Автоматика и телемеханика, № 6, 2010

© 2010 г. М.Е. ШАЙКИН, канд. техн. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ КРАТНЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ИНТЕГРАЛАМИ[1]

Рассматривается скалярное стохастическое дифференциальное уравнение Ито, коэффициенты сноса и диффузии которого являются аффинными функциями фазовой координаты. Решение уравнения записывается через стохастическую экспоненту, которая выступает в роли резольвенты уравнения. Разложение стохастической экспоненты в ряд по многочленам Эрмита индуцирует разложение решения билинейного уравнения в ряд по кратным стохастическим интегралам. Получены моментные характеристики стохастических интегралов, решающие задачу статистического анализа приближенных решений билинейных стохастических систем. В качестве примера билинейной системы рассматриваются модель финансового (B, S)-рынка и ее оптимизация по неквадратичному критерию.

1. Введение

Хотя линейные модели объектов и систем управления чрезвычайно полезны в приложениях, имеются задачи практической важности, для решения которых возможностей линейного анализа явно недостаточно. Широкому классу нелинейных объектов адекватны билинейные модели, допускающие к тому же детальное аналитическое исследование. Статья не касается теории детерминированных билинейных систем, интенсивно развивающейся во многих направлениях, а затрагивает исключительно стохастические билинейные системы с их специфическими средствами анализа, заметно отличающимися от детерминированных методов. Основным объектом исследования в билинейном стохастическом анализе является векторное стохастическое уравнение Ито, в котором коэффициенты сноса и диффузии аффинно зависят от фазового вектора системы.

Важнейшими задачами билинейного стохастического анализа являются статистический анализ фазового вектора системы (определение его вероятностных характеристик, например моментных); фильтрация фазового вектора, наблюдаемого в шумах; удобное представление оператора вход-выход билинейной системы и, в качестве обратной задачи, проблема билинейной реализации, т.е. восстановления внутренней динамики системы по ее оператору вход-выход; наконец, задачи стохастической устойчивости и стохастического управления. Эти же задачи традиционны для общих нелинейных систем, не только билинейных, но в билинейном случае в этих направлениях удается получить более полные, а иногда и завершенные результаты (см. обзоры [1, 2]).

В литературе по билинейному стохастическому анализу одной из первых была модель $\dot{x}_t = (A + B\dot{w}_t)x_t$ с мультипликативным белым шумом, особенно популярная в исследованиях по стохастической устойчивости (другие названия: модель со случайными коэффициентами, с параметрическими возмущениями, с зависящим от состояния (state-dependent) шумом). Модели с управлением и с неопределенностью (например, параметрической) получаются из нее аддитивным добавлением соответственно управления u_t и неизвестного воздействия v_t в правую часть уравнения

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-08-00595-а).

динамики. Таким путем обобщенная модель принимает вид

$$dx_t = Ax_t dt + Bx_t dw_1(t) + B_0 v_t dw_2(t) + B_1 v_t dt + Cu_t dt,$$

в настоящее время она является основной при постановке в наибольшей возможной общности задачи о стохастическом H_∞-управлении в условиях неопределенности [3, 4]. Из изложенного выше очевидна прикладная значимость исследования средствами билинейного анализа стохастического уравнения Ито (векторного, с переменными по t коэффициентами)

$$d\eta_t = (A_t\eta_t + a_t)dt + (B_t\eta_t + b_t)dw_t,$$

а также систем вида

$$\dot{x}_t = \sum_{i=1}^{r}(A + \xi_i(t)A_i)x_t + f_t$$

с цветными мультипликативными шумами $\xi_i(t)$, также включаемых в класс билинейных систем.

В билинейном анализе, как и в линейном, общее решение векторного уравнения представляется в интегральной форме Коши через резольвенту уравнения (в билинейном случае в отличие от линейного она стохастическая), и важнейшей задачей анализа является нахождение методов вычисления резольвент в многомерном случае. Другой задачей является статистический анализ выходного сигнала билинейной системы с цветными мультипликативными шумами. Важна также задача фильтрации вектора состояния билинейной системы. Частный случай этой задачи для систем с цветным шумом изучался автором в [5].

Важные для данной работы понятия стохастической экспоненты, многочленов Эрмита векторного аргумента, кратного стохастического интеграла хорошо известны в математической литературе по случайным процессам. Стохастическая экспонента используется в теории стохастического интегрирования при выводе мощного мартингального неравенства, дающего наилучшие[2] возможные оценки. Многочлены Эрмита векторного аргумента (называемые в [7] многочленами Фурье – Эрмита) образуют полную ортонормированную систему в пространстве (L^2) функционалов от гауссовского случайного процесса, чем и определяется их значимая роль в нелинейной стохастической теории. Кратными стохастическими интегралами Ито представляются нелинейные функционалы из (L^2) [9]. Между перечисленными понятиями существуют глубокие взаимные связи, представляющие не только общетеоретический интерес. Особенно отчетливо эти связи проявляются в билинейной теории, что и показано в разделах 3, 4. В этом состоит одна из целей работы.

Общая формула, представляющая решение многомерного билинейного уравнения через его коэффициенты, в настоящее время не известна. В одномерном случае процедура решения известна (см., например, [8, 9]), но несколько громоздка. Здесь предлагается (в разделе 5) совсем простой способ построения решения: он сводится к интегрированию двух вспомогательных уравнений, решения которых устроены проще, чем решение исходного билинейного уравнения. А именно, решение одного из уравнений представляется обычным среднеквадратическим интегралом, решение другого – стохастическим интегралом Ито. Другая цель работы – развить теорию разложения обоих интегралов по кратным стохастическим интегралам, совершенно различную в этих двух случаях.

Здесь ограничимся изучением скалярного билинейного уравнения. В векторном случае вместо стохастической экспоненты следовало бы рассматривать стохастическую резольвенту, явное представление которой через коэффициенты уравнения,

[2] По мнению автора книги [6].

как уже отмечалось, в настоящее время не известно. Для приложений это весьма существенный недостаток, хотя до известных пределов общую теорию можно развивать по аналогии с одномерным случаем, пользуясь достаточно конкретными общими свойствами резольвенты[3].

Третья (и основная) цель – разработать метод статистического анализа кратных стохастических интегралов. Любой конечный набор таких интегралов (типа $j_p(t)$ и $\zeta_p(t)$ в разделе 7) не удовлетворяет какой-либо замкнутой системе стохастических дифференциальных уравнений, поэтому не применим метод Ито составления системы дифференциальных уравнений для моментов. Результатом статистического анализа является построение одновременного разложения билинейного процесса ξ_t на элементарные некоррелированные процессы $\xi_p(t)$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, с одной стороны, и дисперсии $\operatorname{var}\xi_t$ на канонические дисперсионные компоненты $\operatorname{var}\xi_p(t)$, с другой. Такое разложение можно считать аналогом метода главных компонент в многомерном статистическом анализе и канонического разложения линейных процессов в [12]. Создание метода одновременного разложения для билинейных процессов – еще одна задача этой работы.

2. Постановка задачи

В соответствии с целями, изложенными в предыдущем разделе, сформулируем следующие подзадачи, решаемые в работе.

1. В рамках изучения билинейных стохастических процессов изложить взаимосвязи понятий и свойств стохастической экспоненты, многочленов Фурье – Эрмита, кратных стохастических интегралов (разделы 3, 4).

2. Известное решение скалярного билинейного уравнения является суммой среднеквадратического интеграла Лебега и стохастического интеграла Ито. Можно составить стохастические билинейные уравнения для каждого из интегралов и, рассмотрев затем сумму уравнений, сопоставить ее с исходным билинейным уравнением (раздел 5).

3. Разработать метод статистического анализа кратных стохастических интегралов, не прибегая к методу Ито составления дифференциальных уравнений для моментов (разделы 6, 7).

4. Рассмотреть задачу построения совместного разложения билинейных процессов и их дисперсионных функций (раздел 8).

3. Стохастическая экспонента гауссовского мартингала

Рассмотрим скалярное стохастическое уравнение Ито $d\xi_t = f_t\xi_t dw_t$ на временном интервале $[0, T]$ с начальным условием $\xi_0 = 1$. Процесс w_t – стандартный винеровский, функция $t \to f_t$ предполагается детерминированной и квадратически интегрируемой на $[0, T]$. Решение $\mathcal{R}(t, t_0)$ этого уравнения имеет вид [6]

$$\mathcal{R}(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} f_u dw_u - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} f_u^2 du}, \quad t_0, t \in [0, T]. \tag{1}$$

Для краткости обозначений полагаем $\mathcal{R}(t) := \mathcal{R}(t, t_0)$, если $t_0 = 0$. Стохастический процесс $t \mapsto \mathcal{R}(t)$, $t \geqslant 0$ называется стохастической экспонентой мартингала

[3] Вычисление резольвенты векторного уравнения является задачей некоммутативного анализа [10]. Некоторые приближенные способы нахождения резольвент многомерных билинейных систем рассматривались автором в [11].

$t \mapsto \int\limits_0^t f_s dw_s$. Случайную величину $\mathcal{R}(t)$ называем ниже стохастической экспонентой случайной величины $\int\limits_0^t f_s dw_s$.

Сравним с (1) решение обыкновенного дифференциального уравнения $dx_t = f_t x_t dt$, $x_0 = 1$. Решением является обычная экспонента

$$e^{\int\limits_0^t f_s ds} = 1 + \int\limits_0^t f_s ds + \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^t f_s ds\right)^2 + \dots$$

или, в представлении рядом Пеано,

$$e^{\int\limits_0^t f_s ds} = 1 + \int\limits_0^t f_s ds + \int\limits_0^t f_s ds \int\limits_0^s f_u du + \dots .$$

В стохастическом случае аналогом этого последнего разложения является стохастический ряд Пеано

$$1 + \int\limits_0^t f_s dw_s + \int\limits_0^t f_s dw_s \int\limits_0^s f_u dw_u + \dots , \tag{2}$$

возникающий при решении методом последовательных приближений интегрального уравнения $\xi_t = 1 + \int\limits_0^t f_s \xi_s dw_s$, эквивалентного стохастическому дифференциальному уравнению для экспоненты. По теореме о единственности решений стохастических уравнений суммой ряда (2) является стохастическая экспонента $\mathcal{R}(t)$. Обычная экспонента $e^{\int\limits_0^t f_s dw_s}$ не может быть суммой ряда (2) хотя бы уже потому, что, например, $2\int\limits_0^t f_s dw_s \int\limits_0^s f_u dw_u \neq \left(\int\limits_0^t f_s dw_s\right)^2$. Правильная формула такова (см. ниже формулу (4)):

$$2\int\limits_0^t f_s dw_s \int\limits_0^s f_u dw_u = \left(\int\limits_0^t f_s dw_s\right)^2 - \int\limits_0^t f_s^2 ds.$$

Согласно (1) сумма $\mathcal{R}(t)$ стохастического ряда Пеано (2) есть произведение двух обычных экспонент $e^{\int\limits_0^t f_s dw_s}$ и $e^{-\int\limits_0^t f_s^2 ds/2}$. Имеем, следовательно, произведение двух экспоненциальных рядов $\sum\limits_{p\geqslant 0} \alpha_p/p! \cdot \sum\limits_{p\geqslant 0} \beta_p/p! = \sum\limits_{p\geqslant 0} \gamma_p/p!$, где, обозначив $X_t = \int\limits_0^t f_s dw_s$, $\sigma_t^2 = \int\limits_0^t f_s^2 ds$, находим

$$\alpha_p = X_t^p,$$

$$\beta_p = \begin{cases} 0, & \text{если } p = 2k-1,\ k = 1,2,\dots, \\ (-\sigma_t^2/2)^{p/2} p!/(p/2)!, & \text{если } p = 2k,\ k = 0,1,\dots, \end{cases}$$

$$\gamma_p = \alpha_p + C_p^1 \alpha_{p-1}\beta_1 + \dots + C_p^j \alpha_{p-j}\beta_j + \dots + \beta_p,\ p \geqslant 1.$$

Например,

$$\gamma_1 = X_t, \quad \gamma_2 = X_t^2 - \sigma_t^2, \quad \gamma_3 = X_t^3 - 3\sigma_t^2 X_t, \quad \gamma_4 = X_t^4 - 6\sigma_t^2 X_t^2 + 3\sigma_t^4.$$

Случайные величины γ_p связаны с многочленами Эрмита $G_p(x;\sigma^2)$ формулой $\gamma_p = G_p(X_t;\sigma_t^2)$. Многочлены Эрмита переменной x с параметром σ^2 определяются производящей функцией $\rho(u;x,\sigma^2) = e^{ux-\sigma^2u^2/2}$, $u \in R$ и ее разложением в ряд $\sum\limits_{p\geqslant 0} G_p(x;\sigma^2)\, u^p/\,p\,!$. Таким образом, стохастическую экспоненту $\mathcal{R}(t)$ можно записать в виде ряда по многочленам Эрмита,

$$\mathcal{R}(t) = \sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{p\,!} G_p(X_t;\sigma_t^2), \tag{3}$$

а многочлен $G_p(X_t;\sigma_t^2)$ – в виде повторного стохастического интеграла:

$$G_p(X_t;\sigma_t^2) = p\,! \int\limits_0^t f_{t_1} dw_{t_1} \int\limits_0^{t_1} f_{t_2} dw_{t_2} \ldots \int\limits_0^{t_{p-1}} f_{t_p} dw_{t_p} \tag{4}$$

(см., например, [6, 7]). Из (4) следуют интегральные рекуррентные формулы

$$G_p(X_t;\sigma_t^2) = p \int\limits_0^t f_s G_{p-1}(X_s;\sigma_s^2) dw_s,$$

$$g_p(t,s) = p \int\limits_s^t f_u g_{p-1}(u,s) dw_u, \quad p \geqslant 1, \tag{5}$$

где

$$g_p(t,s) = G_p(X(t,s);\sigma^2(t,s))$$

и

$$X(t,s) = \int\limits_s^t f_u dw_u, \quad \sigma^2(t,s) = \int\limits_s^t f_u^2 du.$$

4. Многочлены Эрмита векторного аргумента. Кратные стохастические интегралы

Определение (1) стохастической экспоненты легко обобщается на случай векторной случайной величины с компонентами $X_i(t) = \int\limits_0^t f_i(s) dw_s$, $f_i \in L^2[0,T]$, $i = 1,\ldots,d$. А именно, рассматриваются стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi_t = (u_1 f_1(t) + \ldots + u_d f_d(t))\xi_t dw_t, \quad \xi_0 = 1, \quad t \in [0,T]$$

и его решение

$$\mathcal{R}^u(t) = e^{\sum\limits_{i=1}^d u_i X_i(t) - \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^d \sigma_{ij}(t) u_i u_j}, \tag{6}$$

где $\sigma_{ij}(t) := \int\limits_0^t f_i(s)f_j(s)ds$ – ковариация случайных величин $X_i(t)$, $X_j(t)$. Ниже ограничимся случаем $d = 2$, чтобы выиграть в простоте и большей ясности изложения. Обобщение на случай произвольного целого d очевидно.

Наряду с (6) рассматриваем (при $d = 2$)

$$\rho(u; x, K) = e^{u_1x_1+u_2x_2-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{2} k_{ij}u_iu_j}, \quad x = (x_1, x_2) \in R^2, \quad u_1, u_2 \in R,$$

производящую функцию многочленов Эрмита $G_{ij}(x; K)$ векторного аргумента x с матричным параметром $K = (k_{ij})$[4]. Многочлены G_{ij} определяются следующим разложением ρ по степеням переменных u_1, u_2:

$$\rho(u; x, K) = \sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{p\,!} \sum_{i+j=p} \frac{p\,!}{i!j!}\, G_{ij}(x_1, x_2)u_1^i u_2^j \tag{7}$$

(справа для краткости матричный параметр K опускается). Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned}
&G_{10} = x_1, \quad G_{01} = x_2;\\
&G_{20} = x_1^2 - k_{11}, \quad G_{11} = x_1x_2 - k_{12}, \quad G_{02} = x_2^2 - k_{22};\\
&G_{30} = x_1^3 - 3k_{11}x_1, \quad G_{21} = x_1^2x_2 - 2k_{12}x_1 - k_{11}x_2,\\
&G_{12} = x_1x_2^2 - 2k_{12}x_2 - k_{22}x_1, \quad G_{03} = x_2^3 - 3k_{22}x_2.
\end{aligned}$$

Выполняя в (7) подстановки $x_i \mapsto X_i(t)$, $K \mapsto \Sigma_t = (\sigma_{ij}(t))$ и сравнивая результат с (6), находим

$$\mathcal{R}^u(t) = \sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{p\,!} \sum_{i+j=p} \frac{p\,!}{i!j!}\, G_{ij}\left(X_1(t), X_2(t)\right) u_1^i u_2^j \tag{8}$$

(параметр $\Sigma_t = (\sigma_{ij}(t))$ опускается).

С другой стороны, стохастическое уравнение для $\mathcal{R}^u(t)$ запишем в виде интегрального уравнения и будем решать его методом последовательных приближений. Тогда получим $\mathcal{R}^u(t) = \sum\limits_{p\geqslant 0} \mathcal{R}_p^u(t)$, где

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}_0^u(t) = 1, \quad \mathcal{R}_p^u(t) = \int\limits_0^t \mathcal{R}_{p-1}^u(s)(u, f)_s dw_s = \\
&= \int\limits_0^t (u, f(t_1))dw_{t_1} \int\limits_0^{t_1} (u, f(t_2))dw_{t_2} \ldots \int\limits_0^{t_{p-1}} (u, f(t_p))dw_{t_p}, \quad p \geqslant 1,\\
&(u, f(s)) := u_1f_1(s) + u_2f_2(s).
\end{aligned} \tag{9}$$

В (9) повторный интеграл по области $t \geqslant t_1 \geqslant \ldots \geqslant t_p \geqslant 0$ точек $(t_1, t_2, \ldots, t_p) \in R^p$ можно выразить через кратный стохастический интеграл I_t, который для функции вида $\varphi = e_1 \otimes e_2 \ldots \otimes e_p$ на гиперкубе $[0, t]^p$ определяется формулой [6]

$$I_t(\varphi) = \sum_{\sigma\in S_p} \int\limits_0^t e_{\sigma(1)}(t_1)dw_{t_1} \int\limits_0^{t_1} e_{\sigma(2)}(t_2)dw_{t_2} \ldots \int\limits_0^{t_{p-1}} e_{\sigma(p)}(t_p)dw_{t_p}; \tag{10}$$

[4] Имеются две системы многочленов Эрмита, а именно $\{H_{ij}(x)\}$ и $\{G_{ij}(x)\}$, образующие биортогональную пару [12]. Производящая функция $\rho(u; x, K)$ порождает систему $\{G_{ij}(x)\}$.

суммирование в (10) осуществляется по всем $p\,!$ элементам σ симметрической группы S_p. Из определения (10) следует, что $I_t(\varphi) = I_t(\tilde{\varphi})$, где $\tilde{\varphi}$ – симметризация φ [8, стр. 147]. Поэтому повторный интеграл в (9) можно записать в виде кратного стохастического интеграла $I_t((u,f)^{p\otimes})/p\,!$ от функции

$$(u,f)^{p\otimes} = \sum_{i=0}^{p} C_p^i (u_1 f_1)^{i\otimes} \otimes^s (u_2 f_2)^{(p-i)\otimes} = \sum_{i+j=p} \frac{p\,!}{i!j!} u_1^i u_2^j f_1^{i\otimes} \otimes^s f_2^{j\otimes},$$

где $\otimes^s$ – операция тензорного умножения функций с последующей симметризацией произведения. Следовательно,

$$\mathcal{R}^u(t) = \sum_{p\geqslant 0} \sum_{i+j=p} \frac{1}{i!j!}\, I_t\big(f_1^i \otimes f_2^j\big)\, u_1^i u_2^j, \tag{11}$$

где здесь и всюду далее f^k – краткое обозначение k-й тензорной степени $f^{k\otimes}$ функции f.

Сравнивая ряды (8) и (11), получаем следующее обобщающее формулу (4) представление многочлена Эрмита $G_{ij}(X_1(t), X_2(t))$ в виде кратного стохастического интеграла:

$$G_{ij}(X_1(t), X_2(t)) = I_t\big(f_1^i \otimes f_2^j\big), \quad i+j \geqslant 1. \tag{12}$$

Согласно этой формуле вычисление $(i+j)$-кратного стохастического интеграла от функции $f_1^i \otimes f_2^j$ есть чисто алгебраическая задача вычисления значения $G_{ij}(x_1, x_2)$ многочлена Эрмита G_{ij} при значениях $x_i := \int\limits_{t_0}^{t} f_i(s)dw_s$ переменных x_i, $i = 1, 2$.

При $j = 0$ в (12) имеем $G_{i0}(x_1, x_2) = G_i(x_1)$, $i \geqslant 1$ и $G_p(X_1(t)) = I_t(f_1^p)$, что подробнее записывается в виде

$$\int\limits_0^t f_1(t_1)dw_{t_1} \int\limits_0^{t_1} f_1(t_2)dw_{t_2} \ldots \int\limits_0^{t_{p-1}} f_1(t_p)dw_{t_p} = \frac{1}{p\,!}\, G_p\left(\int\limits_0^t f_1(s)dw_s\right),$$

а также в виде

$$\int\limits_0^t f_1(s) g_p(s) dw_s = \frac{1}{p+1}\, g_{p+1}(t), \tag{13}$$

где

$$g_p(t) := G_p\left(\int\limits_0^t f_1(s)dw_s; \int\limits_0^t f_1^2(s)ds\right). \tag{14}$$

С помощью (12) известные рекуррентные формулы для многочленов Эрмита можно перенести на кратные стохастические интегралы. Так, из соотношений

$$\begin{aligned} G_{ij} &= x_1 G_{i-1,j} - j\, k_{12} G_{i-1,j-1} - (i-1)k_{11} G_{i-2,j}, \\ G_{ij} &= x_2 G_{i,j-1} - i\, k_{12} G_{i-1,j-1} - (j-1)k_{22} G_{i,j-2} \end{aligned} \tag{15}$$

для многочленов Эрмита G_{ij} следуют рекуррентные формулы[5]

$$I_t\big(f_1^i\otimes f_2^j\big)=I_t(f_1)I_t\big(f_1^{i-1}\otimes f_2^j\big)-j\,\sigma_{12}(t)I_t\big(f_1^{i-1}\otimes f_2^{j-1}\big)- \tag{16}$$
$$-(i-1)\sigma_{11}(t)I_t\big(f_1^{i-2}\otimes f_2^j\big),\quad i+j\geqslant 1,$$

$$I_t\big(f_1^i\otimes f_2^j\big)=I_t(f_2)I_t\big(f_1^i\otimes f_2^{j-1}\big)-i\,\sigma_{12}(t)I_t\big(f_1^{i-1}\otimes f_2^{j-1}\big)- \tag{17}$$
$$-(j-1)\sigma_{22}(t)I_t\big(f_1^i\otimes f_2^{j-2}\big),\quad i+j\geqslant 1$$

для кратных стохастических интегралов $I_t(f_1^i\otimes f_2^j)$ (в (16)–(17) интегралы $X_i(t)$ обозначены как стохастические интегралы $I_t(f_i)$ кратности 1). При $i=j=0$ полагаем $I_t(f_1^0\otimes f_2^0)=I_t(1\otimes 1)=1$ для всех $t\geqslant 0$. Здесь снова проступает алгебраическая сущность процедуры вычисления кратных стохастических интегралов: достаточно вычислить $I_t(f_1^i\otimes f_2^j)$ для нескольких первых значений i,j, чтобы можно было чисто алгебраически вычислить стохастические интегралы любой заданной кратности[6].

5. Билинейное стохастическое уравнение и его общее решение

Билинейным стохастическим называется уравнение Ито

$$d\eta_t=(A_t+B_t\eta_t)dt+(C_t+D_t\eta_t)dw_t,\quad t\in[0,T], \tag{18}$$

коэффициенты которого (неслучайные, принадлежащие $L^2[0,T]$) аффинно зависят от фазового вектора $\eta_t\in R^n$. Здесь, как обычно, начальное условие η_0 предполагаем не зависящим от случайных величин w_t, $t\geqslant 0$. Условия Липшица и условия линейного роста для коэффициентов диффузии и сноса в (18) тривиально выполняются, так что уравнение (18) имеет единственное решение. От искомой функции η_t удобно перейти к новой искомой функции ξ_t, полагая $\eta_t=e^{\beta_t}\xi_t$, где $\beta_t:=\int\limits_0^t B(s)ds$. Для ξ_t стохастическое уравнение имеет вид

$$d\xi_t=e^{-\beta_t}A_t dt+e^{-\beta_t}C_t dw_t+D_t\xi_t dw_t,\quad \xi_0=\eta_0. \tag{19}$$

По аналогии с теорией линейных детерминированных дифференциальных уравнений назовем (19) неоднородным уравнением, отвечающим однородному уравнению $d\xi_t=D_t\xi_t dw_t$. Общее решение однородного уравнения равно $\xi_t=\mathcal{R}(t,t_0)\xi_0$ (в данном случае $t_0=0$), а частное решение неоднородного уравнения (19), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, ищем в виде суммы $\xi_t^{(1)}+\xi_t^{(2)}$, где

$$\xi_t^{(1)}=\int\limits_0^t\mathcal{R}(t,s)\varphi_1(s)ds,\quad \xi_t^{(2)}=\int\limits_0^t\mathcal{R}(t,s)\varphi_2(s)dw_s \tag{20}$$

и φ_1, φ_2 – пока не определенные неслучайные функции времени[7]. В дифференциальной форме, как нетрудно показать, соотношения (20) записываются в виде

$$d\xi_t^{(1)}=D_t\xi_t^{(1)}dw_t+\varphi_1(t)dt,\quad \xi_0^{(1)}=0, \tag{21}$$
$$d\xi_t^{(2)}=D_t\xi_t^{(2)}dw_t+\varphi_2(t)dw_t+D_t\varphi_2(t)dt,\quad \xi_0^{(2)}=0.$$

[5] Работы, в которых рассматривался стохастический аналог (16), (17) формул (15), автору не известны.

[6] Соотношения (16)–(17) можно получить с помощью формулы Ито для стохастического дифференциала функции $X_1^i(t)X_2^j(t)$. Вычисления, громоздкие и утомительные, неизменно приводят к цели, особенно если подгонять вычислительный процесс к заранее известному результату.

[7] $\mathcal{R}(t,s)$ определяется формулой (1) с нижними в обоих интегралах пределами интегрирования s вместо $t_0=0$.

Находя отсюда уравнение для суммы $d\xi_t^{(1)} + d\xi_t^{(2)}$ и сравнивая его с (19), выводим для прежде не определенных φ_1 и φ_2 следующие формулы:

$$\varphi_1(t) = e^{-\beta_t}(A_t - D_t C_t), \quad \varphi_2(t) = e^{-\beta_t} C_t. \tag{22}$$

Решение уравнения (19) при ненулевом ξ_0 записывается в виде суммы общего решения $\mathcal{R}(t_1, t_0)\xi_0$ однородного уравнения и частного решения $\xi_t^{(1)} + \xi_t^{(2)}$:

$$\xi_t = \mathcal{R}(t, t_0)\xi_0 + \int_0^t \mathcal{R}(t, s)e^{-\beta_s}(A_s - D_s C_s)ds + \int_0^t \mathcal{R}(t, s)e^{-\beta_s} C_s dw_s. \tag{23}$$

Решение η_t уравнения (18) получается отсюда по формуле $\eta_t = e^{\beta_t}\xi_t$. Изложенная процедура решения стохастического билинейного уравнения вполне аналогична процедуре решения линейного дифференциального уравнения в детерминированном случае (ср. [13]), и она существенно проще той, которая излагается, например, в [8].

В случае детерминированной линейной системы выполняется принцип суперпозиции, согласно которому сумма входных воздействий $e^{-\beta_t} A_t dt + e^{-\beta_t} C_t dw_t$ должна приводить к сумме выходных реакций

$$\int_0^t \mathcal{R}(t, s)e^{-\beta_s} A_s ds + \int_0^t \mathcal{R}(t, s)e^{-\beta_s} C_s dw_s. \tag{24}$$

Как видим, выходной сигнал (23) в стохастическом случае отличается от (24) дополнительным слагаемым $-\int_0^t \mathcal{R}(t, s)e^{-\beta_s} C_s D_s ds$, с математическим ожиданием $-\int_0^t e^{-\beta_s} C_s D_s ds$, определяющим некую меру отклонения стохастической билинейной системы от линейной системы с ее принципом суперпозиции.

6. Представление рядами решения билинейного уравнения

Представление (23) решения билинейного уравнения обобщается и на многомерный случай [11], но тогда оно лишь весьма условно может быть названо явным, поскольку не известна явная формула представления резольвенты векторного уравнения через его коэффициенты. В скалярном случае резольвента $\mathcal{R}(t, s)$ известна (см. формулу (1) и сноску 7) и возможны два способа разложения в ряд решения скалярного билинейного уравнения. Простейший способ состоит в подстановке в формулу (23) вместо ядра $\mathcal{R}(t, s)$ его разложения в ряд,

$$\mathcal{R}(t, s) = \sum_{p \geqslant 0} \frac{1}{p!}\, g_p(t, s), \quad g_p(t, s) := G_p\left(\int_s^t D_u dw_u; \int_s^t D_u^2 du\right), \quad t > s \tag{25}$$

(разложение для $\mathcal{R}(t, s)$ такое же, как (3) для $\mathcal{R}(t)$, но с заменой в (3) X_t и σ_t^2 на $\int_s^t D_u dw_u$ и $\int_s^t D_u^2 du$ соответственно). Изменяя в полученном ряде порядок интегрирования и суммирования, получим

$$\xi_t = \sum_{p \geqslant 0} \frac{1}{p!}\left(g_p(t, t_0)\xi_0 + \int_0^t g_p(t, s)\varphi_1(s)ds + \int_0^t g_p(t, s)\varphi_2(s)dw_s\right) \tag{26}$$

(φ_1, φ_2 определены в (22)).

Другой способ разложения решения состоит в применении метода последовательных приближений к уравнениям (21), предварительно записанным в интегральной форме. Первое уравнение в (21) запишется в виде

$$\xi_t = \int\limits_0^t D_s\xi_s dw_s + \int\limits_0^t \varphi_1(s)ds,$$

если учесть, что $\xi_0 = 0$, и для упрощения обозначений временно опустить у $\xi_t^{(1)}$ верхний индекс. Положим $\xi_t^0 = 0$ и

$$\xi_t^{n+1} = \xi^0 + \int\limits_0^t D_s\xi_s^n dw_s + \varphi_t, \quad n \geqslant 0, \quad \varphi_t := \int\limits_0^t \varphi_1(s)ds.$$

Легко видеть, что

$$\xi_t^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (\mathcal{D}^k\varphi)_t,$$

где $\mathcal{D}$ – интегральный оператор Вольтерра, определенный соотношением $(\mathcal{D}\varphi)_t = \int\limits_0^t D_s\varphi_s dw_s$. При $n \to \infty$ сумма сходится к $(I - \mathcal{D})^{-1}\varphi_t$,

$$(I - \mathcal{D})^{-1}\varphi_t = \int\limits_0^t \mathcal{R}(t,s)\varphi_1(s)ds = \int\limits_0^t \mathcal{R}(t,s)d\varphi_s.$$

Теперь второе уравнение в (21) запишем в интегральной форме и применим метод последовательных приближений. Удобнее иметь дело с центрированным процессом $\zeta_t := \xi_t^{(2)} - \mu_t$, $\mu_t := \mathsf{E}\,\xi_t^{(2)}$, дифференциальное уравнение для которого имеет вид $d\zeta_t = D_t\zeta_t dw_t + \tau_t dw_t$, где $\tau_t := D_t\mu_t + \varphi_{2t}$. Последовательность ζ_t^n метода последовательных приближений задана правилом

$$\zeta_t^{n+1} = \int\limits_0^t D_s\zeta_s^n dw_s + \chi_t, \quad n \geqslant 0, \quad \chi_t := \int\limits_0^t \tau_s dw_s,$$

так что

$$\zeta_t^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (\mathcal{D}^k\chi)_t.$$

При $n \to \infty$ эта сумма сходится к $(I - \mathcal{D})^{-1}\chi_t$,

$$(I - \mathcal{D})^{-1}\chi_t = \int\limits_0^t \mathcal{R}(t,s)\varphi_2(s)dw_s - \mu_t.$$

Объединяя разложения для $\xi_t^{(1)}$ и $\xi_t^{(2)}$, получаем следующее представление решения ξ_t методом последовательных приближений:

$$\xi_t = \mathsf{E}\,\xi_t + \sum_{p\geqslant 1} (\mathcal{D}^p\varphi)_t + \sum_{p\geqslant 0} (\mathcal{D}^p\chi)_t, \tag{27}$$

где, напомним,

$$\varphi_t = \int\limits_0^t \varphi_1(s)ds, \quad \chi_t = \int\limits_0^t (D_s\mu_s + \varphi_{2s})dw_s = \int\limits_0^t \tau_s dw_s.$$

Возможна также комбинация разложений (26), (27)

$$\xi_t = \sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{p\,!} \left(g_p(t,t_0)\xi_0 + \int\limits_0^t g_p(t,s)\varphi_1(s)ds \right) + \sum_{p\geqslant 0} (\mathcal{D}^p\chi)_t. \tag{28}$$

Любое из разложений (26)–(28) можно положить в основу аппроксимации решений билинейного уравнения. В разделе 7 используется разложение (28).

7. Статистический анализ кратных стохастических интегралов

Согласно [14] функции $g_p(t,s)$, $g_q(t,s')$ можно представить в виде

$$g_p(t,s) = \sigma^p(t,s)G_p(\xi;1), \quad g_q(t,s') = \sigma^q(t,s')G_q(\eta;1),$$

где $\sigma^2(t,s) = \int\limits_s^t D_u^2 du$ и

$$\xi = \frac{1}{\sigma(t,s)} \int\limits_s^t D_u dw_u, \quad \eta = \frac{1}{\sigma(t,s')} \int\limits_{s'}^t D_u dw_u,$$

так что ξ и η – гауссовские случайные величины с параметрами

$$\mathsf{E}\,\xi = \mathsf{E}\,\eta = 0, \quad \mathsf{E}\,\xi^2 = \mathsf{E}\,\eta^2 = 1, \quad \operatorname{cov}(\xi,\eta) = \rho = \frac{\sigma^2(t, s\vee s')}{\sigma(t,s)\sigma(t,s')}.$$

При $s' = s$ двумерное распределение пары (ξ,η) вырождено и сосредоточено на диагонали $\xi = \eta$, при этом $\mathsf{E}\,H_p(\xi;\sigma^2)G_q(\xi;\sigma^2) = p\,!\delta_{pq}$, что в силу $H_p(\xi;\sigma^2) = G_p(\xi;\sigma^2)/\sigma^{2p}$ можно записать в виде $\mathsf{E}\,G_p(\xi;\sigma^2)G_q(\xi;\sigma^2) = p\,!\sigma^{2p}\delta_{pq}$. Таким образом,

$$\operatorname{cov}(g_p(t,s), g_q(t,s)) = p\,!\sigma^{2p}(t,s)\delta_{pq}.$$

При $s' \neq s$ имеем $\mathsf{E}\,G_p(\xi;1)G_p(\eta;1) = p\,!\rho^p$ [14, стр. 362], откуда

$$\operatorname{cov}(g_p(t,s), g_q(t,s')) = p\,! \left(\int\limits_{s\vee s'}^t D_u^2 du \right)^p \delta_{pq}.$$

Рассмотрим сначала интегралы $\int\limits_0^t g_p(t,s)\varphi_1(s)ds$ в (28). Обозначим

$$j_p(t) := \int\limits_0^t g_p(t,s)dm_s, \quad p \geqslant 0, \quad m_t = \int\limits_0^t \varphi_1(s)ds.$$

Легко видеть, что $\mathsf{E}\, j_p(t) = \delta_{p_0} m_t$, поскольку $g_0(t,s) = 1$ и $\mathsf{E}\, g_p(t,s) = 0$ при $p \geqslant 1$ в силу свойства ортогональности многочленов Эрмита G_0 и $G_p, p \neq 0$.

Далее,

$$\operatorname{cov}(j_p(t), j_q(t)) = \int_0^t \int_0^t \operatorname{cov}(g_p(t,s), g_q(t,s'))dm_s dm_{s'} =$$

$$= \delta_{pq} p! \int_0^t \int_0^t \sigma^{2p}(t, s \vee s')dm_s dm_{s'},$$

так что $j_p(t)$ и $j_q(t)$ не коррелированы при $p \neq q$. Вычисляя двойной интеграл по схеме

$$\int_0^t \int_0^t = \iint_{s'<s} + \iint_{s<s'},$$

получаем

$$\operatorname{var} j_p(t) = 2p! \int_0^t \sigma^{2p}(t,s) m_s dm_s. \tag{29}$$

Теперь рассмотрим интегралы $(D^p\chi)(t)$ в разложении (28), т.е. последовательность $\zeta_p(t)$, $p \geqslant 0$, где

$$\zeta_0(t) = \chi_t = \int_0^t (D_s\mu_s + \varphi_{2s})dw_s, \quad \zeta_p(t) = \int_0^t D_s\zeta_{p-1}(s)dw_s, \quad p = 1, 2, \ldots$$

(см. раздел 6). Очевидно, $\mathsf{E}\,\zeta_p(t) = 0$, $p \geqslant 0$. Докажем, что

$$\operatorname{var}\zeta_p(t) = 1/p! \int_0^t \psi^p(t,s)d\lambda_s, \quad p \geqslant 0, \tag{30}$$

где введены новые, удобные в последующих выкладках обозначения

$$\lambda_t = \int_0^t \tau_s^2 ds, \quad \psi_t = \int_0^t D_u^2 du, \quad \psi(t,s) = \psi(t) - \psi(s).$$

Рассмотрим для начала случаи $p = 0, 1, 2$. Имеем

$$\operatorname{var}\zeta_0(t) = \int_0^t \tau_s^2 ds = \lambda_t.$$

Далее,

$$\operatorname{var}\zeta_1(t) = \mathsf{E}\left(\int_0^t D_s\zeta_0(s)dw_s\right)^2 =$$

$$= \int_0^t D_s^2 \operatorname{var}\zeta_0(s)ds = \int_0^t D_s^2\lambda_s ds = \int_0^t \lambda_s d\psi_s.$$

Беря по частям последний интеграл, находим

$$\operatorname{var}\zeta_1(t) = \psi_t\lambda_t - \int\limits_0^t \psi_s d\lambda_s = \int\limits_0^t \psi(t,s)d\lambda_s.$$

При $p = 2$ вычисления усложняются. Имеем

$$\operatorname{var}\zeta_2(t) = \int\limits_0^t \operatorname{var}\zeta_1(s)d\psi_s = \psi_t \operatorname{var}\zeta_1(t) - \int\limits_0^t \psi_s d\operatorname{var}\zeta_1(s),$$

где $\operatorname{var}\zeta_1(t)$ и $d\operatorname{var}\zeta_1(t)$ уже найдены выше, они равны $\psi_t\lambda_t - \int\limits_0^t \psi_s d\lambda_s$ и $\lambda_t d\psi_t$ соответственно. Производя подстановки и упрощая, находим

$$\operatorname{var}\zeta_2(t) = \psi_t \left(\psi_t\lambda_t - \int\limits_0^t \psi_s d\lambda_s\right) - 1/2 \left(\lambda_t\psi_t^2 - \int\limits_0^t \psi_s^2 d\lambda_s\right),$$

что действительно равно $1/2\int\limits_0^t \psi^2(t,s)d\lambda_s$. Ясно, как действовать в общем случае, чтобы убедиться в справедливости (30). Полное доказательство возможно методом математической индукции.

Остается еще проверить некоррелированность величин $\zeta_p(t)$ и $\zeta_q(t)$ при $p \neq q$, т.е.

$$\operatorname{cov}(\zeta_p(t), \zeta_q(t)) = \delta_{pq}\operatorname{var}\zeta_p(t).$$

Последовательно получаем:

$$\operatorname{cov}(\zeta_0(t), \zeta_1(t)) = \mathsf{E} \int\limits_0^t \tau_s dw_s \int\limits_0^t D_s\zeta_0(s)dw_s = \int\limits_0^t D_s\tau_s \mathsf{E}\,\zeta_0(s)ds = 0,$$

$$\operatorname{cov}(\zeta_1(t), \zeta_2(t)) = \mathsf{E} \int\limits_0^t D_s\zeta_0(s)dw_s \int\limits_0^t D_s\zeta_1(s)dw_s = \int\limits_0^t D_s^2 \mathsf{E}\,\zeta_0(s)\zeta_1(s)ds = 0$$

в силу предыдущего, и так далее. Вообще,

$$\operatorname{cov}(\zeta_p(t), \zeta_{p+1}(t)) = \int\limits_0^t D_s^2 \operatorname{cov}(\zeta_{p-1}(s), \zeta_p(s))ds,$$

откуда и вытекает некоррелированность семейства величин $\{\zeta_p(t),\ p \geqslant 0\}$.

8. Совместное разложение билинейного процесса и его дисперсионной функции

Из изложенного в предыдущем разделе вытекает справедливость следующей пары совместных разложений:

• для среднеквадратического интеграла

$$\int_0^t \mathcal{R}(t,s)dm_s = \sum_{p\geqslant 0} 1/p\,! \int_0^t g_p(t,s)dm_s,$$

$$\operatorname{var}\int_0^t \mathcal{R}(t,s)dm_s = \sum_{p\geqslant 1} \operatorname{var}\left(1/p\,!\int_0^t g_p(t,s)dm_s\right) = \tag{31}$$

$$= 2\sum_{p\geqslant 1} 1/p\,! \int_0^t \psi^p(t,s)m_s dm_s;$$

• для интеграла Ито

$$\int_0^t \mathcal{R}(t,s)C_s dw_s = \int_0^t D_s C_s ds + \sum_{p\geqslant 0}(D^p\chi)_t,$$

$$\operatorname{var}\int_0^t \mathcal{R}(t,s)C_s dw_s = \sum_{p\geqslant 0}\operatorname{var}(D^p\chi)_t = \sum_{p\geqslant 0} 1/p\,!\int_0^t \psi^p(t,s)d\lambda_s. \tag{32}$$

Напомним использованные в (31), (32) обозначения:

$$m_t = \int_0^t \varphi_1(s)ds, \quad \psi(t) = \int_0^t D_u^2 du, \quad \chi_t = \int_0^t \tau_s dw_s,$$

$$\tau_s = D_s\mu_s + \varphi_{2s}, \quad \mu_t = \int_0^t D_s C_s ds, \quad \varphi_{2s} = C_s.$$

Ряд для дисперсий в (32) сходится и его сумма равна $\int\limits_0^t e^{\psi(t,s)}\tau_s^2 ds$, что очевидно. Аналогичный ряд в (31) сходится к интегралу $\int\limits_0^t e^{\psi(t,s)}D_s^2 m_s^2 ds$, что не очевидно и требует доказательства. Ряд в (31) запишем в виде

$$-m_t^2 + 2\int_0^t \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} 1/p\,!\psi^p(t,s)\right) m_s dm_s = -m_t^2 + 2\int_0^t e^{\psi(t,s)}m_s dm_s. \tag{33}$$

В таком же виде записывается и интеграл

$$\int_0^t e^{\psi(t,s)}m_s^2 D_s^2 ds = \int_0^t e^{\psi(t,s)}m_s^2 d\psi_s = e^{\psi(t)}\int_0^t e^{-\psi(s)}m^2(s)d\psi_s.$$

Действительно, если последний интеграл взять по частям с учетом $e^{-\psi(s)}d\psi(s) = -d\,e^{-\psi(s)}$, то получим

$$-e^{\psi_t}\left(m^2(s)e^{\psi_s}\Big|_{s=0}^{s=t} - 2\int_0^t e^{-\psi_s}m_s dm_s\right) = -m_t^2 + 2\int_0^t e^{\psi(t,s)}m_s dm_s,$$

что и утверждалось, см. (33).

9. Иллюстративный пример

Билинейные уравнения, подобные приведенным в разделе 5, широко используются в качестве моделей финансовых рынков [15]. Простым примером является (B,S)-модель финансового рынка, описывающая динамику рыночных цен различных активов, влияющих на выигрыши и проигрыши участников рынка. С технической точки зрения для отображения эволюции цен возможно использование различных случайных процессов, включая изощренные мартингальные процессы, формализующие понятие «справедливого рынка» [15], и существенно более простые телеграфные процессы, описывающие лишь тенденции повышения и понижения цен и моменты перемены этих тенденций [16]. Используемая в разделе 7 аппроксимация гауссовского экспоненциального мартингала отрезком ряда, представляющего мартингал разложением по многочленам Эрмита, может рассматриваться как простейшая модель финансовой математики, которая описывает динамику изменения цен в самых грубых чертах, без подробной детализации и к тому же позволяет участнику рынка получать необходимые ему количественные оценки элементарными математическими средствами.

(B,S)-рынок описывает динамику цен безрискового актива B (банковского вклада, например) и рискового актива S (например, акций). Актив B описывается детерминированным уравнением $dB_t = rB_t dt$, $t \in [0,T]$, в котором r – процентная банковская ставка по вкладу. Актив S задается стохастическим уравнением $dS_t = (\mu dt + \sigma dw_t)S_t$, где μ – ожидаемая процентная ставка по акциям, σ – волатильность цены акции. Игроком на финансовом рынке является инвестор с начальным капиталом x_0. В каждый момент времени $t \in [0,T]$ он решает, какую часть π_t текущего капитала x_t или его долю $u_t = \pi_t/x_t$ вложить в акции, и тогда $x_t - \pi_t$ будет вкладом инвестора на банковский счет. Капитал эволюционирует в соответствии с уравнением

$$dx_t = (x_t - \pi_t)\frac{dB_t}{B_t} + \pi_t \frac{dS_t}{S_t},$$

поскольку dB_t/B_t и dS_t/S_t – процентные ставки по вкладу и акциям соответственно. Таким образом, в подробной записи

$$dx_t = (r + \mu u_t - r u_t)x_t dt + \sigma u_t x_t dw_t, \tag{34}$$

где u_t – управляющий параметр, выбираемый инвестором. Все параметры уравнения могут зависеть от t. Решение этого билинейного уравнения имеет вид

$$x_t = x_0 \exp\left(\int_0^t \sigma_s u_s dw_s + \int_0^t \left(r_s + \mu_s u_s - r_s u_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2 u_s^2 \right) ds \right). \tag{35}$$

Более общая модель рынка возникает в случае, когда имеются банковские вклады двух видов (например, B в иностранной и S_1 в отечественной валюте), тогда инвестор подвержен также риску колебаний обменного курса валют e_t, связывающего B и S_1 по формуле $S_1(t) = e_t B_t$. Колебания обменного курса e_t описываются стохастическим уравнением $de_t = \mu_{1t} dt + \sigma_{1t} dw_{1t}$, где μ_1 и σ_1 – детерминированные параметры, w_{1t} – еще один, наряду с w_t, стандартный винеровский процесс, не зависимый от w_t. Стохастический дифференциал функции $S_1(t) = e_t B_t$ равен

$$dS_1(t) = S_1(t)(r_t + \mu_{1t})dt + S_1(t)\sigma_{1t} dw_{1t}.$$

Отсюда и из соотношения

$$dx_t = (x_t - \pi_t)\frac{dS_1(t)}{S_1(t)} + \pi_t \frac{dS_t}{S_t}$$

в [17] получено обобщение уравнения (34)

$$dx_t = \pi_t(\mu_t - \mu_{1t} - r_t)dt + (r_t + \mu_{1t})x_t dt + \pi_t(\sigma_t dw_t - \sigma_{1t}dw_{1t}) + \sigma_{1t}x_t dw_{1t}. \tag{36}$$

Здесь π_t – управляющий параметр. Уравнение (36) – билинейное вида (18). В этом иллюстративном примере ограничимся анализом простой модели (34), она получается как частный случай (36) при $\mu_{1t} = \sigma_{1t} = 0$.

Стратегию $u = \{u_s, s \in [0,T]\}$ инвестор выбирает так, чтобы максимизировать ожидаемое значение конечного капитала x_T или некоторой функции от x_T. Например, он может в зависимости от меньшей или большей склонности к риску измеряемой величиной R, $0 < R < 1$ (R называется индексом Эрроу – Пратта), максимизировать величину $J(u) = \dfrac{1}{1-R}\,\mathsf{E}\, x_T^{1-R}$. В случае уравнения (34) нетрудно показать прямыми вычислениями, что $J(u)$ достигает максимума при управлении

$$u_{opt}(t) = \frac{\mu_t - r_t}{R\sigma_t^2},$$

при этом

$$J_{opt} = J(u_{opt}) = \frac{1}{1-R}\, x_0^{1-R}\, e^{(1-R)\int\limits_0^T (r_s + (\mu_s - r_s)^2/2R\sigma_s^2)ds}.$$

Запись решения (35) уравнения (34) через стохастическую резольвенту позволила провести здесь прямую в отличие от [17] максимизацию критерия $J(u)$.

Приведем еще формулу для дисперсии случайной величины $x_{opt}(T)$, отвечающей оптимальному управлению. При $u = u_{opt}$ оптимальная траектория $x_t = x_{opt}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$dx_t = \left(r + \frac{(\mu - r)^2}{R\sigma^2}\right) x_t dt + \frac{\mu - r}{R\sigma}\, x_t dw_t \tag{37}$$

и имеет решение $x_{opt}(t) = e^{\beta_t}\mathcal{R}(t)x_0$, где $\beta_t = \int\limits_0^t (r_s + (\mu_s - r_s)^2/R\sigma_s^2)ds$, см. раздел 5.

Так как $\mathsf{E}\, x_{opt}(T) = e^{\beta_T}x_0$ и $\mathsf{E}\, x_{opt}^2(T) = e^{2\beta_T + \psi_T}x_0^2$, где $\psi_T = \int\limits_0^T D_s^2 ds$, то

$$\operatorname{var} x_{opt}(T) = e^{2\beta_T}(e^{\psi_T} - 1)x_0^2 = e^{2\int\limits_0^T (r_s + (\mu_s - r_s)^2/R\sigma_s^2)ds} \left(e^{\int\limits_0^T (\mu_s - r_s)^2/R^2\sigma_s^2} ds - 1 \right) x_0^2.$$

Формально полагая $R = -1$ в формуле $J(u) = \dfrac{1}{1-R}\,\mathsf{E}\, x_T^{1-R}$, получаем $J(u) = \mathsf{E}\, x_T^2/2$ и

$$J_{opt}|_{R=-1} = 1/2\, e^{\int\limits_0^T (2r_s - (\mu_s - r_s)^2/R\sigma_s^2)ds} x_0^2,$$

что совпадает с оптимальным значением среднеквадратического критерия.

Более общая задача статистической оптимизации траектории уравнения (36), известная как задача о наилучшем поведении инвестора на валютном рынке, изучалась в [17] с использованием стохастического принципа максимума. Получить в этой задаче точные аналитические результаты о значении функционала качества на оптимальной траектории, о чувствительности функционала к изменению основных параметров модели не представляется возможным и приходится прибегать к численным или приближенным аналитическим методам, один из которых специально для одномерных билинейных стохастических систем был изложен в данной работе. Обобщение метода на многомерный случай было дано ранее в [11].

10. Заключение

В работе представлен математический аппарат билинейного стохастического анализа. Задачей последнего являются анализ и синтез билинейных систем, подобно тому как линейный стохастический анализ с его специфическими средствами используется для решения линейных задач. Билинейная система является простейшей в классе *нелинейных* систем и для своего анализа требует применения иных, нежели линейная система, математических средств. Таковыми являются *кратный стохастический интеграл* Ито и *стохастическая экспонента*. Стохастическая экспонента возникает в билинейном анализе как *резольвента* билинейного уравнения, и благодаря ей теорию решения билинейных уравнений удается сблизить с теорией линейных систем. Стохастическая экспонента раскладывается в ряд по *многочленам Эрмита* векторного аргумента, которые в билинейном анализе также играют важную роль наряду с экспонентой и кратным интегралом. Теория кратных стохастических интегралов привлекается в работе для приближенного представления выходного сигнала билинейной системы и статистического анализа приближенных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mohler R.R., Kolodziej W.J.* An overviev of stochastic bilinear control processes // IEEE Trans. Syst. Cybernet. 1980. V. 10. P. 913–918.
2. *Пакшин П.В., Угриновский В.А.* Стохастические задачи абсолютной устойчивости // АиТ. 2006. № 11. С. 122–158.
3. *Hinrichsen D., Pritchard A.J.* Stochastic H^∞ // SIAM J. Control Optim. 1998. V. 36. № 5. P. 1504–1538.
4. *Chen B.-S., Zhang W.* Stochastic H_2/H_∞ control with state-dependent noise // IEEE Trans. Autom. Control. 2004. V. 49. № 1. P. 45–57.
5. *Шайкин М.Е.* Оптимальная конечномерная фильтрация вектора состояния для билинейных систем с нильпотентными алгебрами Ли // АиТ. 2000. № 2. С. 62–75.
6. *Маккин Г.* Стохастические интегралы. М.: Мир, 1972.
7. *Хида Т.* Броуновское движение. М.: Наука, 1987.
8. *Каллианпур Г.* Стохастическая теория фильтрации. М.: Наука, 1987.
9. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов / Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. Л.: Наука, 1968. Т. 104. С. 135–180.
10. *Назайкинский В., Стернин Б., Шаталов В.* Методы некоммутативного анализа. М.: Техносфера, 2002.
11. *Шайкин М.Е.* Интегральные представления решений линейных стохастических уравнений с мультипликативными возмущениями // АиТ. 2010. № 4. С. 16–33.
12. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004.
13. *Картан А.* Дифференциальное исчисление и дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.
14. *Кочетков Е.С., Смерчинская С.О.* Теория вероятностей в задачах и упражнениях. М.: Форум–Инфра-М, 2005.
15. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 2004.
16. *Мельников А.В., Ратанов Н.Е.* Неоднородные телеграфные процессы и их применение к моделированию финансовых рынков // Докл. АН. 2007. Т. 412. № 5. С. 597–599.
17. *Chen W.G., Zhen W.* Stochastic maximum principle for a kind of risk-sensitive optimal control problem and application to portfolio choice // Acta Automatica Sinica. 2007. V. 33. № 10. P. 1043–1047.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 06.11.2007