

Ю. А. СЕМЕНОВ

**ФОРМУЛА ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПОЛУГРУПП,
ОПРЕДЕЛЕННОГО МЕТОДОМ БИЛИНЕЙНЫХ ФОРМ,
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К УРАВНЕНИЮ ШРЕДИНГЕРА**

(Представлено академиком В. С. Владимировым 5 VIII 1971)

Пусть A и B — неограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве \mathcal{H} . Мы будем рассматривать случай, когда алгебраическая сумма $A+B$ может иметь область определения $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \{0\}$. Такая ситуация возникает в квантовой механике многих систем. Для определения гамильтониана системы будем применять метод билинейных форм ^(1, 2). Выбор полного гамильтониана при этом оправдывается с физической точки зрения: для рассматриваемого класса потенциалов фейнмановский интеграл по траекториям сходится к пропагатору, определенному методом билинейных форм. Известно, что в случае потенциалов Като ⁽³⁾ можно воспользоваться теоремой о произведении полугрупп ^(4, 5). В том случае, когда область $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ не плотна в \mathcal{H} , теорема о произведении полугрупп неприменима. Однако в работе ⁽⁶⁾ установлен результат, позволяющий частично обойти указанную трудность.

В настоящей работе мы приводим теорему, позволяющую расширить класс потенциалов, для которых фейнмановский интеграл по траекториям сходится к пропагатору e^{iHt} , где H определяется методом билинейных форм (см. следствия теорем 1 и 2). Изложение приведем в общем виде.

1. Пусть $I[u, v]$ — билинейная форма в \mathcal{H} с областью определения $\mathcal{D}(I) = X \times Y$; $X, Y \subset \mathcal{H}$. По определению, $I^*[v, u] = I[u, v]$ с $\mathcal{D}(I^*) = Y \times X$, где черта означает комплексное сопряжение. Если $X = Y$, то положим

$$\operatorname{Re} I = \frac{1}{2}(I + I^*), \quad \operatorname{Im} I = \frac{1}{2i}(I - I^*).$$

Пусть T и A — линейные операторы в \mathcal{H} такие, что $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(A)$ и $\|Au\| \leq a\|Tu\| + b\|u\| \quad \forall u \in \mathcal{D}(T)$, где a и b — некоторые неотрицательные константы, причем $a < 1$. Тогда говорят, что оператор A T -ограничен. Пусть $\{Z^t, t \geq 0\}$ — полугруппа линейных операторов сжатия класса (C_0) в \mathcal{H} . Пусть C — инфинитезимальный оператор, порождающий полугруппу Z^t . Тогда $-C$ есть максимальный аккретивный (м.а.) оператор, так что $(-C)^{1/2}$ определен и тоже есть м.а. оператор ⁽¹⁾. В частности, если

$$|\operatorname{Im}(-Cu, u)| \leq \gamma \operatorname{Re}(-Cu, u)$$

для некоторого $\gamma > 0$ и $\forall u \in \mathcal{D}(C)$, то мы можем на $\mathcal{D}(C)$ ввести скалярное произведение

$$(u, v)_{\mathcal{H}_C} = \operatorname{Re}(-Cu, v) + \lambda(u, v),$$

где λ — произвольное положительное конечное число. Пополнение $\mathcal{D}(C)$ по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_C} = (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}_C}^{1/2}$ обозначим через \mathcal{H}_C . Очевидно, $\mathcal{H}_C \subset \mathcal{H}$, \mathcal{H}_C плотно в \mathcal{H} и непрерывно в него вложено. отождествляя \mathcal{H} с его антидвойственным пространством и обозначая через \mathcal{H}_C^* пространство,

антидвойственное к \mathcal{H}_C , получаем

$$\mathcal{H}_C \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_C^*, \quad (1)$$

где каждое пространство плотно в последующем.

Предложение 1. Если A есть непрерывное отображение \mathcal{H}_C в \mathcal{H}_C^* (т. е. $A \in L(\mathcal{H}_C, \mathcal{H}_C^*)$), и если, кроме того,

$$|(Au, u)| \geq \gamma \|u\|_{\mathcal{H}_C}^2, \quad \gamma > 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}_C,$$

то A есть изоморфизм из \mathcal{H}_C на \mathcal{H}_C^* .

Действительно, без труда проверяется, что образ \mathcal{H}_C при отображении A плотен и замкнут в \mathcal{H}_C^* .

Как следствие предложения 1 и теоремы Хилле — Йосиды имеем

Предложение 2. Пусть задана некоторая цепочка гильбертовых пространств $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_+^*$, обладающая свойствами, аналогичными свойствам цепочки (1), и пусть $A \in L(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_+^*)$. Предположим, что для некоторых $\lambda > 0$ и $\delta > 0$ справедливо

$$|((-A + \lambda)u, u)| \geq \delta \|u\|_{\mathcal{H}_+}^2, \quad \forall u \in \mathcal{H}_+,$$

и, кроме того, пусть оператор $-A$ аккрегивен. Если A_0 — сужение оператора A на $\mathcal{D}(A_0) = \{u \in \mathcal{H}_+; Au \in \mathcal{H}\}$, то A_0 — инфинитезимальный оператор, порождающий сжимающую полугруппу класса (C_0) .

Теорема 1. Пусть A — инфинитезимальный оператор сжимающей полугруппы P^t класса (C_0) в \mathcal{H} . Предположим, что

$$|\operatorname{Im}(-Au, u)| \leq \gamma \operatorname{Re}(-Au, u)$$

при некотором $\gamma > 0$ и $\forall u \in \mathcal{D}(A)$. Пусть $\mathcal{H}_A \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_A^*$ — цепочка пространств со свойствами (1), построенная по оператору A . A расширяется по непрерывности до оператора $\hat{A} \in L(\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_A^*)$.

Пусть \hat{B} — инфинитезимальный оператор сжимающей полугруппы Q^t класса (C_0) в \mathcal{H} . Предположим, что существует некоторая цепочка гильбертовых пространств $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_+^*$ со свойствами (1); причем выполняются следующие условия:

I) $\|u\|_{\mathcal{H}_+} \geq \nu \|u\|_{\mathcal{H}_A}$ при некотором $\nu > 0$ и $\forall u \in \mathcal{H}_A$;

II) $\mathcal{D}(\hat{B}) \cap \mathcal{H}_+$ плотно в \mathcal{H}_+ и B на этой области расширяется по непрерывности оператора $\hat{B} \in L(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_+^*)$;

III) сужение оператора $(-B)^{1/2}$ на некоторую область, плотную в \mathcal{H}_+ , непрерывно из \mathcal{H}_+ в \mathcal{H} . Сужение оператора $(-B^*)^{1/2}$ на некоторую область, плотную в \mathcal{H}_A , непрерывно из \mathcal{H}_A в \mathcal{H} .

Пусть \hat{B} есть сужение оператора \hat{B} на \mathcal{H}_A . Тогда

а) оператор $\hat{A} + \hat{B}$ имеет сужение C в \mathcal{H} , которое является инфинитезимальным оператором, порождающим сжимающую полугруппу R^t класса (C_0) ;

б) при $n \rightarrow \infty$ произведение $[P^{t/n} Q^{t/n}]^n$ сходится в сильной операторной топологии к R^t .

Замечание. Теорема 1 непосредственно неприменима к уравнению Шредингера, ибо $\operatorname{Re} \left(\frac{i}{2m} \Delta u, u \right) = 0$ при всех $u \in \mathcal{D}(\Delta)$, $m > 0$. Однако справедлива следующая

Теорема 2 (⁶). Пусть A — инфинитезимальный оператор сжимающей полугруппы класса (C_0) в \mathcal{H} . Предположим, что комплексное число σ с $|\sigma| = 1$ может быть выбрано так, что $|\operatorname{Im}(-\sigma Au, u)| \leq \gamma \operatorname{Re}(-\sigma Au, u)$ для некоторого $\gamma > 0$. Пусть $\mathcal{H}_{\sigma A} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{\sigma A}^*$ — цепочка гильбертовых пространств со свойствами (1), построенная по оператору σA . Пусть α есть любое комплексное число такое, что $\operatorname{Re}(\alpha Au, u) \leq 0 \quad \forall u \in \mathcal{D}(A)$. Пусть \hat{B} — диссипативный оператор в $L(\mathcal{H}_{\sigma A}, \mathcal{H}_{\sigma A}^*)$ с нормой, строго меньшей, чем $|\alpha|$.

Тогда $\alpha \hat{A} + \hat{B}$ ($\in L(\mathcal{H}_{\sigma A}, \mathcal{H}_{\sigma A}^*)$) имеет сужение C_α в \mathcal{H} , которое порождает сжимающую полугруппу класса (C_0) , сильно непрерывную по α при фиксированном t .

Следствие из теорем 1 и 2. Пусть $\mathcal{H} = L^2(R^1)$. Пусть V — мультипликативный самосопряженный оператор в \mathcal{H} . Предположим, что оператор $|V|^{1/2} H_0^{1/2}$ ограничен, где $H_0 = -\frac{1}{2m} \Delta$. Построим пространство \mathcal{H}_+ следующим образом. Область $\mathcal{D}(|V|) = \mathcal{D}(V)$ дополним по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_+} = (\cdot, (|V| + 1) \cdot)^{1/2}$.

Тогда

$$\exp(-itH) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} [\exp(-iH_{0,\varepsilon} t/n) \exp(-iVt/n)]^n,$$

где H определен методом билинейных форм и $H_{0,\varepsilon} = -\frac{1}{2(m+i\varepsilon)} \Delta$, $\varepsilon > 0$, $\hbar = 1$.

3. Пусть $\mathcal{H} = L^2(R^3)$.

Пример 1. Рассмотрим $V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} W(x - q_n)$,

где

$$W(x) = \begin{cases} |x|^{-3/2}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

а q_n пробегает все точки в R^3 с рациональными координатами. Тогда

$W \notin L^2(R^3)$, но $W \in L^1(R^3) \cap L^{3/2}(R^3)$. Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \|W(\cdot - q_n)\|_{L^a} < \infty$ для $a = 1, 3/2$, то $V \in L^1 \cap L^{3/2}$. Каждая функция из $\mathcal{D}(H_0) = \mathcal{D}(\Delta)$ непрерывна и ограничена (см. (1), стр. 304). Поэтому $\mathcal{D}(V) \cap \mathcal{D}(H_0) = \{0\}$. В то же время оператор $|V|^{1/2} H_0^{1/2}$ -ограничен для всех $V \in L^{3/2}(R^3)$.

Пример 2. Пусть $V(x)$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию $\|V\|_S^2 = \int |x - y|^{-2} \cdot |V(x)| \cdot |V(y)| dx dy < \infty$. Обозначим множество таких функций через S . В работе (2) показано, что S с нормой $\|\cdot\|_S$ есть полное нормированное пространство и оператор $|V|^{1/2} H_0^{1/2}$ -ограничен. Тогда для каждого вещественного V из $S + L^\infty(R^3)$ справедливо следствие из теорем 1 и 2.

Пример 3. Пусть $g(x)$ — произвольная вещественная измеримая функция с $|g(x)| \leq 1 \quad \forall x \in R^3$. Рассмотрим

$$V_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} W_\alpha(x - q_n) + \beta \cdot g(x) \cdot |x|^{-2},$$

$$\text{где } W_\alpha(y) = \begin{cases} |y|^{-2+\alpha}, & |y| < 1, \quad \alpha \in (0, 2), \quad \beta > \frac{-1}{2m}. \\ 0, & |y| \geq 1 \end{cases}$$

Так как $\|u/|x|\| \leq a \|(-\Delta)^{1/2} u\| + b \|u\|$, $a \leq 2$, $\forall u \in \mathcal{H}_\Delta$ и $\|\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} W_\alpha(\cdot - q_n) |^{1/2} u\| \leq \varepsilon \|(-\Delta)^{1/2} u\| + b' \|u\| \quad \forall \varepsilon > 0, u \in \mathcal{H}_\Delta$, то оператор $|V_\alpha|^{1/2} H_0^{1/2}$ -ограничен.

Таким образом, следствие из теорем 1 и 2 применимо к рассматриваемому потенциалу.

Автор выражает благодарность В. П. Гачку за постановку задачи и внимание к работе.

Институт теоретической физики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
30 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Т. Като, Perturbation Theory for Linear Operators, Grundlehren, 132, Berlin, 1966. ² В. Симон, Doctor Dissertation, Princeton University, 1970. ³ Е. Нельсон, J. Math. Phys., 5, 332 (1964). ⁴ А. В. Скороход, Теория вероятностей и ее применения, 1, 261, (1956). ⁵ Н. Ф. Троттер, Proc. Am. Math. Soc., 10, 545 (1959). ⁶ W. G. Faris, Pacif. J. Math., 22, 47 (1967).