.29)$$

Видно, что матричный элемент $\Omega_\kappa(z_j, u_k | \bar{z})$ имеет простой полюс при $z_j = u_k$ за счет функций $t(z_j, u_k)$ и $t(u_k, z_j)$. Зато матричный элемент $\Omega(u_j, z_k | \bar{u})$ оказывается регулярным в этих же точках, потому что параметры \bar{u} удовлетворяют системе уравнений Бете. Действительно,

$$\text{Res } \Omega(u_j, z_k | \bar{u}) \Big|_{z_k=u_j} = i \sin \zeta \left((-1)^{n-1} a(u_j) h(\bar{u}, u_j) - d(u_j) h(u_j, \bar{u}) \right), \quad (5.30)$$

и мы видим, что вычет обращается в нуль.

На первый взгляд это может показаться странным, потому что детерминанты матриц $\Omega_\kappa(z_j, u_k | \bar{z})$ и $\Omega(u_j, z_k | \bar{u})$ описывали одно и то же скалярное произведение (см. формулы (5.6)). Однако в формулах (5.6) параметры \bar{v} удовлетворяют твистованным уравнениям Бете, а параметры \bar{u} — обычным. А в формулах (5.28), (5.29) только параметры \bar{u} удовлетворяют уравнениям Бете, в то время как z_j являются переменными интегрирования. Поэтому матрицы $\Omega_\kappa(z_j, u_k | \bar{z})$ и $\Omega(u_j, z_k | \bar{u})$ имеют совершенно разные аналитические свойства.

Итак, мы нашли, что подынтегральное выражение имеет простые полюсы, когда z_j совпадает либо с ξ_k , либо с u_k . Других особенностей вне контура $\Gamma(\bar{v})$ нет. Заметим также, что подынтегральная функция $i\pi$ -периодична по каждому z_j и убывает как $e^{-2|z_j|}$ при $z_j \rightarrow \pm\infty$. Поэтому интеграл по каждому z_j по границе любой горизонтальной полосы шириной $i\pi$ равен нулю. Отсюда находим

$$\oint_{\Gamma(\bar{v})} = \oint_{\text{Strip}} - \oint_{\Gamma(\bar{\xi}) \cup \Gamma(\bar{u})} = - \oint_{\Gamma(\bar{\xi}) \cup \Gamma(\bar{u})}. \quad (5.31)$$

Здесь контур $\Gamma(\bar{\xi}) \cup \Gamma(\bar{u})$ охватывает точки $\bar{\xi}$ и \bar{u} , а интеграл с нижним индексом “Strip” означает интеграл по вышеупомянутой полосе шириной $i\pi$, который равен нулю. Таким образом, n -кратный интеграл (5.27) превращается в

$$Q_m^{(\kappa)} = \left(\frac{-i}{\sin \zeta} \right)^n \frac{1}{n!} \oint_{\Gamma(\bar{\xi}) \cup \Gamma(\bar{u})} \prod_{j=1}^n \frac{dz_j}{2\pi i} \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^n \frac{f(z_j, \xi_k)}{f(u_j, \xi_k)} \frac{\det_n \Omega_\kappa(z_j, u_k | \bar{z}) \det_n \Omega(u_j, z_k | \bar{u})}{\prod_{j=1}^n Y_\kappa(z_j | \bar{z}) \det_n \Omega(u_j, u_k | \bar{u})}. \quad (5.32)$$

Здесь уместно еще раз подчеркнуть важность того, что сумма в формуле (5.26) бралась по решениям твистованных, а не обычных уравнений Бете. Благодаря этому обстоятельству, исходный

контур $\Gamma(\bar{v})$ существует. Ведь согласно формуле (5.25) контур интегрирования не должен содержать внутри себя никаких других особенностей, кроме корней системы уравнений. В нашем случае подынтегральное выражение имеет особенности как в точках \bar{u} , так и в точках \bar{v} . Если бы параметры \bar{v} были решениями обычных уравнений Бете, то мы не смогли бы построить контур, который содержал бы \bar{v} , но не содержал бы \bar{u} , так как \bar{u} — это одно из решений обычных уравнений Бете. Но введение твиста позволило нам сдвинуть все решения \bar{v} в окрестность точки $i\zeta/2$ и тем самым отделить их от решений обычных уравнений Бете.

5.4. Вычисление интеграла. Теперь мы можем вычислить получившийся интеграл (5.32) по вычетам в точках, в которых переменные интегрирования z_j совпадают либо с неоднородностями ξ_k , либо с корнями уравнений Бете u_k . Непосредственно перед вычислением удобно перейти от матриц $\Omega_\kappa(x_j, y_k|\bar{x})$ к новым матрицам $\tilde{\Omega}_\kappa(x_j, y_k|\bar{x})$, определенным следующим образом:

$$\tilde{\Omega}_\kappa(x_j, y_k|\bar{x}) = \frac{\Omega_\kappa(x_j, y_k|\bar{x})}{(-1)^{n-1}a(y_k)h(\bar{x}, y_k)}. \quad (5.33)$$

Аналогично введем функцию $\tilde{Y}_\kappa(z_j|\bar{z})$ равенством

$$\tilde{Y}_\kappa(z_j|\bar{z}) = \frac{Y_\kappa(z_j|\bar{z})}{(-1)^na(z_k)h(\bar{z}, z_j)} = 1 + (-1)^n\kappa \frac{d(z_j)h(z_j, \bar{z})}{a(z_j)h(\bar{z}, z_j)}. \quad (5.34)$$

В результате таких преобразований матрицы $\tilde{\Omega}$ зависят от отношения функций a и d , что позволяет воспользоваться уравнениями Бете в тех случаях, когда эти функции зависят от параметров u_j . Мы приходим к следующему представлению:

$$Q_m^{(\kappa)} = \frac{i^n}{(\sin^n \zeta)n!} \oint_{\Gamma(\bar{\xi}) \cup \Gamma(\bar{u})} \prod_{j=1}^n \frac{dz_j}{2\pi i} \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^n \frac{f(z_j, \xi_k)}{f(u_j, \xi_k)} W_n(\bar{z}; \bar{u}) \frac{\det_n \tilde{\Omega}_\kappa(z_j, u_k|\bar{z}) \det_n \tilde{\Omega}(u_j, z_k|\bar{u})}{\prod_{j=1}^n \tilde{Y}_\kappa(z_j|\bar{z}) \det_n \tilde{\Omega}(u_j, u_k|\bar{u})}, \quad (5.35)$$

где

$$W_n(\bar{z}; \bar{u}) = \frac{h(\bar{z}, \bar{u})h(\bar{u}, \bar{z})}{h(\bar{z}, \bar{z})h(\bar{u}, \bar{u})}. \quad (5.36)$$

Приведем также явный вид всех матриц, входящих в выражение (5.35):

$$\tilde{\Omega}(u_j, z_k|\bar{u}) = t(u_j, z_k) + (-1)^{n-1}t(z_k, u_j) \frac{d(z_k)h(z_k, \bar{u})}{a(z_k)h(\bar{u}, z_k)}, \quad (5.37)$$

$$\tilde{\Omega}_\kappa(z_j, u_k|\bar{z}) = t(z_j, u_k) + \kappa t(u_k, z_j) \frac{h(u_k, \bar{z})h(\bar{u}, u_k)}{h(\bar{z}, u_k)h(u_k, \bar{u})}, \quad (5.38)$$

$$\tilde{\Omega}(u_j, u_k|\bar{u}) = -\sin \zeta \left[\delta_{jk} \left(-i \frac{d}{du_j} \ln r(u_j) - \sum_{\ell=1}^n \mathcal{K}(u_j - u_\ell) \right) + \mathcal{K}(u_j - u_k) \right]. \quad (5.39)$$

В формулах (5.38) и (5.39) были использованы уравнения Бете для набора \bar{u} .

Для каждой переменной интегрирования z_j интеграл по контуру $\Gamma(\bar{\xi}) \cup \Gamma(\bar{u})$ может быть записан в виде суммы двух интегралов: по контуру $\Gamma(\bar{\xi})$ (вокруг точек $\bar{\xi}$) и по контуру $\Gamma(\bar{u})$ (вокруг точек \bar{u}). Поскольку подынтегральное выражение в формуле (5.35) симметрично по переменным \bar{z} , весь n -кратный интеграл тогда записывается в виде

$$\frac{1}{n!} \oint_{\Gamma(\bar{\xi}) \cup \Gamma(\bar{u})} \prod_{j=1}^n \frac{dz_j}{2\pi i} = \sum_{s=0}^n \frac{1}{s!(n-s)!} \oint_{\Gamma(\bar{\xi})} \prod_{j=1}^s \frac{dz_j}{2\pi i} \oint_{\Gamma(\bar{u})} \prod_{j=1}^{n-s} \frac{dz_j}{2\pi i}. \quad (5.40)$$

Здесь для переменных интегрирования z_1, \dots, z_s контуры охватывают точки $\bar{\xi}$, а для оставшихся переменных z_{s+1}, \dots, z_n интегрирование ведется по контурам, охватывающим точки \bar{u} . Заметим, что количество полюсов внутри контура $\Gamma(\bar{\xi})$ равно m (это точки ξ_1, \dots, ξ_m). Кроме того, благодаря двум детерминантам, подынтегральное выражение имеет нуль второго порядка, если две переменные z_j и z_k совпадают. Поэтому, вычисляя вычеты в точках ξ_1, \dots, ξ_m , мы не можем положить два разных z_j и z_k равными одной и той же неоднородности ξ_ℓ . Отсюда следует, что в интегралах по контурам $\Gamma(\bar{\xi})$ количество переменных интегрирования z_1, \dots, z_s не может превышать количество полюсов ξ_1, \dots, ξ_m , т. е. $s \leq m$. В противном случае s -кратный интеграл по контурам $\Gamma(\bar{\xi})$ обращается в нуль. Таким образом, сумма по s в формуле (5.40) фактически ограничена значением $s = m$.

Оставим на время интегралы по контурам $\Gamma(\bar{\xi})$ и перейдем к интегралам по контурам $\Gamma(\bar{u})$. В этих интегралах мы также не можем положить два разных z_j и z_k одному и тому же значению u_ℓ . Поэтому интеграл по контурам $\Gamma(\bar{u})$ равен сумме вычетов в точках $z_{s+k} = u_{j_k}$, $k = 1, \dots, n - s$, где сумма берется по всем возможным наборам $u_{j_1}, \dots, u_{j_{n-s}}$. Иными словами, этот интеграл генерирует сумму по разбиениям полного набора \bar{u} на два подмножества: \bar{u}^I и \bar{u}^{II} , где $\#\bar{u}^I = s$ и $\#\bar{u}^{II} = n - s$. Вычеты берутся в точках $u_j \in \bar{u}^{II}$. С учетом того, что внутри подмножества \bar{u}^{II} мы также можем делать всевозможные перестановки элементов, сумму по разбиениям $\bar{u} \mapsto \{\bar{u}^I, \bar{u}^{II}\}$ следует умножить на $(n - s)!$.

Посмотрим теперь, что происходит с подынтегральным выражением, если положить $\{z_{s+1}, \dots, z_n\} = \bar{u}^{II}$. Удобно предварительно в матрице $\tilde{\Omega}_\kappa(z_j, u_k | \bar{z})$ сдвинуть все столбцы с $u_k \in \bar{u}^{II}$ вправо, а в матрице $\tilde{\Omega}(u_j, z_k | \bar{u})$ сдвинуть все строки с $u_j \in \bar{u}^{II}$ вниз. Ясно, что при таком переупорядочении строк и столбцов общий знак подынтегрального выражения не изменится.

Все полюсы при $z_j = u_k$ собраны в матрице $\tilde{\Omega}_\kappa(z_j, u_k | \bar{z})$. Несложно проверить, что

$$\text{Res} \frac{\tilde{\Omega}_\kappa(z_j, u_k | \bar{z})}{\tilde{Y}_\kappa(z_j | \bar{z})} \Big|_{z_j = u_k} = -i \sin \zeta. \quad (5.41)$$

Отсюда мы легко находим

$$\text{Res} \frac{\det_n \tilde{\Omega}_\kappa(z_j, u_k | \bar{z})}{\prod_{j=1}^n \tilde{Y}_\kappa(z_j | \bar{z})} \Big|_{\{z_{s+1}, \dots, z_n\} = \bar{u}^{II}} = (-i \sin \zeta)^{n-s} \frac{M_s(\{z_1, \dots, z_s\}; \bar{u}^I)}{\prod_{j=1}^s \tilde{Y}_\kappa(z_j | \{z_1, \dots, z_s\}, \bar{u}^{II})}, \quad (5.42)$$

где

$$M_s(\{z_1, \dots, z_s\}; \bar{u}^I) = \det_s \left(t(z_j, u_k^I) + \kappa t(u_k^I, z_j) \prod_{\ell=1}^s \frac{h(u_k^I, z_\ell)}{h(z_\ell, u_k^I)} \prod_{u_\ell \in \bar{u}^I} \frac{h(u_\ell, u_k^I)}{h(u_k^I, u_\ell)} \right) \quad (5.43)$$

и u_k^I означает k -й элемент из набора \bar{u}^I . С учетом очевидных соотношений

$$W_n(\bar{z}; \bar{u}) \Big|_{\{z_{s+1}, \dots, z_n\} = \bar{u}^{II}} = W_s(\{z_1, \dots, z_s\}; \bar{u}^I) \quad (5.44)$$

и

$$\prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^n \frac{f(z_j, \xi_k)}{f(u_j, \xi_k)} \Big|_{\{z_{s+1}, \dots, z_n\} = \bar{u}^{II}} = \prod_{k=1}^m \frac{\prod_{j=1}^s f(z_j, \xi_k)}{\prod_{u_j \in \bar{u}^I} f(u_j, \xi_k)}, \quad (5.45)$$

мы получаем новое представление для производящей функции

$$Q_m^{(\kappa)} = \sum_{s=0}^m \frac{1}{(-i \sin \zeta)^{s!}} \sum_{\bar{u} \mapsto \{\bar{u}^I, \bar{u}^{II}\}} \oint_{\Gamma(\bar{\xi})} \prod_{j=1}^s \frac{dz_j}{2\pi i} \prod_{k=1}^m \frac{\prod_{j=1}^s f(z_j, \xi_k)}{\prod_{u_j \in \bar{u}^I} f(u_j, \xi_k)} W_s(\{z_1, \dots, z_s\}; \bar{u}^I) \\ \times \frac{M_s(\{z_1, \dots, z_s\}; \bar{u}^I)}{\prod_{j=1}^s \tilde{Y}_\kappa(z_j | \{z_1, \dots, z_s\}, \bar{u}^{II})} \frac{\det_n [\tilde{\Omega}(u_j, z_k | \bar{u}); \tilde{\Omega}(u_j, u_k^I | \bar{u})]}{\det_n \tilde{\Omega}(u_j, u_k | \bar{u})}, \quad (5.46)$$

где в детерминанте $\det_n [\tilde{\Omega}(u_j, z_k | \bar{u}); \tilde{\Omega}(u_j, u_k^{\text{II}} | \bar{u})]$ в столбцах с номерами $1, \dots, s$ стоит матрица $\tilde{\Omega}(u_j, z_k | \bar{u})$, а в оставшихся $n - s$ столбцах — матрица $\tilde{\Omega}(u_j, u_k^{\text{II}} | \bar{u})$. Суммирование по разбиениям набора \bar{u} ведется с условием $\#\bar{u}^{\text{I}} = s$. При $s = 0$ соответствующий член в сумме по s равен 1.

В оставшемся интеграле можно положить все функции $d(z_j) = 0$. Действительно, после вычисления этого интеграла все переменные z_j становятся равными неоднородностям $z_j = \xi_\ell$, а $d(\xi_\ell) = 0$ для любого ξ_ℓ . Поэтому под знаком интеграла мы можем сделать замены

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_\kappa(z_j | \{z_1, \dots, z_s\}, \bar{u}^{\text{II}}) &\longrightarrow 1, \\ \tilde{\Omega}(u_j, z_k | \bar{u}) &\longrightarrow t(u_j, z_k). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Такие замены эквивалентны отбрасыванию функции, которая голоморфна в области интегрирования. После этого представление (5.46) принимает вид

$$\begin{aligned} Q_m^{(\kappa)} = \sum_{s=0}^m \frac{1}{(-i \sin \zeta)^s s!} \sum_{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}^{\text{I}}, \bar{u}^{\text{II}}\}} \oint_{\Gamma(\bar{\xi})} \prod_{j=1}^s \frac{dz_j}{2\pi i} \prod_{k=1}^m \frac{\prod_{j=1}^s f(z_j, \xi_k)}{\prod_{u_j \in \bar{u}^{\text{I}}} f(u_j, \xi_k)} W_s(\{z_1, \dots, z_s\}; \bar{u}^{\text{I}}) \\ \times M_s(\{z_1, \dots, z_s\}; \bar{u}^{\text{I}}) \frac{\det_n [t(u_j, z_k); \tilde{\Omega}(u_j, u_k^{\text{II}} | \bar{u})]}{\det_n \tilde{\Omega}(u_j, u_k | \bar{u})}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Обратите внимание, что после всех преобразований параметр κ входит теперь только в функцию $M_s(\{z_1, \dots, z_s\}; \bar{u}^{\text{I}})$ (см. (5.43)). То есть зависимость от κ оказывается полиномиальной. Напомним, что исходно мы считали $|\kappa|$ достаточно малым, чтобы обеспечить полноту системы твистованных on-shell векторов. Теперь от этого ограничения можно избавиться. Действительно, если некоторый полином от κ известен в небольшой окрестности $\kappa = 0$, то он аналитически продолжается в любую точку комплексной области. Таким образом, в представлении (5.48) уже возможно дифференцирование по κ при $\kappa = 1$.

5.5. Термодинамический предел производящего функционала. Ясно, что если в формуле (5.48) вычислить оставшиеся интегралы, то мы получим дополнительную сумму по разбиениям, на этот раз это будут разбиения множества неоднородностей $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$. Такое представление для производящей функции $Q_m^{(\kappa)}$ можно получить и непосредственно алгебраическими методами, без суммирования формфакторов. Для этого нужно в формуле (5.1) вычислить действие произведения твистованных трансфер-матриц $\mathcal{T}_\kappa(\xi_k)$ на обычные on-shell векторы $\langle 0 | C(\bar{u})$ или $B(\bar{u}) | 0 \rangle$. Подробности можно найти в работе [21].

Мы оставим интегралы по контурам $\Gamma(\bar{\xi})$ в том виде, как они есть. Тогда мы легко можем перейти к однородному пределу, просто положив в формуле (5.48) $\xi_k = -i\zeta/2$ для всех $k = 1, \dots, m$. Более того, переход к однородной модели необходимо сделать, если мы хотим рассматривать термодинамический предел, иначе нам придется иметь дело с функцией $r(u) = a(u)/d(u)$, зависящей от бесконечного набора произвольных параметров неоднородности.

До сих пор все вычисления производились в предположении, что переменные \bar{u} являются некоторым решением обычных уравнений Бете. Теперь мы будем считать, что набор \bar{u} соответствует основному состоянию гамильтониана. Это даст нам возможность вычислить отношение детерминантов в формуле (5.48) в термодинамическом пределе.

Матричные элементы матрицы $\tilde{\Omega}(u_j, u_k | \bar{u})$ заданы равенством (5.39). Найдем обратную матрицу в пределе большого n . Для однородной модели справедливо равенство

$$-i \frac{r'(u_j)}{r(u_j)} = N p'_0(u), \quad (5.49)$$

где $p'_0(u)$ определено в формуле (2.9). Тогда в силу условия (2.10) имеем

$$-i \frac{r'(u_j)}{r(u_j)} - \sum_{\ell=1}^n \mathcal{K}(u_j - u_\ell) = N \left(p'_0(u_j) - \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^n \mathcal{K}(u_j - u_\ell) \right) \rightarrow 2\pi N \rho(u_j), \quad N \rightarrow \infty, \quad (5.50)$$

откуда

$$\tilde{\Omega}(u_j, u_k | \bar{u}) \rightarrow -2\pi N \sin \zeta \rho(u_k) \left(\delta_{jk} + \frac{\mathcal{K}(u_j - u_k)}{2\pi N \rho(u_k)} \right), \quad N \rightarrow \infty. \quad (5.51)$$

Напомним, что равенство (2.10) выводилось в предположении, что n и N достаточно велики. Поэтому и формула (5.51) является приближенной. В ней отброшены члены, которые исчезают в пределе $n, N \rightarrow \infty$.

Обозначим матрицу, обратную к $\tilde{\Omega}(u_j, u_k | \bar{u})$, через $\Xi(u_j, u_k)$:

$$\sum_{\ell=1}^n \tilde{\Omega}(u_j, u_\ell | \bar{u}) \Xi(u_\ell, u_k) = \delta_{jk}. \quad (5.52)$$

Из формулы (5.51) видно, что $\Xi(u_j, u_k)$ выражается через резольвенту $\mathcal{R}(u - v)$ (2.25)

$$\Xi(u_j, u_k) = \frac{-1}{2\pi N \sin \zeta \rho(u_j)} \left(\delta_{jk} - \frac{\mathcal{R}(u_j - u_k)}{N \rho(u_k)} \right). \quad (5.53)$$

В этом легко убедиться, если подставить (5.53) в формулу (5.52), затем в пределе при больших n и N перейти от суммирования к интегрированию и воспользоваться интегральным уравнением для резольвенты (2.25).

Теперь мы легко можем вычислить отношение детерминантов в формуле (5.48). Переставим в матрице $\Xi(u_j, u_k)$ строки и столбцы так, чтобы в первых s строках и столбцах стояли элементы из подмножества \bar{u}^I : $\Xi(u_j^I, u_k^I)$. Получившуюся матрицу обозначим $\tilde{\Xi}(u_j, u_k)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\det_n [t(u_j, z_k); \tilde{\Omega}(u_j, u_k^{\text{II}} | \bar{u})]}{\det_n \tilde{\Omega}(u_j, u_k | \bar{u})} &= \det_n [\tilde{\Xi}(u_j, u_k)] \cdot \det_n [t(u_j, z_k); \tilde{\Omega}(u_j, u_k^{\text{II}} | \bar{u})] \\ &= \det_n \left[\sum_{\ell=1}^n \tilde{\Xi}(u_j, u_\ell) t(u_\ell, z_k); \sum_{\ell=1}^n \tilde{\Xi}(u_j, u_\ell) \tilde{\Omega}(u_\ell, u_k^{\text{II}} | \bar{u}) \right]. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Очевидно, что

$$\sum_{\ell=1}^n \tilde{\Xi}(u_j, u_\ell) \tilde{\Omega}(u_\ell, u_k^{\text{II}} | \bar{u}) = \delta_{jk}, \quad (5.55)$$

поэтому детерминант матрицы $n \times n$ сводится к диагональному минору размера $s \times s$

$$\frac{\det_n [t(u_j, z_k); \tilde{\Omega}(u_j, u_k^{\text{II}} | \bar{u})]}{\det_n \tilde{\Omega}(u_j, u_k | \bar{u})} = \det_s \left[\sum_{\ell=1}^n \tilde{\Xi}(u_j^I, u_\ell) t(u_\ell, z_k) \right]. \quad (5.56)$$

Подставляя сюда (5.53), мы получаем для больших n и N

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^n \tilde{\Xi}(u_j^I, u_\ell) t(u_\ell, z_k) &= \frac{-1}{2\pi N \sin \zeta \rho(u_j^I)} \left(t(u_j^I, z_k) - \sum_{\ell=1}^n \frac{\mathcal{R}(u_j^I - u_\ell) t(u_\ell, z_k)}{N \rho(u_\ell)} \right) \\ &\rightarrow \frac{-1}{2\pi N \sin \zeta \rho(u_j^I)} \left(t(u_j^I, z_k) - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(u_j^I - v) t(v, z_k) dv \right) = \frac{i}{N \rho(u_j^I) 2\zeta \operatorname{sh} \frac{\pi}{\zeta} (u_j^I - z_k)}, \end{aligned} \quad (5.57)$$

где мы воспользовались уравнением (2.32). Таким образом, окончательно

$$\frac{\det_n \left[t(u_j, z_k); \tilde{\Omega}(u_j, u_k^{\text{II}} | \bar{u}) \right]}{\det_n \tilde{\Omega}(u_j, u_k | \bar{u})} = \prod_{u_j \in \bar{u}^{\text{I}}} \frac{1}{N\rho(u_j)} \det_s \left[\frac{i}{2\zeta \operatorname{sh} \frac{\pi}{\zeta} (u_j^{\text{I}} - z_k)} \right]. \quad (5.58)$$

Подставляя это выражение в формулу для производящей функции (5.48), мы получаем

$$Q_m^{(\kappa)} = \sum_{s=0}^m \frac{1}{(-i \sin \zeta)^s s!} \sum_{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}^{\text{I}}, \bar{u}^{\text{II}}\}} \oint_{\Gamma(-\frac{i\zeta}{2})} \prod_{j=1}^s \frac{dz_j}{2\pi i} \prod_{j=1}^s \varphi^m(z_j) \prod_{u_j \in \bar{u}^{\text{I}}} \varphi^{-m}(u_j) W_s(\{z_1, \dots, z_s\}; \bar{u}^{\text{I}}) \\ \times M_s(\{z_1, \dots, z_s\}; \bar{u}^{\text{I}}) \prod_{u_j \in \bar{u}^{\text{I}}} \frac{1}{N\rho(u_j)} \det_s \left[\frac{i}{2\zeta \operatorname{sh} \frac{\pi}{\zeta} (u_j^{\text{I}} - z_k)} \right], \quad (5.59)$$

где

$$\varphi(z) = \frac{\operatorname{sh}(z - \frac{i\zeta}{2})}{\operatorname{sh}(z + \frac{i\zeta}{2})}. \quad (5.60)$$

Здесь мы уже рассматриваем модель XXZ в однородном пределе, поэтому мы положили все $\xi_\ell = -i\zeta/2$, а контурные интегралы по переменным z_j берутся вокруг точки $-i\zeta/2$.

Нам осталось сделать последний шаг и заменить сумму по разбиениям множества \bar{u} на s -кратный интеграл. Заметим, что все слагаемые в сумме по разбиениям в формуле (5.59) явно зависят только от подмножества \bar{u}^{I} . Рассмотрим сумму вида

$$\sum_{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}^{\text{I}}, \bar{u}^{\text{II}}\}} F(\bar{u}^{\text{I}}) \prod_{u_j \in \bar{u}^{\text{I}}} \frac{1}{N\rho(u_j)}, \quad (5.61)$$

где F — некоторая симметричная функция от s переменных, интегрируемая в \mathbb{R}^s . Мы также допустим, что F обращается в нуль, если любые ее два аргумента совпадают. Тогда легко видеть, что

$$\sum_{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}^{\text{I}}, \bar{u}^{\text{II}}\}} F(\bar{u}^{\text{I}}) \prod_{u_j \in \bar{u}^{\text{I}}} \frac{1}{N\rho(u_j)} = \frac{1}{s!} \sum_{u_1 \in \bar{u}} \dots \sum_{u_s \in \bar{u}} F(\{u_1, \dots, u_s\}) \prod_{j=1}^s \frac{1}{N\rho(u_j)}. \quad (5.62)$$

Здесь в правой части каждая переменная u_k независимо пробегает множество \bar{u} . Действительно, в силу условия, наложенного на функцию F , в правой части формулы (5.62) остаются лишь те слагаемые, в которых все u_k различны. Те члены, которые отличаются друг от друга только перестановкой аргументов, убиваются множителем $1/s!$. Остается сумма по разбиениям набора \bar{u} на подмножества \bar{u}^{I} и \bar{u}^{II} .

В свою очередь, сумма в правой части формулы (5.62) в термодинамическом пределе переходит в s -кратный интеграл, поэтому

$$\sum_{\bar{u} \rightarrow \{\bar{u}^{\text{I}}, \bar{u}^{\text{II}}\}} F(\bar{u}^{\text{I}}) \prod_{u_j \in \bar{u}^{\text{I}}} \frac{1}{N\rho(u_j)} \rightarrow \frac{1}{s!} \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} du_s F(\{u_1, \dots, u_s\}). \quad (5.63)$$

Остается лишь применить полученный результат к формуле (5.59). Для записи окончательного результата удобно слегка изменить смысл обозначений, которыми мы пользовались до сих пор. Пусть теперь множество \bar{z} означает набор переменных интегрирования $\{z_1, \dots, z_s\}$, интегралы по которым ведутся вокруг точки $-i\zeta/2$. Точно так же символом \bar{u} будем теперь обозначать набор переменных интегрирования $\{u_1, \dots, u_s\}$, интегралы по которым берутся по вещественной оси. Тогда

$$Q_m^{(\kappa)} = \sum_{s=0}^m \frac{1}{(-i \sin \zeta)^s (s!)^2} \oint_{\Gamma(-\frac{i\zeta}{2})} \prod_{j=1}^s \frac{dz_j}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^s du_j \\ \times \prod_{j=1}^s \varphi^m(z_j) \varphi^{-m}(u_j) W_s(\bar{z}; \bar{u}) M_s(\bar{z}; \bar{u}) \det_s \left[\frac{i}{2\zeta \operatorname{sh} \frac{\pi}{\zeta}(u_j - z_k)} \right]. \quad (5.64)$$

Это и есть искомое интегральное представление для производящей функции $Q_m^{(\kappa)}$ в термодинамическом пределе. Напомним, что функции $\varphi(z)$ даются формулой (5.60), а функции $W_s(\bar{z}; \bar{u})$ и $M_s(\bar{z}; \bar{u})$ имеют вид

$$W_s(\bar{z}; \bar{u}) = \prod_{j=1}^s \prod_{k=1}^s \frac{\operatorname{sh}(u_j - z_k - i\zeta) \operatorname{sh}(z_j - u_k - i\zeta)}{\operatorname{sh}(z_j - z_k - i\zeta) \operatorname{sh}(u_j - u_k - i\zeta)}, \quad (5.65)$$

$$M_s(\bar{z}; \bar{u}) = \det_s \left(t(z_j, u_k) + \kappa t(u_k, z_j) \prod_{\ell=1}^s \frac{\operatorname{sh}(u_k - z_\ell - i\zeta) \operatorname{sh}(u_\ell - u_k - i\zeta)}{\operatorname{sh}(z_\ell - u_k - i\zeta) \operatorname{sh}(u_k - u_\ell - i\zeta)} \right), \quad (5.66)$$

где функция $t(u, v)$ задана одной из формул (3.1).

6. Некоторые простые частные случаи

Полезно проверить, как работает формула (5.64) в простых частных случаях, когда результат заранее известен.

6.1. Случай $\kappa = 1$. Первый такой очевидный случай возникает при $\kappa = 1$, или, что то же самое, при $\beta = 0$ (напомним, что $\kappa = e^\beta$). Тогда оператор $Q_{1,m}$ (см. (4.2)) превращается в единичный оператор, среднее от которого должно равняться единице. Формула (5.64) действительно дает такой ответ, поскольку

$$M_s(\bar{z}; \bar{u}) \Big|_{\kappa=1} = \delta_{s0}. \quad (6.1)$$

Действительно, если мы рассмотрим скалярное произведение твистованного on-shell вектора $\langle 0|C(\bar{z})$ и обычного on-shell вектора $B(u)|0\rangle$, то ответ будет пропорционален детерминанту (5.66) (см. например, (11.1.10)). При $\kappa = 1$ такое скалярное произведение обращается в нуль. Можно и непосредственно доказать равенство нулю детерминанта (5.66), установив линейную зависимость строк. Мы уже проделывали это для случая рациональной R -матрицы. Доказательство для случая тригонометрической R -матрицы полностью аналогично, и мы предлагаем читателю проделать его самостоятельно.

Таким образом, при $\kappa = 1$ все слагаемые в сумме (5.64) обращаются в нуль, за исключением члена при $s = 0$, который равен единице.

6.2. Случай $m = 1$. При $m = 1$ оператор $Q_{1,1}^{(\kappa)}$ имеет вид

$$Q_{1,1}^{(\kappa)} = e^{\frac{\beta}{2}(1-\sigma_1^z)} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2}(1 - \sigma_1^z). \quad (6.2)$$

Напомним, что среднее по основному состоянию от оператора σ_k^z равняется нулю для любого k (см. сноску на стр. 167). Поэтому с учетом равенства (6.2) находим

$$Q_1^{(\kappa)} = \frac{\langle 0|C(\bar{u}) \left(1 + \frac{\kappa-1}{2}(1 - \sigma_1^z)\right) B(u)|0\rangle}{\langle 0|C(\bar{u})B(u)|0\rangle} = \frac{\kappa + 1}{2}. \quad (6.3)$$

Попробуем воспроизвести этот результат с помощью представления (5.64). При $m = 1$ имеем

$$Q_1^{(\kappa)} = 1 + \frac{\kappa - 1}{-i \sin \zeta} \oint_{\Gamma(-\frac{i\zeta}{2})} \frac{dz}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh}(z - \frac{i\zeta}{2}) \text{sh}(u + \frac{i\zeta}{2})}{\text{sh}(z + \frac{i\zeta}{2}) \text{sh}(u - \frac{i\zeta}{2})} \frac{\text{sh}(u - z - i\zeta)}{\text{sh}(u - z)} \frac{i du}{2\zeta \text{sh} \frac{\pi}{\zeta}(u - z)}. \quad (6.4)$$

Контурный интеграл по z равен вычету в точке $z = -i\zeta/2$. Беря вычет, получаем

$$Q_1^{(\kappa)} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\text{ch} \frac{\pi u}{\zeta}}. \quad (6.5)$$

Оставшийся интеграл по u элементарно вычисляется, и мы воспроизводим желаемый результат

$$Q_1^{(\kappa)} = \frac{\kappa + 1}{2}. \quad (6.6)$$

6.3. Свободные фермионы. Если параметр анизотропии Δ равен нулю, то модель XXZ становится эквивалентной свободным фермионам [26, 27]. Это наиболее простой случай XXZ цепочки. В частности, уравнения Бете (2.1) решаются явно, если учесть, что точка $\Delta = 0$ соответствует значению $\zeta = \pi/2$. В интегральном представлении для производящего функционала $Q_m^{(\kappa)}$ тоже происходят существенные упрощения, что позволяет явно вычислить двухточечную функцию третьих компонент спинов (4.1). Упрощение производящего функционала основано на формуле (7.2.8).

Перейдем к непосредственному вычислению производящего функционала при $\zeta = \pi/2$. Подставляя это значение в (5.66), получаем

$$M_s(\bar{z}; \bar{u}) = \det_s \left[\frac{i(\kappa - 1)}{\text{sh} 2(z_j - u_k)} \right] = (2i(\kappa - 1))^s \frac{\prod_{j>k}^s \text{ch}(z_j - z_k) \text{ch}(u_k - u_j)}{\prod_{j,k=1}^s \text{ch}(z_j - u_k)} \det_s \left[\frac{1}{\text{sh}(z_j - u_k)} \right]. \quad (6.7)$$

Второй детерминант в интегральном представлении (5.64) вычисляется точно так же

$$\det_s \left[\frac{-i}{\pi \text{sh} 2(z_j - u_k)} \right] = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^s \frac{\prod_{j>k}^s \text{ch}(z_j - z_k) \text{ch}(u_k - u_j)}{\prod_{j,k=1}^s \text{ch}(z_j - u_k)} \det_s \left[\frac{1}{\text{sh}(z_j - u_k)} \right]. \quad (6.8)$$

Наконец,

$$W_s(\bar{z}; \bar{u}) = \prod_{j=1}^s \prod_{k=1}^s \frac{\text{ch}^2(z_j - u_k)}{\text{ch}(z_j - z_k) \text{ch}(u_j - u_k)}. \quad (6.9)$$

В итоге мы получаем

$$Q_m^{(\kappa)} = \sum_{s=0}^m \frac{i^s (\kappa - 1)^s}{(2\pi)^s (s!)^2} \oint_{\Gamma(-\frac{i\pi}{4})} \prod_{j=1}^s \frac{dz_j}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^s du_j \prod_{j=1}^s \left(\frac{\varphi(z_j)}{\varphi(u_j)} \right)^m \left(\det_s \left[\frac{1}{\text{sh}(u_j - z_k)} \right] \right)^2. \quad (6.10)$$

Напомним, что двухточечная корреляционная функция третьих компонент спинов извлекается из производящего функционала $Q_m^{(\kappa)}$ по формуле (4.11)

$$S_{zz}(m) = 2 \frac{d^2}{d\beta^2} D_m^2 Q_m^{(\kappa)} \Big|_{\beta=0} - 1, \quad (6.11)$$

где символом D_m^2 обозначен оператор второй производной на решетке, который действует на функции от дискретного аргумента $\phi(m)$ по формуле

$$D_m^2 \phi(m) = \phi(m + 1) - 2\phi(m) + \phi(m - 1). \quad (6.12)$$

Мы также уже учли, что среднее по основному состоянию от оператора σ_k^z равно нулю.

Мы видим, что s -й член в сумме (6.10) пропорционален $(\kappa - 1)^s$. Поскольку для вычисления корреляционной функции нам необходимо взять вторую производную по параметру β в точке $\beta = 0$ (т. е. при $\kappa = 1$), то достаточно рассмотреть только слагаемые с $s = 1$ и $s = 2$ (слагаемое, отвечающее $s = 0$, заведомо исчезает после взятия производных).

Рассмотрим вклад в производящий функционал при $s = 1$:

$$\Lambda_1(m) = \frac{i(\kappa - 1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \oint_{\Gamma(-\frac{i\pi}{4})} \frac{dz}{2\pi i} \left(\frac{\text{sh}(z - \frac{i\pi}{4}) \text{sh}(u + \frac{i\pi}{4})}{\text{sh}(z + \frac{i\pi}{4}) \text{sh}(u - \frac{i\pi}{4})} \right)^m \frac{1}{\text{sh}^2(u - z)}. \quad (6.13)$$

Вместо того чтобы вычислять интеграл по z по вычету в точке $z = -i\pi/4$, где имеется полюс порядка m , мы можем вычислить этот интеграл по вычету в точке $z = u$, где имеется полюс только второго порядка. Здесь вступают в силу аргументы, аналогичные тем, которые мы использовали при замене контура интегрирования вокруг решений твистованных уравнений Бете на новый контур вокруг неоднородностей и параметров основного состояния (см. (5.31)). Действительно, подынтегральное выражение в (6.13) $i\pi$ -периодично по z и экспоненциально убывает на бесконечности. Следовательно, интеграл по границе бесконечной горизонтальной полосы шириной $i\pi$ обращается в нуль. С другой стороны, этот же интеграл равен сумме вычетов в точках $z = -i\pi/4$ и $z = u$, поскольку других особенностей подынтегральное выражение не имеет. Поэтому интеграл по контуру вокруг точки $-i\pi/4$ может быть заменен на интеграл по контуру вокруг точки $z = u$ с противоположным знаком. Вычисляя вычет в полюсе второго порядка, мы немедленно находим

$$\Lambda_1(m) = \frac{im(\kappa - 1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{du} \ln \left(\frac{\text{sh}(u + \frac{i\pi}{4})}{\text{sh}(u - \frac{i\pi}{4})} \right) du = \frac{m(\kappa - 1)}{2}. \quad (6.14)$$

Результат оказывается линейным по m , поэтому после взятия второй решеточной производной этот вклад исчезает.

При $s = 2$ возникает два вклада. Первый имеет вид

$$\Lambda_2^{(1)}(m) = -\frac{(\kappa - 1)^2}{8\pi^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} du \oint_{\Gamma(-\frac{i\pi}{4})} \frac{dz}{2\pi i} \left(\frac{\text{sh}(z - \frac{i\pi}{4}) \text{sh}(u + \frac{i\pi}{4})}{\text{sh}(z + \frac{i\pi}{4}) \text{sh}(u - \frac{i\pi}{4})} \right)^m \frac{1}{\text{sh}^2(u - z)} \right\}^2. \quad (6.15)$$

По сути, с точностью до числового коэффициента, это квадрат интеграла, рассмотренного выше. Поэтому мы легко находим

$$\Lambda_2^{(1)}(m) = \frac{m^2}{8} (\kappa - 1)^2. \quad (6.16)$$

Второй вклад при $s = 2$ имеет чуть более сложную структуру:

$$\Lambda_2^{(2)}(m) = \frac{(\kappa - 1)^2}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_1 du_2}{\varphi^m(u_1) \varphi^m(u_2)} \left\{ \oint_{\Gamma(-\frac{i\pi}{4})} \frac{dz}{2\pi i} \frac{\varphi^m(z)}{\text{sh}(z - u_1) \text{sh}(z - u_2)} \right\}^2. \quad (6.17)$$

Снова сдвигая контур интегрирования по z к точкам u_1 и u_2 , получаем

$$\Lambda_2^{(2)}(m) = \frac{(\kappa - 1)^2}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\varphi^m(u_1) - \varphi^m(u_2))^2}{\text{sh}^2(u_1 - u_2) \varphi^m(u_1) \varphi^m(u_2)} du_1 du_2. \quad (6.18)$$

Интеграл по переменным u_1 и u_2 вычислить уже сложнее, однако его можно упростить, если сразу же перейти ко “второй решеточной производной”:

$$D_m^2 \Lambda_2^{(2)}(m) = \frac{(\kappa - 1)^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^{m-1}(u_1)}{\varphi^{m-1}(u_2)} \left(\frac{\varphi(u_1)}{\varphi(u_2)} - 1 \right)^2 \frac{du_1 du_2}{\text{sh}^2(u_1 - u_2)}. \quad (6.19)$$

Легко проверить, что

$$\frac{\varphi(u_1)}{\varphi(u_2)} - 1 = \frac{\operatorname{sh}(u_1 - \frac{i\pi}{4}) \operatorname{sh}(u_2 + \frac{i\pi}{4})}{\operatorname{sh}(u_1 + \frac{i\pi}{4}) \operatorname{sh}(u_2 - \frac{i\pi}{4})} - 1 = \frac{i \operatorname{sh}(u_1 - u_2)}{\operatorname{sh}(u_1 + \frac{i\pi}{4}) \operatorname{sh}(u_2 - \frac{i\pi}{4})}. \quad (6.20)$$

Подставляя это выражение в (6.19), получаем

$$D_m^2 \Lambda_2^{(2)}(m) = -\frac{(\kappa - 1)^2}{4\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^{m-1}(u - \frac{i\pi}{4})}{\operatorname{sh}^{m+1}(u + \frac{i\pi}{4})} du \right|^2. \quad (6.21)$$

Нам остается только воспользоваться соотношением

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\operatorname{sh}(u - \frac{i\pi}{4})}{\operatorname{sh}(u + \frac{i\pi}{4})} \right) = \frac{i}{\operatorname{sh}^2(u + \frac{i\pi}{4})}, \quad (6.22)$$

после чего интеграл в формуле (6.21) уже вычисляется без труда

$$D_m^2 \Lambda_2^{(2)}(m) = \frac{(\kappa - 1)^2}{4\pi^2 m^2} (1 - (-1)^m). \quad (6.23)$$

Подставляя найденные вклады $\Lambda_2^{(1)}$ и $\Lambda_2^{(2)}$ в формулу (6.11), получаем окончательно

$$S_{zz}(m) = \frac{1 - (-1)^m}{\pi^2 m^2}. \quad (6.24)$$

Таким образом, мы получили явный и довольно простой ответ для корреляционной функции третьих компонент спинов в XXZ цепочке при $\Delta = 0$. Простота этого ответа в основном объясняется тем, что при таком значении параметра анизотропии модель эквивалентна свободным фермионам.

6.4. Несколько общих замечаний.

О периодичности. Вычисляя корреляционную функцию при $\zeta = \pi/2$, мы явно использовали $i\pi$ -периодичность подынтегральных выражений. В общем случае, однако, это не так из-за наличия в формуле (5.59) функций $\operatorname{sh} \frac{\pi}{\zeta}(u_j - z_k)$, которые периодичны с периодом $2i\zeta$. Такое нарушение $i\pi$ -периодичности может показаться странным. И действительно, еще в представлении (5.48) никакого нарушения не было.

На самом деле здесь нет никакого чуда. Дело в том, что решение интегрального уравнения

$$\rho(u - z - \frac{i\zeta}{2}) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(u - v) \rho(v - z - \frac{i\zeta}{2}) dv = -\frac{1}{2\pi \sin \zeta} t(u, z) \quad (6.25)$$

зависит от параметра z неаналитическим образом. Это связано с наличием полюсов у функции $t(u, z)$ при $u = z$ и $u = z + i\zeta$. Из-за этого фурье-образ функции $t(u, z)$ зависит от того, какова мнимая часть параметра z , в чем читатель легко может убедиться самостоятельно. Если $-\zeta < \operatorname{Im}(z) < 0$, то

$$\rho(u - z - \frac{i\zeta}{2}) = \frac{i}{2\zeta \operatorname{sh} \frac{\pi}{\zeta}(u - z)}. \quad (6.26)$$

Однако если $\operatorname{Im}(z)$ лежит вне этой полосы, то интегральное уравнение (6.25) имеет уже другое решение, которое не выражается в элементарных функциях, если ζ находится в точке общего положения. В целом решение уравнения (6.25) является $i\pi$ -периодической функцией, однако эта функция имеет разрезы на линиях $\operatorname{Im}(z) = 0$ и $\operatorname{Im}(z) = -\zeta$. В нашем случае параметр z являлся переменной интегрирования, которая изменялась в малой окрестности точки $-i\zeta/2$. Поэтому мы и выбрали в качестве решения уравнения (6.25) функцию (6.26).

Асимптотический анализ. Интегральное представление (5.59) выглядит довольно привлекательным с точки зрения асимптотического анализа корреляционной функции $S_{zz}(m)$ при большом m . В нем вся зависимость от расстояния m находится в функциях φ . Естественно возникает мысль деформировать контуры интегрирования так, чтобы сделать на них $|\varphi(z)| < 1$. Так, например, можно раздуть маленькие окружности вокруг точки $-i\zeta/2$ в бесконечные горизонтальные полосы, на границах которых $|\varphi(z)| < 1$ при $|\operatorname{Re}(z)| < \infty$. Однако на этом пути возникают серьезные сложности комбинаторного характера. Дело в том, что, двигая исходный контур интегрирования к контуру наискорейшего спуска, мы неизбежно пересекаем особенности подынтегрального выражения, в частности в точках $z_j = u_k$. При этом функции $\varphi^m(z_j)$ сокращается с функциями $\varphi^{-m}(u_k)$ вплоть до их полного исчезновения из-под знака интеграла. Учет подобных вкладов является крайне сложной задачей, поэтому вопрос об асимптотическом анализе интегрального представления (5.59) на сегодняшний день не решен.

Предел ХХХ. Полностью аналогично можно получить интегральное представление для производящего функционала $\mathcal{Q}_m^{(\kappa)}$ в ХХХ цепочке. Однако этот же ответ можно получить и из представления (5.59) в пределе $\zeta \rightarrow 0$. Для этого нужно сделать замену переменных $u_j \rightarrow \zeta u_j$, $z_j \rightarrow \zeta z_j$ и устремить ζ к нулю. При этом функция $\operatorname{sh} \frac{\pi}{\zeta}(u-z)$ перейдет в $\operatorname{sh} \pi(u-z)$, а все остальные гиперболические функции перейдут в рациональные. Это и является искомым ответом.

7. Вероятность образования пустоты

В заключение этой лекции мы рассмотрим еще одну корреляционную функцию, которая получила название *вероятность образования пустоты*. Термин этот возник в модели квантового нелинейного уравнения Шрёдингера, где аналогичная корреляционная функция действительно имеет смысл вероятности отсутствия частиц на интервале фиксированной длины. Аналогичный смысл можно придать этому коррелятору и в ХХЗ цепочке, если ввести понятие *квазичастицы*.

Будем считать, что в узле с номером k находится квазичастица, если в этом узле спин направлен вниз. Если же спин направлен вверх, то квазичастицы нет. Тогда вектор вакуума $|0\rangle$ — это состояние без квазичастиц. Он-shell вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ с $\#\bar{u} = n$ — это состояние с n квазичастицами. Следует только помнить, что положение этих квазичастиц не фиксировано. Вектор $B(\bar{u})|0\rangle$ является линейной комбинацией состояний, в каждом из которых квазичастицы занимают фиксированные узлы j_1, \dots, j_n . Сумма в этой линейной комбинации ведется по всем возможным номерам этих узлов (см. (11.2.28)).

Рассмотрим предел оператора $\mathcal{Q}_{1,m}^{(\kappa)}$ при $\kappa \rightarrow 0$ (или, что то же самое, при $\beta \rightarrow -\infty$). В силу (4.5), получаем

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \mathcal{Q}_{1,m}^{(\kappa)} = \mathcal{Q}_{1,m}^{(0)} = \prod_{k=1}^m E_k^{11}. \quad (7.1)$$

Иными словами, оператор $\mathcal{Q}_{1,m}^{(0)}$ — это проектор на такие состояния, в которых в узлах с номерами $1, \dots, m$ нет квазичастиц. Поэтому если $B(\bar{u})|0\rangle$ — основное состояние, то величина

$$P_m = \frac{\langle 0|C(\bar{u})\mathcal{Q}_{1,m}^{(0)}B(\bar{u})|0\rangle}{\langle 0|C(\bar{u})B(\bar{u})|0\rangle} \quad (7.2)$$

имеет смысл вероятности образования пустоты (в смысле отсутствия квазичастиц) в основном состоянии на интервале длины m .

На стандартном языке P_m — это вероятность обнаружить в основном состоянии кластер из m частиц со спинами вверх. Поскольку основное состояние симметрично относительно замен

спинов вверх на спины вниз, вероятность обнаружить кластер из m частиц со спинами вниз⁷ также равна P_m . Поэтому наряду с пределом $\kappa \rightarrow 0$, мы также можем рассматривать предел $\kappa \rightarrow \infty$

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \kappa^{-m} Q_{1,m}^{(\kappa)} = \prod_{k=1}^m E_k^{22}, \quad (7.3)$$

когда оператор $Q_{1,m}^{(\kappa)}$ превращается в проектор на состояния со спинами вниз в узлах с номерами $1, \dots, m$. Отсюда мы заключаем, что вероятность образования пустоты возникает в двух предельных случаях производящего функционала $Q_m^{(\kappa)}$:

$$P_m = \lim_{\kappa \rightarrow 0} Q_m^{(\kappa)} = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \kappa^{-m} Q_m^{(\kappa)}. \quad (7.4)$$

Обратимся теперь к интегральному представлению (5.64) для производящего функционала $Q_m^{(\kappa)}$. В этом интегральном представлении параметр κ входит только в детерминант $M_s(\bar{z}; \bar{u})$ (5.66). Очевидно, что при фиксированном s этот детерминант является полиномом по κ степени s . Поэтому если мы воспользуемся второй формулой (7.4) (где $\kappa \rightarrow \infty$), то во всей сумме по s останется лишь одно слагаемое с $s = m$. При этом

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \kappa^{-m} M_m(\bar{z}; \bar{u}) = \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^m \frac{\text{sh}(u_k - z_j - i\zeta)}{\text{sh}(z_j - u_k - i\zeta)} \det_m t(u_k, z_j). \quad (7.5)$$

Тогда мы получаем

$$P_m = \frac{1}{(-i \sin \zeta)^m (m!)^2} \oint_{\Gamma(-\frac{i\zeta}{2})} \prod_{j=1}^m \frac{dz_j}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^m du_j \prod_{j=1}^m \varphi^m(z_j) \varphi^{-m}(u_j) \\ \times \prod_{j=1}^s \prod_{k=1}^s \frac{\text{sh}^2(u_j - z_k - i\zeta)}{\text{sh}(z_j - z_k - i\zeta) \text{sh}(u_j - u_k - i\zeta)} \det_m t(u_k, z_j) \det_m \left[\frac{i}{2\zeta \text{sh} \frac{\pi}{\zeta}(u_j - z_k)} \right]. \quad (7.6)$$

В получившемся представлении можно избавиться от интегралов по переменным z_k , если искусственно ввести неоднородности. А именно, сделаем следующую замену функций $\varphi^m(z)$ и $\varphi^{-m}(u)$:

$$\varphi^m(z) = \left(\frac{\text{sh}(z - \frac{i\zeta}{2})}{\text{sh}(z + \frac{i\zeta}{2})} \right)^m \rightarrow \prod_{k=1}^m \frac{\text{sh}(z - \xi_k - i\zeta)}{\text{sh}(z - \xi_k)}, \\ \varphi^{-m}(u) = \left(\frac{\text{sh}(u + \frac{i\zeta}{2})}{\text{sh}(u - \frac{i\zeta}{2})} \right)^m \rightarrow \prod_{k=1}^m \frac{\text{sh}(u - \xi_k)}{\text{sh}(u - \xi_k - i\zeta)}.$$

Здесь $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ — набор параметров, лежащих в окрестности точки $-i\zeta/2$. Ясно, что исходные функции $\varphi^m(z)$ и $\varphi^{-m}(u)$ возникают в пределе $\xi_k \rightarrow -i\zeta/2$. Модифицированную таким образом вероятность образования пустоты обозначим через $P_m(\bar{\xi})$. Тогда

$$P_m(\bar{\xi}) = \frac{1}{(-i \sin \zeta)^m (m!)^2} \oint_{\Gamma(\bar{\xi})} \prod_{j=1}^m \frac{dz_j}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^m du_j \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^m \frac{\text{sh}(z_j - \xi_k - i\zeta) \text{sh}(u_j - \xi_k)}{\text{sh}(z_j - \xi_k) \text{sh}(u_j - \xi_k - i\zeta)} \\ \times \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^m \frac{\text{sh}^2(u_j - z_k - i\zeta)}{\text{sh}(z_j - z_k - i\zeta) \text{sh}(u_j - u_k - i\zeta)} \det_m t(u_k, z_j) \det_m \left[\frac{i}{2\zeta \text{sh} \frac{\pi}{\zeta}(u_j - z_k)} \right]. \quad (7.7)$$

⁷На языке квазичастиц такую вероятность можно было бы назвать вероятностью образования полноты.

Теперь в интегралах по переменным z_j вместо полюсов порядка m мы имеем только простые полюсы в точках ξ_k . Поскольку число переменных интегрирования равно числу полюсов, интеграл по всем z_j легко берется. Он равен сумме вычетов в точках $z_j = \xi_{P(j)}$, где P — любая перестановка в наборе $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$. Однако в силу симметрии подынтегрального выражения по переменным z_j , мы можем взять вычеты только в точках $z_j = \xi_j$ и умножить получившийся ответ на $m!$. В результате мы получаем новое представление, уже не содержащее контурных интегралов:

$$P_m(\bar{\xi}) = \frac{1}{(-i \sin \zeta)^m m!} \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m \frac{1}{\text{sh}(\xi_j - \xi_k)} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^m du_j \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^m \frac{\text{sh}(u_j - \xi_k - i\zeta) \text{sh}(u_j - \xi_k)}{\text{sh}(u_j - u_k - i\zeta)} \\ \times \det_m \left[\frac{-\sin^2 \zeta}{\text{sh}(u_j - \xi_k) \text{sh}(u_j - \xi_k - i\zeta)} \right] \det_m \left[\frac{i}{2\zeta \text{sh} \frac{\pi}{\zeta}(u_j - \xi_k)} \right]. \quad (7.8)$$

Таким образом, мы вычислили интегралы по переменным z_j , однако это произошло не бесплатно. Теперь для вычисления вероятности образования пустоты нам придется брать предел $\xi_k \rightarrow -i\zeta/2$, а эта процедура далеко не тривиальна.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно ввести неоднородности ξ_k и в интегральном представлении для производящего функционала $Q_m^{(\kappa)}$, что позволит вычислить интегралы по переменным z_j . Однако в этом случае в s -м члене суммы количество переменных интегрирования равно s , а количество полюсов равно m . Поэтому результат интегрирования даст сумму по разбиениям набора $\bar{\xi}$, а не одно слагаемое, как в случае вероятности образования пустоты.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Представление для вероятности образования пустоты возникло в пределе производящего функционала $Q_m^{(\kappa)}$ при $\kappa \rightarrow \infty$, а сам производящий функционал был получен путем суммирования формфакторов. Однако интегральное представление (7.8) может быть выведено гораздо более простым способом. С учетом формулы (7.3) и формул квантовой обратной задачи, можно легко убедиться, что

$$P_m(\bar{\xi}) = \prod_{k=1}^m \frac{1}{\tau(\xi_k | \bar{u})} \frac{\langle 0 | C(\bar{u}) \prod_{k=1}^m D(\xi_k) B(\bar{u}) | 0 \rangle}{\langle 0 | C(\bar{u}) B(\bar{u}) | 0 \rangle}. \quad (7.9)$$

Действие произведения операторов $D(\xi_k)$ на вектор Бете $B(\bar{u})|0\rangle$ нам известно (8.4.3). Оно дается суммой по разбиениям набора $\{\bar{\xi}, \bar{u}\}$. Однако в неоднородной модели $d(\xi_k) = 0$, поэтому в этой сумме выживают лишь те слагаемые, которые соответствуют разбиениям только набора \bar{u} . Именно эта сумма по разбиениям в термодинамическом пределе превращается в интеграл по переменным u_j подобно тому, как это произошло с производящим функционалом $Q_m^{(\kappa)}$. Интересующийся читатель может самостоятельно в этом убедиться.

7.1. Вероятность образования пустоты при $\Delta = 1/2$. При значении параметра анизотропии $\Delta = 1/2$ (т.е. $\zeta = \pi/3$) в представлении (7.8) можно явно вычислить все интегралы по переменным u_j . Перепишем формулу (7.8) для $\zeta = \pi/3$:

$$P_m(\bar{\xi}) = \frac{1}{(-i \sin \frac{\pi}{3})^m m!} \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m \frac{1}{\text{sh}(\xi_j - \xi_k)} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^m du_j \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^m \frac{\text{sh}(u_j - \xi_k - \frac{i\pi}{3}) \text{sh}(u_j - \xi_k)}{\text{sh}(u_j - u_k - \frac{i\pi}{3})} \\ \times \det_m \left[\frac{-\sin^2 \frac{\pi}{3}}{\text{sh}(u_j - \xi_k) \text{sh}(u_j - \xi_k - \frac{i\pi}{3})} \right] \det_m \left[\frac{3i}{2\pi \text{sh} 3(u_j - \xi_k)} \right]. \quad (7.10)$$

Основное упрощение подынтегрального выражения при $\zeta = \pi/3$ основано на элементарной формуле

$$\operatorname{sh} 3x = 4 \operatorname{sh} x \operatorname{sh}\left(x + \frac{i\pi}{3}\right) \operatorname{sh}\left(x - \frac{i\pi}{3}\right), \quad (7.11)$$

которой мы уже пользовались в лекции 7.

Проведем ряд предварительных преобразований. Во-первых, перепишем одно из двойных произведений следующим образом:

$$\prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^m \operatorname{sh}\left(u_j - u_k - \frac{i\pi}{3}\right) = (-i \sin \frac{\pi}{3})^m (-1)^{m(m-1)/2} \prod_{j>k}^m \operatorname{sh}\left(u_j - u_k - \frac{i\pi}{3}\right) \operatorname{sh}\left(u_j - u_k + \frac{i\pi}{3}\right). \quad (7.12)$$

Тогда с учетом (7.11) имеем

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^m \frac{\operatorname{sh}\left(u_j - \xi_k - \frac{i\pi}{3}\right) \operatorname{sh}\left(u_j - \xi_k\right)}{\operatorname{sh}\left(u_j - u_k - \frac{i\pi}{3}\right)} \\ = \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{2^{m^2+m} (-i \sin \frac{\pi}{3})^m} \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^m \frac{\operatorname{sh} 3(u_j - \xi_k)}{\operatorname{sh}\left(u_j - \xi_k + \frac{i\pi}{3}\right)} \prod_{j>k}^m \frac{\operatorname{sh}\left(u_j - u_k\right)}{\operatorname{sh} 3(u_j - u_k)}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Во-вторых, один из детерминантов в представлении (7.8) явно вычисляется по формуле (7.2.8)

$$\det_m \left[\frac{3i}{2\pi \operatorname{sh} 3(u_j - \xi_k)} \right] = \left(\frac{3i}{2\pi} \right)^m \frac{\prod_{j>k}^m \operatorname{sh} 3(u_j - u_k) \operatorname{sh} 3(\xi_k - \xi_j)}{\prod_{j,k=1}^m \operatorname{sh} 3(u_j - \xi_k)}. \quad (7.14)$$

Комбинируя (7.13) и (7.14), получаем

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^m \frac{\operatorname{sh}\left(u_j - \xi_k - \frac{i\pi}{3}\right) \operatorname{sh}\left(u_j - \xi_k\right)}{\operatorname{sh}\left(u_j - u_k - \frac{i\pi}{3}\right)} \det_m \left[\frac{3i}{2\pi \operatorname{sh} 3(u_j - \xi_k)} \right] \\ = \left(\frac{3i}{2\pi} \right)^m \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{2^{m^2+m} (-i \sin \frac{\pi}{3})^m} \frac{\prod_{j>k}^m \operatorname{sh}\left(u_j - u_k\right) \operatorname{sh} 3(\xi_k - \xi_j)}{\prod_{j,k=1}^m \operatorname{sh}\left(u_j - \xi_k + \frac{i\pi}{3}\right)} \\ = \left(\frac{3i}{2\pi} \right)^m \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{2^{m^2+m} (-i \sin \frac{\pi}{3})^m} \prod_{j>k}^m \frac{\operatorname{sh} 3(\xi_k - \xi_j)}{\operatorname{sh}(\xi_k - \xi_j)} \det_m \left[\frac{1}{\operatorname{sh}\left(u_j - \xi_k + \frac{i\pi}{3}\right)} \right]. \end{aligned} \quad (7.15)$$

В результате этих преобразований интегральное представление для $P_m(\bar{\xi})$ принимает вид

$$\begin{aligned} P_m(\bar{\xi}) = \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{m! 2^{m^2}} \left(\frac{3i}{4\pi} \right)^m \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m \frac{1}{\operatorname{sh}(\xi_j - \xi_k)} \prod_{j>k}^m \frac{\operatorname{sh} 3(\xi_k - \xi_j)}{\operatorname{sh}(\xi_k - \xi_j)} \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \dots du_m \det_m \left[\frac{1}{\operatorname{sh}(u_j - \xi_k) \operatorname{sh}\left(u_j - \xi_k - \frac{i\pi}{3}\right)} \right] \det_m \left[\frac{1}{\operatorname{sh}\left(u_j - \xi_k + \frac{i\pi}{3}\right)} \right]. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Теперь интеграл по переменным u_j берется с помощью следующей леммы.

ЛЕММА 7.1. Пусть $F_j(u)$ и $G_j(u)$ — набор функций, интегрируемых с квадратом на интервале $[a, b]$ (a и b могут быть бесконечными). Тогда

$$\int_a^b \det_m F_k(u_j) \det_m G_k(u_j) du_1 \dots du_m = m! \det_m \left(\int_a^b F_j(u) G_k(u) du \right). \quad (7.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}
\int_a^b \det_m F_k(u_j) \det_m G_k(u_j) du_1 \dots du_m &= \sum_P (-1)^{|P|} \int_a^b \prod_{j=1}^m F_j(u_{P(j)}) \cdot \det_m G_k(u_j) du_1 \dots du_m \\
&= \sum_P (-1)^{|P|} \int_a^b \prod_{j=1}^m F_j(u_j) \cdot \det_m G_k(u_{P^{-1}(j)}) du_1 \dots du_m \\
&= \sum_P (-1)^{|P|} \int_a^b \prod_{j=1}^m F_j(u_j) \cdot \det_m G_k(u_j) \cdot (-1)^{|P|} du_1 \dots du_m \\
&= m! \int_a^b \prod_{j=1}^m F_j(u_j) \cdot \det_m G_k(u_j) du_1 \dots du_m. \quad (7.18)
\end{aligned}$$

Поясним сделанные преобразования. Сначала мы записали первый из детерминантов согласно его определению. Далее в каждом члене суммы по перестановкам была сделана замена переменных интегрирования $u_{P(j)} \rightarrow u_j$. При такой замене во втором детерминанте происходит перестановка строк. Возвращая эти строки на исходные места, мы получаем дополнительный знак $(-1)^{|P|}$, который сокращается с исходным $(-1)^{|P|}$. Так как после этого от перестановки ничего не зависит, сумма по этим перестановкам дает $m!$. По сути доказано, что так как исходное подынтегральное выражение было симметричным по переменным u_1, \dots, u_m , то каждый член суммы по перестановкам дает тот же вклад, что и произведение диагональных членов первой матрицы.

Продолжим преобразования далее:

$$\begin{aligned}
m! \int_a^b \prod_{j=1}^m F_j(u_j) \cdot \det_m G_k(u_j) du_1 \dots du_m &= m! \int_a^b \det_m (F_j(u_j) G_k(u_j)) du_1 \dots du_m \\
&= m! \det_m \left(\int_a^b F_j(u_j) G_k(u_j) du_j \right). \quad (7.19)
\end{aligned}$$

Снова сделаем пояснения. Каждый из сомножителей функций $F_j(u_j)$ вносится в соответствующую строку второго детерминанта. Теперь каждая переменная интегрирования u_j входит только в j -ю строчку, следовательно, можно выполнить интегрирование построчно. Остается удалить у каждой переменной интегрирования индекс j , и мы приходим к утверждению леммы. \square

В нашем случае

$$\begin{aligned}
F_k(u_j) &= \frac{1}{\operatorname{sh}(u_j - \xi_k) \operatorname{sh}(u_j - \xi_k - \frac{i\pi}{3})}, \\
G_k(u_j) &= \frac{1}{\operatorname{sh}(u_j - \xi_k + \frac{i\pi}{3})},
\end{aligned} \quad (7.20)$$

а контур интегрирования $[a, b]$ представляет собой вещественную ось \mathbb{R} . Поэтому нам надо вычислить интеграл

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\operatorname{sh}(u - \xi_j) \operatorname{sh}(u - \xi_j - \frac{i\pi}{3}) \operatorname{sh}(u - \xi_k + \frac{i\pi}{3})}. \quad (7.21)$$

Значение этого интеграла зависит от мнимых частей параметров неоднородностей ξ_j . Поэтому удобно положить $\xi_j = \epsilon_j - \frac{i\pi}{6}$, и тогда мы можем считать, что $\operatorname{Im}(\epsilon_j) = 0$, а в однородном пределе $\epsilon_j \rightarrow 0$. Тогда интеграл принимает вид

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\operatorname{sh}(u - \epsilon_j + \frac{i\pi}{6}) \operatorname{sh}(u - \epsilon_j - \frac{i\pi}{6}) \operatorname{sh}(u - \epsilon_k + \frac{i\pi}{2})}. \quad (7.22)$$

Данный интеграл элементарно вычисляется по вычетам. Действительно, мы можем заменить интеграл по вещественной оси на интеграл по замкнутому контуру, состоящему из \mathbb{R} , $\mathbb{R} + i\pi$ (в отрицательном направлении) и двух вертикальных отрезков $[\Lambda, \Lambda + i\pi]$ и $[-\Lambda, -\Lambda + i\pi]$ при $\Lambda \rightarrow \infty$. Ясно, что вклад от вертикальных отрезков стремится к нулю, а интеграл в отрицательном направлении по $\mathbb{R} + i\pi$ равен J в силу антипериодичности подынтегрального выражения. Поэтому

$$J = \sum \operatorname{Res} \frac{i\pi}{\operatorname{sh}(u - \epsilon_j + \frac{i\pi}{6}) \operatorname{sh}(u - \epsilon_j - \frac{i\pi}{6}) \operatorname{sh}(u - \epsilon_j + \frac{i\pi}{2})} \Big|_{u=\epsilon_j + \frac{i\pi}{6}; u=\epsilon_j + \frac{5i\pi}{6}; u=\epsilon_k + \frac{i\pi}{2}}. \quad (7.23)$$

После несложных вычислений находим

$$J = -4\pi i \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\epsilon_j - \epsilon_k)}{\operatorname{sh} \frac{3}{2}(\epsilon_j - \epsilon_k)} \quad (7.24)$$

и, следовательно,

$$P_m(\bar{\epsilon}) = \frac{(-1)^{m(m-1)/2} 3^m}{2^{m^2}} \prod_{j>k}^m \frac{\operatorname{sh} 3(\epsilon_k - \epsilon_j)}{\operatorname{sh}(\epsilon_k - \epsilon_j)} \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m \frac{1}{\operatorname{sh}(\epsilon_j - \epsilon_k)} \det_m \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\epsilon_j - \epsilon_k)}{\operatorname{sh} \frac{3}{2}(\epsilon_j - \epsilon_k)} \right]. \quad (7.25)$$

В получившемся представлении все интегралы уже взяты, и нам осталось только перейти к однородному пределу $\epsilon_j \rightarrow 0$. Заметим, что детерминант в формуле (7.25) очень похож на тот, с которым мы уже сталкивались при изучении матриц чередующихся знаков. Несложно сделать этот детерминант не просто похожим, а в точности таким же. Для этого введем дополнительный набор переменных $\{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_m\}$. Тогда

$$\lim_{\substack{\epsilon_j \rightarrow 0 \\ j,k=1 \\ j \neq k}}^m \prod \frac{1}{\operatorname{sh}(\epsilon_j - \epsilon_k)} \det_m \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\epsilon_j - \epsilon_k)}{\operatorname{sh} \frac{3}{2}(\epsilon_j - \epsilon_k)} \right] = \lim_{\substack{\epsilon_j \rightarrow 0 \\ \epsilon'_k \rightarrow 0}}^m \prod_{j>k} \frac{1}{\operatorname{sh}(\epsilon_j - \epsilon_k) \operatorname{sh}(\epsilon'_j - \epsilon'_k)} \det_m \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\epsilon_j - \epsilon'_k)}{\operatorname{sh} \frac{3}{2}(\epsilon_j - \epsilon'_k)} \right]. \quad (7.26)$$

Действительно, в силу предложения 7.2.1 предел в правой части (7.26) существует и не зависит от того, как именно параметры ϵ_j и ϵ'_j стремятся к своим предельным значениям. Поскольку все они стремятся к нулю, то мы можем перед взятием предела положить $\epsilon_j = \epsilon'_j$, что дает нам левую часть равенства (7.26).

С помощью вспомогательного набора переменных $\{\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_m\}$ представление для вероятности образования пустоты записывается следующим образом:

$$P_m = \frac{3^m}{2^{m^2}} \lim_{\substack{\epsilon_j \rightarrow 0 \\ \epsilon'_k \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{sh} 3(\epsilon_k - \epsilon_j)}{\operatorname{sh}(\epsilon_k - \epsilon_j)} \prod_{j>k}^m \frac{1}{\operatorname{sh}(\epsilon_j - \epsilon_k) \operatorname{sh}(\epsilon'_j - \epsilon'_k)} \det_m \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\epsilon_j - \epsilon'_k)}{\operatorname{sh} \frac{3}{2}(\epsilon_j - \epsilon'_k)} \right]. \quad (7.27)$$

Теперь мы можем положить $\epsilon_j = 2\epsilon j$, $\epsilon'_k = 2\epsilon(1 - k)$ и рассмотреть предел $\epsilon \rightarrow 0$. Тогда получим

$$P_m = (-1)^{m(m-1)/2} 3^{m(m+1)/2} 2^{-m^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \prod_{j>k}^m \frac{1}{\operatorname{sh}^2 2\epsilon(j - k)} \det_m \left[\frac{\operatorname{sh} \epsilon(j + k - 1)}{\operatorname{sh} 3\epsilon(j + k - 1)} \right]. \quad (7.28)$$

А это уже в точности детерминант (7.2.5), с которым мы встречались при изучении матриц чередующихся знаков. Мы знаем, что этот детерминант равен

$$\det_m \left[\frac{\operatorname{sh} \epsilon(j + k - 1)}{\operatorname{sh} 3\epsilon(j + k - 1)} \right] = 2^{m^2 - m} \prod_{j>k}^m \operatorname{sh}^2 3\epsilon(j - k) \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^m \frac{\operatorname{sh} \epsilon(1 + 3(j - k))}{\operatorname{sh} 3\epsilon(j + k - 1)}. \quad (7.29)$$

Подставляя это выражение в (7.28) и вычисляя тривиальный предел $\epsilon \rightarrow 0$, находим

$$P_m = (-1)^{m(m-1)/2} 3^{(3m^2-m)/2} 2^{-m^2} \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^m \frac{j-k+1/3}{j+k-1}. \quad (7.30)$$

Осталось повторить уже один раз проделанные выкладки, и в конечном итоге мы получаем ответ

$$P_m = \frac{\mathcal{A}_m}{2^{m^2}}, \quad (7.31)$$

где \mathcal{A}_m — число матриц чередующихся знаков размера $m \times m$:

$$\mathcal{A}_m = \prod_{k=0}^{m-1} \frac{(3k+1)!}{(m+k)!}. \quad (7.32)$$

Итак, мы получили точный ответ для вероятности образования пустоты при значении параметра анизотропии $\Delta = 1/2$. Это произошло благодаря полной факторизации m -кратного интеграла по переменным u_j в представлении (7.8). Подобная факторизация имеет место еще в двух случаях. Первый из них — это $\Delta = 0$ (т.е. $\zeta = \pi/2$). Однако этот случай соответствует свободным фермионам, и поэтому факторизация m -кратного интеграла вполне ожидаема. Наоборот, было бы удивительно, если бы она не случилась. Мы предлагаем читателю самостоятельно рассмотреть этот случай.

Второй случай — это значение $\Delta = 1/\sqrt{2}$ (т.е. $\zeta = \pi/4$). В этом случае тоже происходит полная факторизация, однако аналог представления (7.25) в случае $\Delta = 1/\sqrt{2}$ содержит детерминант матрицы, которая имеет гораздо более сложную структуру, чем матрица в формуле (7.25). Вопрос о вычислении ее детерминанта остается открытым.

Вообще говоря, факторизация кратных интегралов в представлениях для корреляционных функций в XXZ цепочке Гейзенберга возможна и в случае произвольного Δ (см. [28]). Однако все подобные ответы получены в рамках неоднородной модели. Для получения окончательных результатов необходимо еще вычислить однородный предел. Это далеко непростая задача, которая на сегодняшний день была решена лишь в ряде частных случаев.

Список литературы

- [1] Н. Bethe, “Eigenwerte und Eigenfunktionen Atomkette”, *Zeitschrift für Physik*, **71** (1931), 205–226.
- [2] М. Годен, *Волновая функция Бете*, Мир, Москва, 1987.
- [3] В. Е. Корепин, Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, *Квантовый метод обратной задачи и корреляционные функции*, Наука, Москва, 1991.
- [4] Е. К. Склянин, “Квантовый вариант метода обратной задачи рассеяния”, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **95**, 1980, 55–128.
- [5] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Квантовый метод обратной задачи. I”, *ТМФ*, **40** (1979), 688–706.
- [6] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга”, *УМН*, **34** (1979), 13–63.
- [7] L. D. Faddeev, in: *Les Houches Lectures Quantum Symmetries*, eds. A. Connes et al., North Holland, 1998, 149.
- [8] R. I. Nepomechie, C. Wang, *Twisting singular solutions of Bethe’s equations*, arXiv:1409.7382.
- [9] V. Tarasov, A. Varchenko *Bases of Bethe vectors and difference equations with regular singular points*, arXiv:q-alg/9504011.
- [10] Т. Holstein, Н. Primakoff, “Field dependence of the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet”, *Phys. Rev.*, **58**:12 (1940), 1098–1113.
- [11] Р. Бакстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, Мир, Москва, 1985.
- [12] В. Е. Корепин, “Calculation of norms of Bethe wave functions”, *Comm. Math. Phys.*, **86** (1982), 391–418.
- [13] А. Г. Изергин, “Статистическая сумма шестивершинной модели в конечном объеме”, *ДАН СССР*, **297** (1987), 331–333.
- [14] D. Bressoud, *Proofs and confirmations: The story of the alternating sign matrix conjecture*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1999.
- [15] W. H. Mills, D. P. Robbins, Н. Rumsey, “Proof of the Macdonald conjecture”, *Invent. Math.*, **66** (1982), 73–87.
- [16] D. Zeilberger, “Proof of the alternating sign matrix conjecture”, *Elec. J. Comb.*, **3**:2 (1996), R13; arXiv:math/9407211.
- [17] G. Kuperberg, “Another proof of the alternating sign matrix conjecture”, *Internat. Math. Res. Notices*, **1996**:3 (1996), 139–150; arXiv:math/9712207.
- [18] J. M. Maillet, V. Terras, “On the quantum inverse scattering problem”, *Nucl. Phys.*, **B575** (2000), 627–644; arXiv:hep-th/9911030.
- [19] А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, “The quantum inverse scattering method approach to correlation functions”, *Comm. Math. Phys.*, **94** (1981), 67–92.
- [20] Н. А. Славнов, “Алгебраический анзац Бете и квантовые интегрируемые системы”, *УМН*, **62**:4 (2007), 91–132.
- [21] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, “Master equation for spin-spin correlation functions of the XXZ chain”, *Nucl. Phys. B*, **712**:3 (2005), 600–622; arXiv:hep-th/0406190.
- [22] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras, “Dynamical correlation functions of the XXZ spin-1/2 chain”, *Nucl. Phys. B*, **729**:3 (2005), 558–580; arXiv:hep-th/0407108.
- [23] F. Göhmann, A. Klümper, A. Seel, “Integral representations for correlation functions of the XXZ chain at finite temperature”, *J. Phys. A*, **37** (2004), 7625–7652; arXiv:hep-th/0405089.
- [24] A. Seel, T. Bhattacharyya, F. Göhmann, A. Klümper, “A note on the spin-1/2 XXZ chain concerning its relation to the Bose gas”, *J. Stat. Mech.*, 2007, P08030; arXiv:0705.3569.
- [25] A. Klümper, “Thermodynamics of the anisotropic spin-1/2 Heisenberg chain and related quantum chains”, *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, **91**:4 (1993), 507–519; arXiv:cond-mat/9306019.
- [26] P. Jordan, E. Wigner, “Über das Paulische Äquivalenzverbot”, *Zeitschrift für Physik*, **47**:9 (1928), 631–651.
- [27] D. B. Creamer, H. B. Thacker, D. Wilkinson, “Gel’fand-Levitan method for operator fields”, *Phys. Rev. D*, **21** (1980), 1523–1528.
- [28] Н. Е. Боос, F. Göhmann, A. Klümper, J. Suzuki, “Factorization of multiple integrals representing the density matrix of a finite segment of the Heisenberg spin chain”, *J. Stat. Mech.*, **0604** (2006), P04001; arXiv:hep-th/0603064.

Научное издание

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 27

Никита Андреевич Славнов

Алгебраический анзац Бете

Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.

<http://www.mi.ras.ru/noc/> e-mail: journals@mi.ras.ru
