

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. Ya. Rivkind, The steady motion of a viscous deformable drop, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1979, Volume 84, 220–242

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.170

February 10, 2025, 10:42:28



СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ КАПЛИ
С УЧЕТОМ ЕЕ ДЕФОРМАЦИИ

Задача о стационарном осесимметричном движении вязкой капли в жидкости в поле сил тяжести рассматривалась впервые в работах Адамара [1] и Рыбчинского [2]. Ими при предположении, что движение жидкости внутри и вне капли описывается уравнениями Стокса, найдено аналитическое решение задачи. Из него следует, в частности, что капля независимо от ее объема имеет сферическую форму. Слабые деформации капли при малых числах Рейнольдса Re_m ($Re_m = \frac{u_\infty a}{\nu_m}$, u_∞ - скорость невозмущенного потока, a - радиус капли, ν_m кинематические вязкости жидкости внутри ($m=1$) и вне ($m=2$ капли) и большом поверхностном натяжении $\sigma \gg 1$ на границе капля-жидкость исследовались в [3] и др. методами сращиваемых асимптотических разложений. При $0 < Re_m < 100$ и малых числах $We < \frac{1}{2}$ ($We = \frac{\rho_1 u_\infty^2 a}{\sigma}$, ρ_1 - плотность жидкости внутри капли) задача рассматривалась численными методами. В настоящей работе изучается стационарное осесимметричное движение капли при переходных значениях чисел Re_m и We , $0 < We < 5$, $0 < Re_m < 100$. Здесь дан алгоритм решения и приведены результаты численного расчета.

Математически задача формулируется в следующем виде: внутри ($x \in \Omega_1$) и вне ($x \in \Omega_2$) капли движение описывается полной системой уравнений Навье - Стокса

$$-\Delta u_{(l)} + Re_{(l)} (\vec{u}_{(l)}, \nabla) \vec{u}_{(l)} + \nabla q_{(l)} = 0, \quad l=1,2. \quad (1)$$

К ним присоединяется уравнение неразрывности:

$$\operatorname{div} \vec{u}_{(l)} = 0 \quad (2)$$

На неизвестной границе Γ капли ставятся условия согласования

$$|\vec{u}|_{\Gamma} = 0, \quad \vec{u}_{(l)} \cdot \vec{n}|_{\Gamma} = 0, \quad [\vec{\tau} \cdot \vec{T} \cdot \vec{n}]|_{\Gamma} = 0, \quad l=1,2, \quad (3)$$

$$[\vec{n} \cdot \vec{T} \cdot \vec{n}]|_{\Gamma} = -We^{-1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (4)$$

на бесконечности $\vec{u}|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \vec{i}$ (5)

Здесь \vec{i} - орт оси x_1 , $\vec{\tau}$, \vec{n} - единичные вектора касательной

и нормали Γ ; R_k ($k=1,2$) - безразмерные радиусы главных кривизн $R_k = \frac{R_k}{a}$, $u_m = \frac{u_m}{u_\infty}$, $x_m = \frac{x_m}{a}$ - безразмерные скорости и координаты, $q_{(l)} = (P_{(l)} - \frac{\rho a}{u_\infty} x_1)$, $P_{(l)} = \frac{P_{(l)}}{\rho_{(l)} u_\infty^2}$ - давление, $\rho_{(l)}$ - плотность внутри ($l=1$) и вне ($l=2$) капли Γ - тензор напряжений:

$$T_{km} = -\tilde{\lambda} \rho \delta_{km} + \frac{\tilde{\lambda}}{Re_{(l)}} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right), \quad l=1,2$$

$$\delta_{km} = \begin{cases} 1 & k=m \\ 0 & k \neq m \end{cases}, \quad \tilde{\lambda} = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_1 \\ \rho_2 \rho_1^{-1}, & x \in \Omega_2 \end{cases}$$

$$|v||_\Gamma \equiv v_2 - v_1|_\Gamma.$$

В [4] даны теоремы существования и единственности решения поставленной задачи, доказана гладкость решения при определенных ограничениях на параметры Re_m , We . Численное решение (I)-(5) осуществляется в переменных вихрь ξ функция тока Ψ . Функция тока вводится в сферических координатах τ, θ , $u = (u_\tau, u_\theta)$ посредством соотношений

$$u_{(l)\tau} = \frac{1}{\tau^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi_l}{\partial \theta}, \quad u_{(l)\theta} = -\frac{1}{\tau \sin \theta} \frac{\partial \Psi_l}{\partial \tau}. \quad (6)$$

Опишем более подробно алгоритм. Решение проводится методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения берется решение задачи о стационарном осесимметричном движении сферической капли вязкой несжимаемой жидкости в потоке вязкой несжимаемой жидкости. Это движение описывается системой уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial \Psi_l}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\xi_l}{\tau \sin \theta} \right) - \frac{\partial \Psi_l}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\xi_l}{\tau \sin \theta} = \frac{2}{Re_l \sin \theta} E^2 (\xi_l \tau \sin \theta) \quad (7)$$

$$E^2 (\Psi_l) + \xi_l \tau \sin \theta = 0, \quad l=1,2, \quad (8)$$

$$E^2 v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{\sin \theta}{\tau^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right). \quad (9)$$

На границе капли $\tau=1$ выполняются условия непрерывности касательных напряжений

$$[\tilde{\mu}(\xi - 2v_\theta)]|_{\tau=1} = 0, \quad \tilde{\mu} = \begin{cases} \mu & x \in \Omega_1 \\ 1 & x \in \Omega_2 \end{cases}, \quad \mu = \frac{\nu_1 \rho_1}{\nu_2 \rho_2} \quad (10)$$

касательных скоростей,

$$[v_{\theta}]|_{\tau=1} = 0, \quad (II)$$

непротекания

$$\psi_{\ell}|_{\tau=1} = 0, \quad \ell = 1, 2. \quad (I2)$$

На бесконечности ставятся условия невозмущенности потока

$$\psi_2|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{1}{2} \tau^2 \sin \theta. \quad (I3)$$

При численном решении задачи во внешней области вводится новая неизвестная $\Psi^* = \psi_2 - \frac{1}{2} \tau^2 \sin \theta$ и внешность сферы $\tau = 1$ преобразуется преобразованием Кельвина $\rho = \frac{1}{2}$ во внутренность. В новых переменных Ψ^*, ρ, θ уравнение примет вид

$$\begin{aligned} & \rho^3 \sin \theta \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \rho} \rho^3 \frac{Re_2}{2} \left(\frac{\sin 2\theta}{2\rho^2} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta} \right) + \\ & + \rho \sin \theta \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} \rho^2 \left(\rho \cos \theta + \frac{Re_2}{2} \rho \left(\frac{\sin^2 \theta}{\rho} - \rho^2 \frac{\partial \Psi^*}{\partial \rho} \right) \right) + \\ & + \xi_2 \left(\frac{Re_2}{2} \left(\rho^2 \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta} + \rho^3 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \Psi^*}{\partial \rho} \right) - \frac{\rho}{\sin \theta} \right) = 0, \quad (I4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho^4 \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \rho^2} + 2\rho^3 \frac{\partial \Psi^*}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \theta^2} \rho^2 - \rho^2 - \rho^2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta} + \\ & + \frac{1}{2} \xi \sin \theta = 0. \quad (I5) \end{aligned}$$

Для решения задачи (7)-(I2) применялся модифицированный метод Шварца. В нем на каждом "к"-м приближении рассчитывались линеаризованные уравнения (I) и (I4) (значения производных по τ, ρ и θ от функций Ψ и Ψ^* в (7), (I4) берутся с предыдущего слоя) отдельно внутри и вне капли. От $\Psi_e^{(k)}$ ($\ell = 1, 2$) требуется выполнение граничных условий (I2), а для ξ_1 они находятся из уравнения

$$\xi_1^{(k)} \Big|_{\tau=1} = \xi_1^{(k-1)} \Big|_{\tau=1} + \beta (\vartheta_{\theta_2}^{(k-1)} - \vartheta_{\theta_1}^{(k-1)}) \Big|_{\tau=1}, \quad (I6)$$

граничные условия для $\xi_2^{(k)} \Big|_{\tau=1}$ определяется из условия (I0). Постоянная β в (I6) зависит от Re_ρ и μ . Итерационный процесс (I5) сходится в энергетической норме оператора, определяемого (I)-(3), со скоростью K^{-S} , где величина S определяется лишь гладкостью разыскиваемого решения. Для сферической капли при малых числах Re_ρ ($Re_\rho < 1$) и $\mu \sim 1$ степень S может быть сколь угодно велика (скорость его сходимости можно довести до скорости бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если использовать многошаговый (по K) итерационный процесс и выбирать оптимальные параметры итерации β_k . Численное решение уравнений (7)-(9), (II)-(I6) проводилось сеточным методом. Разностная схема при этом строится так, что условия ограниченности при $\tau=0$, $\varphi=0$ выполняются автоматически. При малых и средних числах Re_ρ производные I-го порядка, стоящие в левых частях, (I), (2), (I4), (I5), аппроксимировались центральными разностями. При больших числах Re_ρ ($Re_\rho = 100$ и выше) использовалась монотонная схема А.А. Самарского \bar{S} , обеспечивающая 2-й порядок аппроксимации. Для уравнений (I), (I4) она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (\Lambda_{1h} + \Lambda_{2h}) \xi^h &= \psi^h, \\ (B_{1h} + B_{2h}) \psi^h &= \Phi^h, \end{aligned} \quad (I7)$$

где оператор Λ_{1h} аппроксимирует выражения из (7), включающие производные по τ

$$\begin{aligned} \Lambda_{1h} = & \frac{8\tau_i \sin^2 \theta_j (\tilde{\tau} \xi_{1\tau}^h)_{\tilde{\tau}}}{4\tau_i \sin \theta_j + (h_{\tau_i} + h_{\tau_{i+1}}) |z_{ij}^h|} + \\ & + \frac{z_{ij}^h + |z_{ij}^h|}{2\tau_i} \tau_{i+\frac{1}{2}} \xi_{1\tau}^h + \frac{z_{ij}^h - |z_{ij}^h|}{2\tau_i} \tau_{i-\frac{1}{2}} \xi_{1\tau}^h. \end{aligned} \quad (I8)$$

Оператор Λ_{2h} приближает выражения из (I), включающие производные по

$$\Lambda_{2h} \xi_{ij}^h = \frac{2 \sin \theta_j (\tilde{\sin} \theta \xi_{1\theta}^h)_{\tilde{\theta}}}{2\tau_i \sin \theta_j + (h_{\theta_j} + h_{\theta_{j+1}}) W_{ij}} + \frac{\xi_{1\theta}^h \cdot \sin \theta_{j+\frac{1}{2}}}{\sin \theta_j}$$

$$x(W_{ij}^h + |W_{ij}^h|) + \frac{W_{ij}^h - |W_{ij}^h|}{2 \sin \theta_j} \sin \theta_{j-\frac{1}{2}} \xi_{i\bar{0}}^h \quad (19)$$

Аналогично [6], через $v_\theta, v_{\bar{\theta}}, v_\tau, v_{\bar{\tau}}$ определяются разностные отношения v по θ и τ "вперед" и назад,

$$Z_{ij}^h = \sin \theta_j - \frac{Re_1 (\psi_\theta + \psi_{\bar{\theta}})|_{i,j}}{2\tau_i}, \quad W_{ij}^h = \frac{Re_1 (\psi_\tau + \psi_{\bar{\tau}})|_{i,j}}{2\tau_i}$$

через \tilde{V}_{ij} обозначается значение сеточной функции в точке с номером $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ соответствующей значениям: $\tau_{i+\frac{1}{2}} = \tau_i + \frac{h\tau_{i+1}}{2}$

$\theta_{j+\frac{1}{2}} = \theta_j + \frac{h\theta_{j+1}}{2}$, $\tau_i = \sum_{k=1}^i h\tau_k$, $\theta_j = \sum_{k=1}^j h\theta_k$; h_{τ_i}, h_{θ_j} - шаги сетки по координатам τ, θ . Наконец,

$$\psi_{ij}^h = \xi_{ij}^h \left\{ \frac{Re_1 (\psi_\theta^h + \psi_{\bar{\theta}}^h)}{\tau_i^2} + \frac{Ctg \theta_j (\psi_\tau^h + \psi_{\bar{\tau}}^h) Re_1}{4\tau_i} - \frac{1}{\tau_i \sin \theta} \right\} \quad (20)$$

$$B_{1h} \psi_h = \psi_{\tau\bar{\tau}} \bar{\tau}_i^2, \quad \bar{\tau}_i = \tau_i \quad i \geq 2; \quad \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_0 = 0,$$

$$B_{2h} \psi_h = \psi_{\theta\bar{\theta}} \left(1 + \frac{h_{\theta_j} + h_{\theta_{j+1}}}{2} |Ctg \theta_j|^{-1} + \frac{1}{2} (-Ctg \theta_j + |Ctg \theta_j|) \psi_\theta + \right. \quad (21)$$

$$\left. + \frac{1}{2} (-Ctg \theta_j - |Ctg \theta_j|) \psi_{\bar{\theta}}, \right.$$

$$\Phi_{ij}^h = \xi_{ij}^h \tau_i^3 \sin \theta_j.$$

Узлы i, j выбираются так, чтобы точка $\tau_{\frac{1}{2}} = 0$. Это позволяет автоматически удовлетворить условию ограниченности. Уравнения (17) дополняются граничными условиями (II)-(I3) и (I6).

Аналогично (17)-(21) строится схема и для уравнений (I4)-(I5), описывающих течение внешнего потока. Подобно [7] доказываем, что полученное таким образом решение при достаточно малых Re_ℓ $\ell=1,2$, $h_{\tau_i}, h_{\theta_j} \rightarrow 0$ сходится к точному так, что

$$\sum_{i,j \in \Omega_{h1}} h_{\tau_i} h_{\theta_j} (\sin \theta_j) \tau_i ((\xi_{ij}^h - \xi_{ij}^h)^2 + (\psi_{ij}^h - \psi_{ij}^h)^2) +$$

$$+ \sum_{ij \in \Omega_{h\tau}} h_{\rho_i} h_{\theta_j} (\sin \theta_j) \rho_i ((\xi_{ij} - \xi_{ij}^h)^2 + (\psi_{ij} - \psi_{ij}^h)^2) \leq \\ \leq c (\bar{h}_\tau^2 + \bar{h}_\theta^2), \quad (22)$$

где $\Omega_{h\tau}$ - совокупность узлов сетки для шара $\tau \leq 1$ ($\kappa=1$), $\rho \leq 1$ ($\kappa=2$)

$$\bar{h}_\tau = \frac{1}{\text{mes } \Omega_{h1}} \sum_{\Omega_{h1}} h_\tau h_\theta h_\tau^2 + \frac{1}{\text{mes } \Omega_{h\tau} \Omega_{h\tau}} \sum_{h_\tau \Omega_{h\tau}} h_\tau h_\theta h_\theta^2$$

(и аналогично для \bar{h}_θ). Постоянная c зависит от гладкости точного решения, чисел Re_ν, μ ; $\xi_{ij} = \xi(\tau_i, \theta_j)$, $\psi_{ij} = \psi(\tau_i, \theta_j)$

Для обращения алгебраических систем (I6) в качестве итерационного процесса использовался метод переменных направлений

$$\frac{\xi^{h, k+\frac{1}{2}} - \xi^{h, k}}{(\Delta t)_k} = \Lambda_{1h} \xi^{h, k+\frac{1}{2}} + \Lambda_{2h} \xi^{h, k} - \psi^{h, k}, \quad (23)$$

$$\frac{\xi^{h, k+1} - \xi^{h, k}}{(\Delta t)_k} = \Lambda_{1h} \xi^{h, k+\frac{1}{2}} + \Lambda_{2h} \xi^{h, k+1} - \psi^{h, k+1} \quad (24)$$

Уравнения (23), (24) решаются как внутри, так и вне капли (при соответствующих операторах Λ_{1h} и Λ_{2h}). Граничные условия при $\tau=1$ для ξ_1 выбираются из (I6). Метод переменных направлений строится для ψ^h, ψ^{h*} аналогично (23), (24).

Получив из (II)-(I3), (I6), (I7) поля скоростей и давлений, (давление находится по Ψ , ξ из уравнений Навье - Стокса (I)) находим разность нормальных напряжений. При этом произвольная постоянная в разности нормальных напряжений определяется из условия стационарности движения капли, выражающегося в равенстве движущих сил (поля тяжести) и сил сопротивления. Далее из уравнений средней кривизны (4) находится новая поверхность капли Γ . Обозначим ее через $\tau = \bar{\omega}^\circ(\theta)$. Для $\bar{\omega}^\circ(\theta)$ уравнение можно записать в следующем виде:

$$L\bar{\omega}^\circ - B_0 \cdot \bar{\omega}^\circ \cdot \eta = [\bar{n} \cdot T \cdot \bar{n}]_{\tau=1} \cdot (We), \quad (25)$$

$$[\bar{n} \cdot \bar{T} \cdot \bar{n}]|_{\tau=1} - We = [\bar{n} \cdot \bar{T} \cdot \bar{n}]|_{\tau=-1} (-We) - B_0 \bar{\omega}^\circ \eta, B_0 = \frac{9\alpha^2(\rho_2 - \rho_1)}{\delta}$$

$$L\bar{\omega}^\circ \equiv \frac{\bar{\omega}^\circ(\eta)}{R^{3/2}} \left((1-\eta^2) \frac{d^2\bar{\omega}^\circ}{d\eta^2} - \eta \frac{d\bar{\omega}^\circ}{d\eta} - \bar{\omega}^\circ \right) - \quad (26)$$

$$- R^{-1/2} \left((\bar{\omega}^\circ)^{-1} \frac{d\bar{\omega}^\circ}{d\eta} \eta + 1 \right) - \frac{2(1-\eta^2)}{R^{3/2}} \left(\frac{d\bar{\omega}^\circ}{d\eta} \right)^2,$$

$$R = \omega^2 + (1-\eta^2) \frac{d\omega}{d\eta},$$

где $[\bar{n} \cdot \bar{T} \cdot \bar{n}]|_{\tau=1}$ - скачок нормальных напряжений. Уравнение (26) - вырождающееся неравномерно эллиптическое уравнение. От его решения требуется выполнения условий ограниченности при $\eta = +1$ и $\eta = -1$. Решение задачи (26), как было показано в [4] существует, единственно и является (при соответствующей гладкости $[\bar{n} \cdot \bar{T} \cdot \bar{n}]|_{\tau=1}$) непрерывно дифференцируемым вместе со своими производными до 3-го порядка включительно. Это позволяет на основе оценок решений, полученных в [4], модифицировать L , заменив его монотонным оператором \hat{L} с ограниченной нелинейностью следующего вида

$$\hat{L}\bar{\omega}^\circ = \frac{\hat{\omega}^\circ(\eta)}{\hat{R}^{3/2}} \left((1-\eta^2) \frac{d^2\hat{\omega}^\circ}{d\eta^2} - \eta \frac{d\hat{\omega}^\circ}{d\eta} - \hat{\omega}^\circ \right) -$$

$$- \frac{\hat{\omega}^\circ + \eta \frac{d\hat{\omega}^\circ}{d\eta}}{\hat{R}^{1/2} \hat{\omega}^\circ} - \frac{2(1-\eta^2)}{\hat{R}^{3/2}} \left(\frac{d\hat{\omega}^\circ}{d\eta} \right)^2,$$

$$\hat{\omega}^\circ = \bar{\omega}^\circ \delta\left(\frac{\bar{\omega}^\circ}{2M}\right) + 2M(1-\delta\left(\frac{\bar{\omega}^\circ}{2M}\right)) \text{sign } \bar{\omega}^\circ, \text{sign } \bar{\omega}^\circ = \frac{\bar{\omega}^\circ}{|\bar{\omega}^\circ|},$$

где $0 \leq \delta(\tau) \leq 1$ гладкая срезающая по τ функция равная единице при $\tau \leq 1$ и нулю при $\tau \geq 2$, M - постоянная из опорных оценок для $\bar{\omega}^\circ$; $\max_{-1 \leq \eta \leq 1} |\bar{\omega}^\circ| \leq M$ (см. [8])

$$\left(\frac{d\hat{\omega}^\circ}{d\eta} \right)^2 = \left(\frac{d\bar{\omega}^\circ}{d\eta} \right)^2 \delta\left(\frac{d\bar{\omega}^\circ}{d\eta} \cdot \frac{1}{M_1}\right) + 2M_1^2 \left(1 - \delta\left(\frac{1}{M_1} \frac{d\bar{\omega}^\circ}{d\eta}\right) \right)$$

$$\hat{R} = (\hat{\omega}^\circ)^2 \delta\left(\frac{\bar{\omega}^\circ}{M}\right) + M^2 \left(1 - \delta\left(\frac{\bar{\omega}^\circ}{M}\right) \right) +$$

$$+ (1-\eta^2) \left(\left(\frac{d\bar{\omega}^\circ}{d\eta} \right)^2 \delta\left(\frac{1}{M_1} \frac{d\bar{\omega}^\circ}{d\eta}\right) + M_1^2 \left(1 - \delta\left(\frac{1}{M_1} \frac{d\bar{\omega}^\circ}{d\eta}\right) \right) \right).$$

Приближенное решение уравнения

$$\hat{L}\bar{\omega} - B_0\bar{\omega} \cdot \eta = [\vec{n} \cdot \vec{T} \cdot \vec{n}]_{\tau=1} (We) \quad (27)$$

получается либо методом Галеркина, либо методом конечного элемента высокого порядка точности. Применение же сеточного метода для решения (27), как показали численные эксперименты, требует большого числа узлов сетки и соответственно значительных затрат машинного времени. Методом, аналогичным [4,7] доказывається, что если, в качестве координатных функций выбрать в методе Галеркина полиномы Лежандра $P_n(\eta)$, то оценка скорости сходимости приближенного решения $\bar{\omega}^{\circ,N} = \sum_{k=1}^N c_k P_k(\eta)$ к точному имеет вид

$$\|\bar{\omega}^{\circ} - \bar{\omega}^{\circ,N}\| \equiv \int_{-1}^{+1} ((1-\eta)^2 \left(\frac{d(\bar{\omega}^{\circ} - \bar{\omega}^{\circ,N})}{d\eta} \right)^2 + (\bar{\omega}^{\circ} - \bar{\omega}^{\circ,N})^2) d\eta \leq \\ \leq c \inf_{v^N \in K_N} \|\omega - v^N\|,$$

K_N - подпространство полиномов $\{P_n(\eta)\} n=1, \dots, N$.

Для функций имеющих производные вплоть до 4-го порядка $\|\omega - v^N\| \leq c N^{\alpha}, \alpha < 4$. В численных расчетах число N доходило до сорока.

Наряду с методом Галеркина численное решение проводилось и по схемам конечного элемента (МКЭ) 4-го порядка точности.

В этом случае в качестве координатных функций выбирались кусочно-полиномиальные восполнения с полиномами 4-го и 8-го порядка. При соответствующей гладкости $[\vec{n} \cdot \vec{T} \cdot \vec{n}]_{\tau=1}$ это обеспечивает порядок сходимости $\|\bar{\omega}^{\circ} - \bar{\omega}^{\circ,h}\| \sim O(h^3)$ (при полиномах 8-го порядка $O(h^7)$). Условие ограниченности при $\eta = \pm 1$ выполняются автоматически.

Обозначим оператор, полученный после применения к (27) метода Галеркина через \hat{L}_N (соответственно для метода конечного элемента через \hat{L}_h). Численное решение

$$\hat{L}_N \bar{\omega}^{\circ,N} - B_0 \cdot \bar{\omega}^{\circ,N} \cdot \eta = [\vec{n} \cdot \vec{T} \cdot \vec{n}]_{\tau=1} (We) \quad (28)$$

проводится методом блочной итерации

$$L_{0,N} \bar{\omega}^{\circ,M,K} = L_{0,N} \bar{\omega}^{\circ,M,K-1} - \alpha_1 (\hat{L}_N \bar{\omega}^{\circ,M,K-1} + B_0 \cdot \bar{\omega}^{\circ,M,K-1} - [\vec{n} \cdot \vec{T} \cdot \vec{n}]_{\tau=1}) (We), \quad (29)$$

где $L_{0,N}$ - оператор, получающийся после применения метода Галеркина к оператору

$$L_0 \bar{\omega}^0 \equiv -\frac{d}{dr} (1-r^2) \frac{d\bar{\omega}^0}{dr} - 2\bar{\omega}^0 + B_0 \bar{\omega}^0 r, \quad (30)$$

α_1 - параметр итерации. В [8] и др. показано, что при $-C \frac{We}{(B_0)^2} < \alpha_1 < 0$, $C = \text{Const} > 0$ этот процесс сходится со скоростью бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Итерационный процесс (28) и выводы о его сходимости полностью переносятся и на случай метода конечного элемента. (Здесь лишь участвуют операторы \hat{L}_h, \hat{L}_{oh}). При этом на каждом шагу "к" обращение алгебраических систем проводится методом прогонки. Отметим, что в ряде случаев (например, при $Re_1 = Re_2 = 50$ и $We \sim 3$) было целесообразно в качестве "к"-го приближения выбирать не значение $\bar{\omega}^{0,N,k}$ из (29), а значение $\hat{\omega}^{0,N,k} = \alpha_2 \bar{\omega}^{0,N,k} + (1-\alpha_2) \bar{\omega}^{0,N,k-1}$, причем α_2 можно подбирать так, чтобы обеспечивалась наименьшая невязка в (29). При практическом применении процесс (29) (с учетом последнего замечания) продолжается до тех пор, пока не наступит внутренняя сходимость итераций и уравнение (27) будет выполняться с заданной точностью. (аналогично для МКЭ). Таким образом, строится нулевое приближение для границы капли $\bar{\omega}^0(\theta)$. Далее, оно фиксируется и по нему из (1)-(3), (5) строится новое приближение для полей скоростей и давлений. Для удобства программирования, чтобы граница области была координатной плоскостью и для получения схем достаточно высокого порядка точности, вводятся новые независимые координаты $\theta_1 = \theta$, $r_1 = r/\bar{\omega}^0(\theta)$. Опустим в дальнейшем для сокращения записей индекс 0 — у $\bar{\omega}^0$. Тогда уравнения для Ψ и ξ внутри капли примут вид:

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^{(m)} \frac{\partial^2 v^{(m)}}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^2 a_i^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial y_i} + a^{(m)} v^{(m)} = F^{(m)} \quad (31)$$

где $v^{(1)} \equiv \xi$, $v^{(2)} \equiv \Psi$, $y_1 = r_1$, $y_2 = \theta_1$

$$a_{11}^{(1)} = 2r_1^2 \left(\frac{1}{\omega^2} \left(\frac{d\omega}{d\theta} \right)^2 + 1 \right), \quad a_{22}^{(1)} = 2, \quad a_{21} = a_{12} = -\frac{2r_1}{\omega} \frac{d\omega}{d\theta},$$

$$a_{11}^{(2)} = \frac{4r_1}{\omega^2(\theta)} + \left(\frac{d\omega}{d\theta} \right)^2 \frac{2r_1}{\omega^2} - \frac{2r_1}{\omega} \frac{d\omega}{d\theta} - \frac{2r_1}{\omega} \frac{d\omega}{d\theta} \text{ctg} \theta -$$

$$- \frac{Re_1 r_1}{\omega^3 r_1^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$

$$a_{2}^{(1)} = 2 \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial \Psi_1}{\partial \tau_1} \frac{Re_1}{\omega \sin \theta},$$

$$a^{(1)} = -\frac{2}{\sin^2 \theta} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} \frac{1}{\omega \tau_1 \sin \theta} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial \tau_1} \frac{1}{\sin \theta} \left(-\omega \operatorname{ctg} \theta \frac{d\omega}{d\theta} \right),$$

$$F^{(1)} = 0,$$

$$a_{11}^{(2)} = \tau_1^2 \left(\frac{1}{\omega^2} \left(\frac{d\omega}{d\theta} \right)^2 + 1 \right), a_{22} = 1, a_{12} = a_{21} = -\frac{\tau_1}{\omega} \frac{d\omega}{d\theta},$$

$$a_1^{(2)} = \frac{2\tau_1}{\omega^2} \left(\frac{d\omega}{d\theta} \right)^2 - \frac{\tau_1}{\omega^2} \left(\frac{d^2\omega}{d\theta^2} \right) + \frac{\operatorname{ctg} \theta \tau_1}{\omega_1} \frac{d\omega}{d\theta},$$

$$a_2^{(2)} = -\operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta}, \quad F^{(2)} = -\tau_1^3 \omega^3 \sin \theta \xi_1.$$

Во внешности капли делается преобразование $\rho_1 = \frac{1}{\tau_1}$ и функция тока Ψ преобразуется к виду $\Psi^* = \Psi - \frac{1}{2} \tau_1^2 \sin^2 \theta \omega^2(\theta)$ (32)

Тогда уравнения во внешнем потоке можно записать в виде:

$$\sum_{ij=1}^2 a_{ji}^{(m)} \frac{\partial^2 v^{(m)}}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^2 a_i^{(m)} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial y_i} + a^{(m)} v^{(m)} = F^{(m)} \quad (33)$$

$$v^{(3)} = \xi_2, \quad v^{(4)} = \Psi^*,$$

$$a_{11}^{(3)} = \frac{2\rho_1^3}{\omega^2} \left(\frac{d\omega}{d\theta} \right)^2 + 2\rho_1^3, \quad a_{22}^{(3)} = \frac{2\rho_1}{\omega^2}, \quad a_{12}^{(3)} = a_{21}^{(3)} = \frac{2\rho_1^2}{\omega} \frac{d\omega}{d\theta}$$

$$a_1^{(3)} = \frac{2\rho_1^2}{\omega} \frac{d^2\omega}{d\theta^2} - \frac{2\rho_1^2}{\omega^2} \left(\frac{d\omega}{d\theta} \right)^2 - 4\rho_1^2 \frac{d\omega}{d\theta} +$$

$$+ \frac{\rho_1^2}{\omega^2} \cos \theta \frac{d\omega}{d\theta} - Re_2 \omega \rho_1 \cos \theta + \frac{\rho_1 Re_2}{\omega \sin \theta} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta},$$

$$a_2^{(3)} = 2 \rho_1 \operatorname{ctg} \theta + \omega Re_2 \sin \theta - \frac{\rho_1^3 Re_2}{\omega^3 \sin \theta} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \rho_1},$$

$$a_{11}^{(4)} = \frac{\rho_1^{(4)}}{\omega^2} \left(\frac{d\omega}{d\theta} \right)^2 + \rho_1^4, \quad a_{22}^{(4)} = \rho_1^2,$$

$$a_{12}^{(4)} = a_{21}^{(4)} = \frac{\rho_1^3}{\omega} \frac{d\omega}{d\theta},$$

$$a_1^{(4)} = 2\rho_1^3 + \frac{\rho_1^3}{\omega} \frac{d^2\omega}{d\theta^2} + \rho_1^3 \operatorname{ctg} \theta,$$

$$a_2^{(4)} = -\rho_1^2 \operatorname{ctg} \theta, \quad F^4 = -\frac{1}{\rho_1} \xi \omega \sin \theta.$$

К ним присоединяются: условия ограниченности функций Ψ, ξ, Ψ^* при τ_1 и $\rho_1 = 0$, а также непрерывность касательных скоростей

$$[u_\tau] \Big|_{\tau_1=1} = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{d\theta} - \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_1} \left(\frac{1}{\omega^2} \left(\frac{d\omega}{d\theta} \right)^2 + 1 \right) \right] \Big|_{\tau_1=1} = 0, \quad (34)$$

непротекания

$$-\frac{d\omega}{d\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_1} + \omega \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \Big|_{\tau_1=1} = 0 \quad (55)$$

непрерывности касательных напряжений

$$[\tilde{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_1} \left(\frac{2}{\omega^2} \frac{d^2\omega}{d\theta^2} - \frac{2}{\omega^3} \left(\frac{d\omega}{d\theta} \right)^2 - \frac{1}{\omega} \right) -$$

$$-\sin \theta (\omega^2 + (\frac{d\omega}{d\theta})^2) \tilde{\mu} \xi \Big|_{\tau_1=1} = 0. \quad (36)$$

Для решения задачи (31)–(36) применяется модифицированный метод Шварца. При этом, как и для сферической капли, задача решается отдельно внутри и вне капли, а затем "склеивается" на границе. При этом вместо $[v_\theta]_{\tau_1}$ в формулах для вычисления значения вихря на границе капли берется скачок касательной к границе скорости (см. (34)):

$$\xi_1^{(k)} \Big|_{\tau_1=1} = \xi_1^{(k-1)} \Big|_{\tau_1=1} + \tilde{\beta} [u_\tau^{(k-1)}] \Big|_{\tau_1=1}. \quad (37)$$

Граничное условие для вихря ξ при $\vartheta_1=1$ для расчета течения вне капли получается на каждой итерации из непрерывности касательных напряжений, т.е. из условия (36). На каждом шагу итерации нелинейные члены берутся с предыдущего шага.

При $0 < \tilde{\beta} < c_1$ ($c_1 = \text{const} > 0$, определяемая Re_1, Re_2, μ и границей $\bar{\omega}^\circ(\theta)$) доказываются сходимость итерационного процесса (37) со скоростью K^{-S} , где S определяется гладкостью границы капли и разрываемого решения. Численная реализация процесса (37) осуществляется на основе параметрической сеточной схемы

$$\sum a_{ijh}^{(m)} \Lambda_{ijh}^{(m)} v_h^{(m)} + \sum a_{ih}^{(m)} L_{ih}^{(m)} v_h^{(m)} + a_h^{(m)} v_h^{(m)} = F_h^{(m)} \quad (38)$$

Здесь $v_h^{(1)} \equiv \xi_1^h$, $v_h^{(2)} = \psi_2^h$, $v_h^{(3)} = \xi_2^h$, $v_h^{(4)} = \psi_2^h$,

$$\Lambda_{11h}^{(m)} v_h^{(m)} \equiv v_{h\tau\bar{\tau}}, \quad \Lambda_{22h}^{(m)} = v_{h\theta\bar{\theta}},$$

$$\Lambda_{12h}^{(m)} v_h^{(m)} = \frac{1}{4} (v_{h\theta\tau_1} + v_{h\bar{\theta}\bar{\tau}_1} + v_{h\theta\bar{\tau}_1} + v_{h\bar{\theta}\tau_1}),$$

$$L_{1h}^{(m)} v_h^{(m)} = \alpha_\tau^{(m)} v_{h\tau_1} + (1 - \alpha_\tau^{(m)}) v_{h\bar{\tau}_1},$$

$$L_{2h}^{(m)} v_h^{(m)} = \alpha_\theta^{(m)} v_{h\theta} + (1 - \alpha_\theta^{(m)}) v_{h\bar{\theta}}.$$

(Здесь для $m=3,4$ переобозначено ϑ_1 на τ_1). Коэффициенты $F_h^{(m)}$, $a_{ih}^{(m)}$, $a_{ijh}^{(m)}$ и $a_h^{(m)}$ вычисляются из коэффициентов, стоящих при соответствующих членах аппроксимируемых дифференциальных операторов (31), (33). При этом входящие в коэффициенты $a_h^{(m)}$, $a_{ih}^{(m)}$

($m=1,3$) производные $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$; $\frac{\partial \psi^*}{\partial \theta}$ аппроксимируются разностными отношениями $\beta_{\theta}^{(m)} \psi_{\theta} + (1 - \beta_{\theta}^{(m)}) \psi_{\theta}^*$, $0 \leq \beta_{\theta} \leq 1$ везде, кроме точек $\theta=0, \theta=\pi$, где они полагаются (в силу осевой симметрии нулем). Аналогично при вычислении коэффициентов $a_{1h}^{(m)}, a_{2h}^{(m)}$ $m=1,3$ производные $\frac{\partial \psi}{\partial \tau_i}$, $\frac{\partial \psi^*}{\partial \tau_i}$ приближаются отношениями $\beta_{\tau_i}^{(m)} \psi_{\tau_i} + (1 - \beta_{\tau_i}^{(m)}) \psi_{\tau_i}^*$ ($0 \leq \beta_{\tau_i} \leq 1$). Уравнения (38) при $m=1,2$ записываются во всех точках (τ_{ii}, θ_j) $i=0,1,\dots,N-1, j=1,M-1$, где $\tau_{i0}=0$; $\tau_{ii} = \sum_{k=1}^i h_{\tau_{ik}}$ $i \geq 1$; $\theta_j = \sum_{k=1}^j h_{\theta_k}$, $j=1,\dots,M$, $\tau_{iN}=1$, $\theta_M = \pi$ а при $m=3$ в точках (ϱ_{ii}, θ_j) ; $i=0,\dots,N_1-1, j=1,\dots,M-1, \varrho_{ii} = \sum_{k=1}^i h_{\varrho_k}$ $i > 1$, $\varrho_{i0}=0$, $\varrho_{iN}=1$.

Условия ограниченности при этом для ξ, ξ_1, ψ в точках $\tau_1 = \varrho_1 = 0$ удовлетворяются автоматически. Уравнение (4) для ψ^* записывается во всех внутренних точках ϱ_{ii}, θ_j $i=1,\dots,N_1-1, j=1,\dots,M-1$; $\psi^* = 0$ при $\varrho_1 = 0$. Параметры $\beta_{\tau_i}^{(m)}, \beta_{\theta}^{(m)}, \alpha_{\tau_i}^{(m)}, \alpha_{\theta}^{(m)}$ позволяют рассмотреть целую совокупность схем (монотонные схемы I-го порядка точности, схемы с центральными разностями и др.). Кроме них рассматривались и монотонные схемы 2-го порядка точности, подобные тем, что рассматривались здесь ранее для сферической капли. На границе $\tau_1 = \varrho_1 = 1$ условия (34)-(37) аппроксимируются также со вторым порядком точности по h и это обеспечивает формально 2-й порядок точности разностных схем. Отметим, что наряду со схемами 2-го порядка точности можно предложить и схемы более высокого порядка. Наиболее просто теоретически это сделать, рассматривая схемы конечного элемента (Для последних строго выводится и оценка скорости сходимости). Однако при практической реализации их на ЭВМ возникают дополнительные трудности по обращению алгебраических систем МКЭ в связи с чем и были выбраны простейшие схемы второго порядка точности. Для обращения алгебраических систем, соответствующих предлагаемым разностным схемам отдельно внутри и вне капли. используется метод переменных направлений. Он записывается в виде:

$$\frac{v^{(m),n+\frac{1}{2}} - v^{(m),n}}{(\Delta t)_{nm}} = \Lambda_{11h} v_h^{(m),n+\frac{1}{2}} + \Lambda_{12h} v_h^{(m),n} + \Lambda_{22h} v_h^{(m),n} + a_{1h} L_{1h} v_h^{(m),n+\frac{1}{2}} + a_{2h} L_{2h} v_h^{(m),n} + a_h^{(m),n+\frac{1}{2}} v_h^{(m),n+\frac{1}{2}} - F_h^{(m),n+1} \quad (39)$$

$$\frac{v_h^{(m), n+1} - v_h^{(m), n + \frac{1}{2}}}{(\Delta t)_{nm}} = \Lambda_{11h} v_h^{(m), n + \frac{1}{2}} + \Lambda_{12h} v_h^{(m), n + \frac{1}{2}} +$$
(40)

$$+ \Lambda_{22h} v_h^{(m), n+1} + a_{1h}^{(m)} L_{1h} v_h^{(m), n + \frac{1}{2}} +$$

$$+ a_{2h}^{(m)} L_{2h} v_h^{(m), n+1} + a_h^{(m), n+1} v_h^{(m), n+1} - F_h^{(m), n+1}$$

Отметим, что при использовании алгоритма (39), (40) в коэффициентах $a_{ih}^{(m)}$, $a_h^{(m)}$, $m=1,3$ разностные отношения от Ψ берутся со слоя n . Значение $(\Delta t)_{nm}$ может быть выбрано различным для различных n, m . (При $(\Delta t)_{nm}$ одинаковых для всех m внутри капли итерационный процесс устанавливается быстрее, чем для внешнего потока). К уравнениям (39), (40) записываемых в тех же точках, что и соответствующие (38), присоединяются граничные условия на Ψ_h^* при $\varphi_1 = 0$, условия для Ψ_h^* , Ψ_h при $\varphi_1 = \tau_1 = 1$ и условие для $\xi_1^{h, n+1}$ из (37) (выполнение которого требуется на каждом шаге " n " итерационного процесса (39), (40)).

Из конечноразностного аналога условия непрерывности касательных напряжений (36) находится и граничное значение для $\xi_2^{h, n+1}$. Итерационный процесс (37), (39), (40) осуществляется до тех пор, пока значения $v_h^{(m), N}$ и $v_h^{(m), N+k}$ не станут достаточно близкими (в разностных аналогах энергетической нормы $W_2(\Omega_k)$ и по максимуму модуля). В этом случае проверяется, удовлетворяют ли $v_h^{(m), N}$ уравнениям (38) и разностным аналогам условий сопряжения и граничных условий с заданной точностью. Если последнее выполнено, то итерации заканчиваются. По значениям $v_h^{(m), N} \equiv \bar{v}_h^{(1)}$ вычисляется разность нормальных напряжений $[\bar{n} \cdot T^{(1)} \cdot \bar{n}]$ на границе $\tau_1 = 1$. По ним из уравнения (28), в котором $[\bar{n} \cdot T \cdot \bar{n}]|_{\tau=1}$ в правой части заменяется на функцию $[\bar{n} \cdot T^{(1)} \cdot \bar{n}]|_{\tau=1}$, строится новое приближение границы. $\tau = \bar{\omega}^{(1)}(\theta)$. Далее делается преобразование координат $\theta_2 = \theta$, $\tau_2 = \tau^{(0)}/\bar{\omega}^{(1)}(\theta)$. В новых координатах (τ_2, θ_2) находим новое решение вспомогательной задачи (3I). Процесс продолжается до тех пор пока приближения границы капли $\bar{\omega}^M(\theta)$ и $\bar{\omega}^{M+k}(\theta)$, $k \geq 1$ и соответствующие им гидродинамические характеристики течения (функции тока, вихрь) не станут достаточно близкими ($\bar{\omega}^M(\theta)$ в норме $C^1(0, \pi)$, а Ψ, ξ по максимуму модуля).

ЗАМЕЧАНИЕ I. Значительное сокращение времени расчетов дости-

гается за счет выбора иного начального приближения. За него принимается функция тока, вихрь и граница капли, экстраполированные по функциям тока, вихрю и границам капли, которые рассчитаны для значений параметров Re_m , μ , We ближайших к данному.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При расчете с большим числом узлов (100×50 ; 80×40) дополнительно к описанным выше процедурам применялся метод Р.П.Федоренко [9]. Это также значительно сокращало расчетное время.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При больших числах We ($We \sim 3 \div 6$) $Re_{(c)}$ ~ 100 в ходе итераций наблюдались колебания границы капли и соответствующих ей функций тока и вихря от шага к шагу итераций. От них удастся избавиться путем усреднений (с весом) по соседним приближениям.

По описанным здесь алгоритмам были проведены расчеты при различных числах $Re_{(c)}$, We , μ . Некоторые из них представлены на рис. 1-6. На рис. 1 даны значения коэффициентов сопротивления C_x и коэффициентов формы C_{nx} для различных значений We при $Re_1 = Re_2 = 50$, $\mu = 10; 1,1; 0,5$. Коэффициент сопротивления получается путем деления силы сопротивления, действующей на каплю со стороны внешней жидкости противоположно скорости ее движения, на площадь ее поперечного сечения (в сечении с наибольшим диаметром), перпендикулярного скорости движения, и на величину $\frac{1}{2} \rho_2 u_\infty^2$. На этом же рисунке (кривые (4), (5), (6) нанесены "коэффициенты сопротивления формы", которые учитывают вклад в силу сопротивления нормальных напряжений $n \cdot T_2 \cdot n$ на Γ . В соответствии с физическим экспериментом (см., например, [10]) коэффициент сопротивления при одном и том же числе Re уменьшается с ростом числа We и растет с увеличением μ . При $We = 0$ коэффициенты сопротивления совпадают с коэффициентами сопротивления сферической капли, при $\mu \rightarrow 0$ стремятся к коэффициентам сопротивления газового пузыря, а при $\mu \rightarrow \infty$ твердой частицы. На рис. 2, 3, 4 даны формы капли и поля течений для одного из значений числа We ($We = 1,2$, чисел $Re_1 = 50$ и $Re_2 = 50$ и различных значений μ (10; 1,1; 0,5). Как видно из рисунка капли в этом случае по форме близки к эллипсоидам вращения, что соответствует физике явления. При μ отсутствует возвратный вихрь. При $\mu = 0,5$ и $\mu = 10$ он имеется, хотя и не столь интенсивный, как в случае твердой частицы и газового пузыря.

Возникновение возвратного вихря для жидкой капли и газового пузыря происходит при больших по сравнению с твердой частицей числах Re_2 . Его характеристики (например, интенсивность) определяются, в основном соотношением вязкостей μ (при числах

- (1) - $Re = 50$ $\mu = 10$
- (2) - $Re = 50$ $\mu = 1.1$
- (3) - $Re = 50$ $\mu = 0.5$

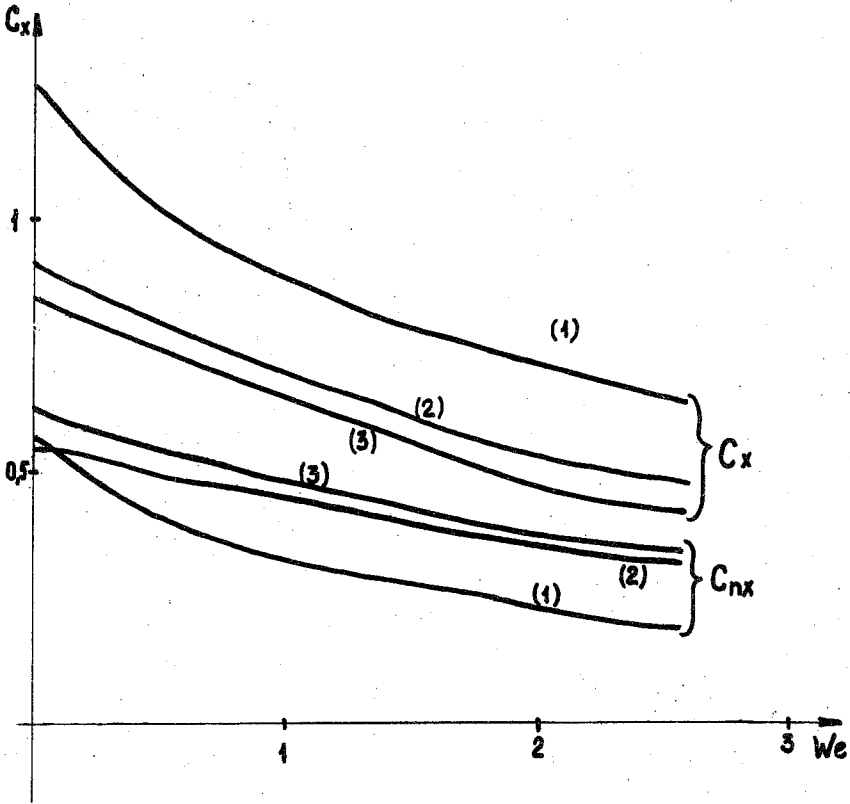


Рис. I

Зависимость коэффициентов сопротивления
и формы от чисел Re, We .

$M=1.1$
 $Re=50$
 $We=1.2$

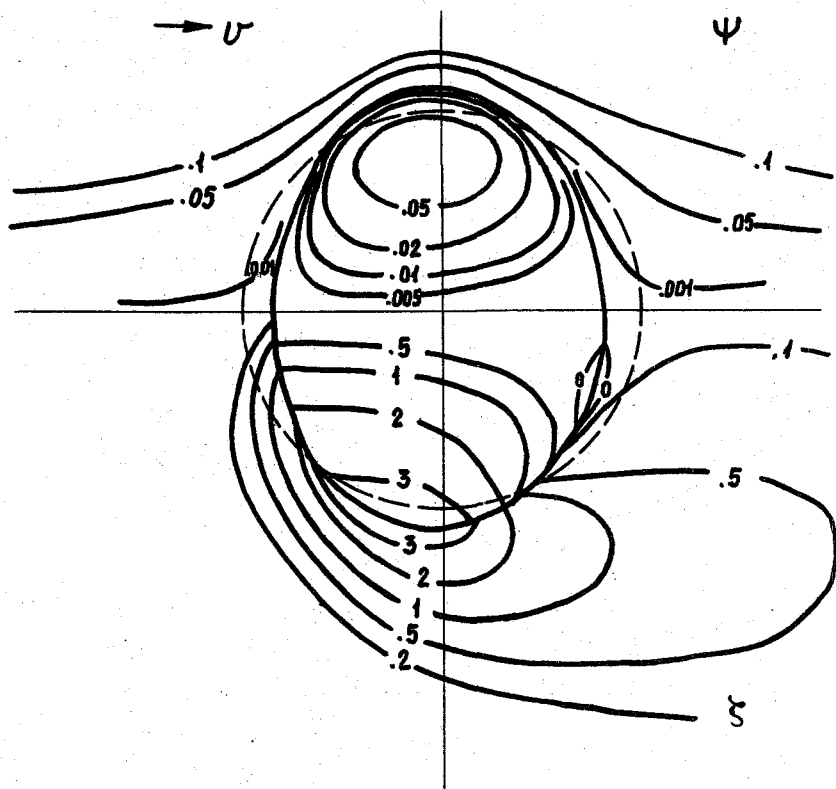


Рис. 2

Поле течения и завихренности.

$\mu=0.5$
 $Re=50$
 $We=1.2$

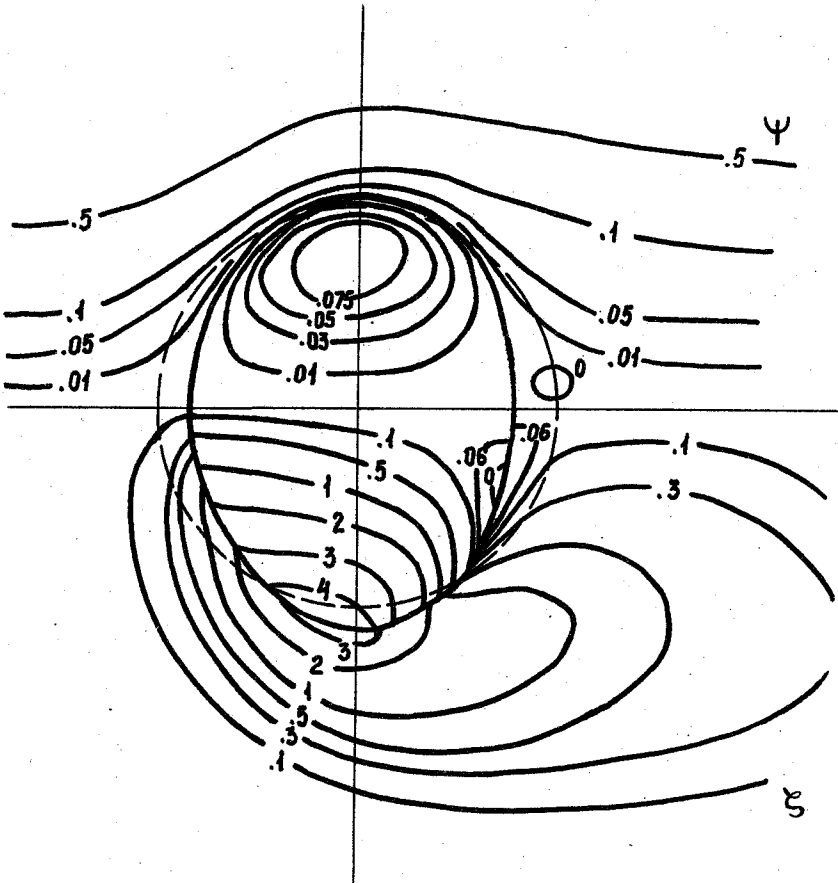


Рис. 3

Поле течения и завихренности.

$\mu = 10$
 $Re = 50$
 $We = 1.2$



ψ

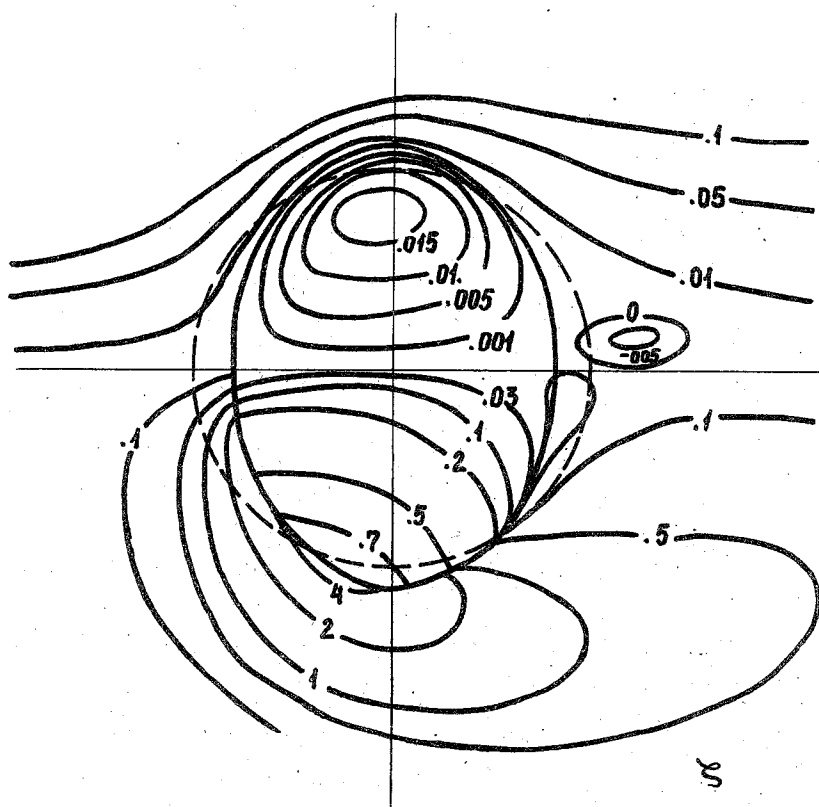


Рис. 4

Поле течения и завихренности.

$Re = 50$
 $\mu = 10$

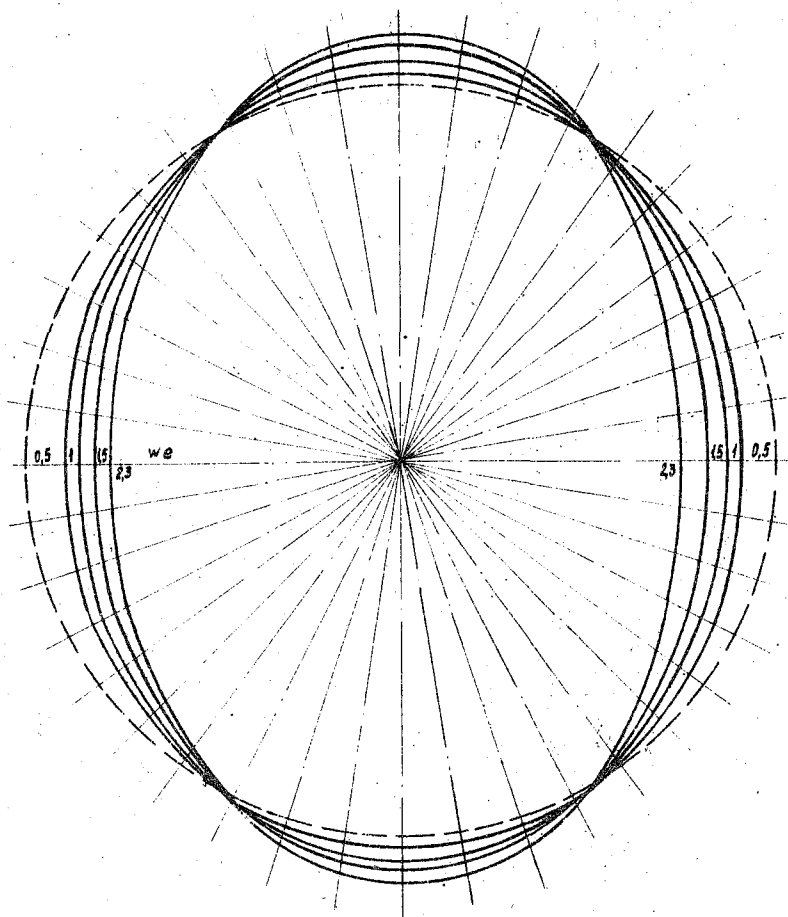


Рис. 5

Форма капли.

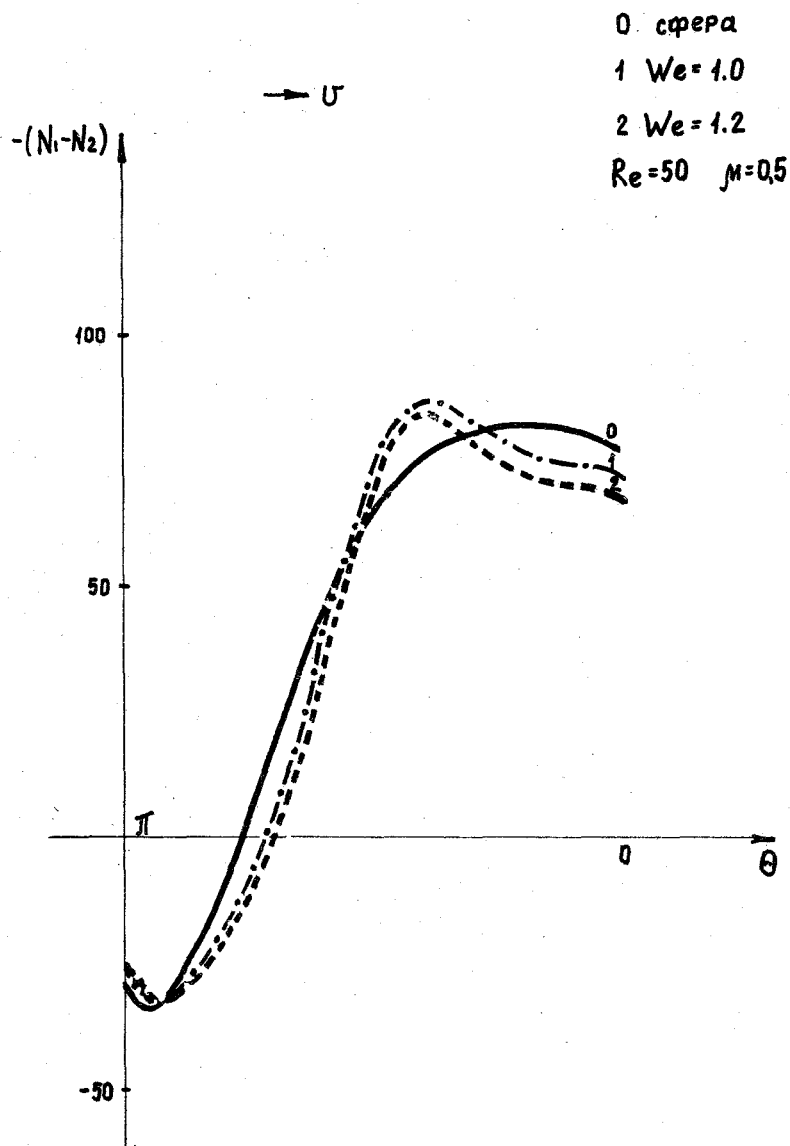


Рис. 6
Разность нормальных напряжений.

$200 > Re_1 > 20$). При $\mu = 1$ возвратный вихрь отсутствует вплоть до $Re_1 = Re_2 = 200$, $0 < We < 2$. В отличие от вихря за твердой частицей он непосредственно не примыкает к границе капли, а сносится вниз по потоку. Особенно заметно это при $\mu \sim 2 \div 7$; $\mu \sim 0,8 \div 0,6$, $0 < We < 3$, $Re \sim 50 \div 100$. Однако и в случае "почти" твердой частицы ($\mu \gg 1$), почти пузыря ($\mu \ll 1$) существует промежуточная зона течения между каплей и пузырем. Поэтому обычное определение точки отрыва как точки границы, в которой обращается в ноль касательное напряжение теряет в этом случае смысл. По-видимому, здесь имеет смысл ввести другие параметры вихря, а именно ширину промежуточной зоны, поперечный диаметр вихря его интенсивность (максимальное значение). На рис.5 показаны деформации капли в зависимости от We при $\mu = 10$, $Re_1 = Re_2 = 50$. По мере роста We деформация увеличивается, изменения μ не столь существенно влияют на форму, хотя при $\mu < 1$ деформация больше, чем при $\mu > 1$. При $0 < We < 2,5$; $0,5 < \mu < 30$ капли по форме близки к сплюснутым эллипсоидам вращения. Все эти факты качественно соответствуют физическому эксперименту.

Сравнения с количественными данными физических экспериментов часто бывают затруднительны из-за загрязненности как сплошной, так и дисперсной фазы (на что указывают и сами авторы). В случае же чистых систем наблюдается довольно хорошее совпадение результатов численных и физических экспериментов. Так корреляционные зависимости, выведенные в [10] для движений капель с поправками на загрязненность в воде на 3-5% отличаются от соответствующих результатов настоящих расчетов. Наконец, на рис.6 даны разности нормальных напряжений для сферической капли и для капли, найденной в процессе расчетов формы. Видно заметное отличие при различных We этих характеристик, что свидетельствует о недостаточной точности первого приближения, зачастую используемого в расчетах.

В заключение автор выражает благодарность Т.А.Савельевой за большую работу по составлению и реализации программы на ЭВМ.

Литература

1. H a d a m a r d J. Mouvement permanent lent d'une sphere liquide et visqueuse dans une liquide visqueux, *Compt.rend. Acad.Sd* 1911, 152, N 25, 1735-1738.
2. R y b c z y n s k i W. Uber die fortsehrutende Bewegung einer Hussigen Kugel in einem Zahen Medium *Bull. Int.Acad.Sci. Cracovia cl.sci.math. et natur.Ser.A.* 1911, 40-44.

3. T a y l o r T.D., Acrivos A. On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds. Journ.Fluid. Mech. 1964, v.18, p.13, 466-477.
4. Р и в к и н д В.Я. "Исследование задачи о стационарном движении капли в потоке вязкой несжимаемой жидкости". Докл.АН СССР, 1976, 227, № 5, с.1071-1074.
5. С а м а р с к и й А.А. Введение в теорию разностных схем. М., Из-во "Наука", 1971, 552 с.
6. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., Изд-во "Наука", 1970, 288 с.
7. Л а д ы ж е н с к а я О.А., Р и в к и н д В.Я. О методе переменных направлений для расчета вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах. Изв.АН СССР, Серия матем., 1971, 35, с.259-268.
8. Р и в к и н д В.Я., У р а л ь ц е в а Н.Н. Проекционно-разностные схемы для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений. Вестн.Ленингр.ун-та, 1972, № 19, с.65-70.
9. Ф е д о р е н к о Р.П. О скорости сходимости одного итерационного процесса. ЖВМ и МФ, 1964, № 3, с.559-564.
10. G r a s e J.R., W a i r e g i F., N g u y e n T.H. Shapes velocities of single drops and bubbles moving freely through emissible liquides. Frans.of the Inst.of Chem.Ing., 1976, v.54, N 3, 167-173.