



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Ветохин, Об одном свойстве центральных показателей, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2002, номер 1, 52–53

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

3 декабря 2024 г., 12:28:56



Краткие сообщения

УДК 517.926.4

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

А. Н. Ветохин

Для заданного натурального числа n рассмотрим множество \mathcal{M}_n линейных систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+, \quad (1)$$

с ограниченными непрерывными по $t \in \mathbb{R}^+$ оператор-функциями $A : \mathbb{R}^+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$. Наделим множество \mathcal{M}_n структурой метрического пространства с равномерной на полупрямой \mathbb{R}^+ метрикой

$$\rho(A, B) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|A(t) - B(t)\|,$$

получившееся метрическое пространство обозначим \mathcal{M}_n^u .

В [1] доказано, что показатели Ляпунова $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$, рассматриваемые как функции на пространстве \mathcal{M}_n^u , принадлежат второму классу Бэра, а в [2] доказано, что они могут не принадлежать первому классу Бэра. Поэтому возникает вопрос о нахождении минимальной функции первого класса Бэра на пространстве \mathcal{M}_n^u , оценивающей показатели Ляпунова сверху.

Следуя [3], функционал $\lambda : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *остаточным функционалом*, если для каждой пары оператор-функций $A, B \in \mathcal{M}_n^u$, совпадающих на всей полупрямой \mathbb{R}^+ , кроме, быть может, некоторого отрезка конечной длины, выполнено равенство $\lambda(A) = \lambda(B)$. Напомним [3], что i -й центральный показатель определяется формулой $\Omega_i(A) = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=0}^{m-1} \ln \|X_{L_i}(Tj, T(j+1))\|$, где $X_{L_i}(\tau, t)$ — сужение оператора Коши системы (1) на линейное подпространство i -го показателя Ляпунова.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема. Пусть $\varphi(\cdot) : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$ — остаточный функционал первого класса Бэра на \mathcal{M}_n^u и для любой системы $A \in \mathcal{M}_n$ выполнены неравенства $\lambda_i(A) \leq \varphi(A) \leq \Omega_i(A)$, тогда $\varphi(A) \equiv \Omega_i(A)$.

Доказательство теоремы разделим на леммы, которые представляют самостоятельный интерес.

Множество систем $B \in \mathcal{M}_n$, удовлетворяющих условию $B(t) - A(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, обозначим через $\mathcal{B}(A)$, а сами возмущения $B - A$ системы A при этом условии назовем *бесконечно малыми* [3].

Лемма 1 [4]. Пусть остаточный функционал $\lambda(\cdot) : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит первому классу Бэра на \mathcal{M}_n^u . Тогда для любых двух систем $A \in \mathcal{M}_n$, $B \in \mathcal{B}(A)$ верно равенство $\lambda(A) = \lambda(B)$.

Доказательство. Пусть, вопреки утверждению леммы 1, нашлись две системы A, B , для которых выполнены соотношения

$$B \in \mathcal{B}(A), \quad \lambda(A) \neq \lambda(B). \quad (2)$$

Пусть C — произвольная система из $\mathcal{B}(A)$. Построим последовательность $\{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}_n$:

$$A_m(t) = \begin{cases} C(t) & \text{при } t \in [0, m]; \\ C(t)(m+1-t) + A(t)(t-m) & \text{при } t \in [m, m+1]; \\ A(t) & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Пределом этой последовательности в пространстве \mathcal{M}_n^u является система C , так как

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, \infty)} \|A_m(t) - C(t)\| &\leq \sup_{t \in [m, m+1]} \|A_m(t) - C(t)\| + \sup_{t \in [m+1, \infty)} \|A(t) - C(t)\| = \\ &= \sup_{t \in [m, m+1]} \|C(t)(m+1-t) + A(t)(t-m) - C(t)\| + \sup_{t \in [m+1, \infty)} \|A(t) - C(t)\| \leq 2 \sup_{t \in [m, \infty)} \|A(t) - C(t)\|, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(A_m, C) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, \infty)} \|A_m(t) - C(t)\| \leq 2 \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t \in [m, \infty)} \|A(t) - C(t)\| = 0. \quad (3)$$

В силу остаточности функционала λ получаем $\lambda(A_m) = \lambda(A)$. Аналогично построим последовательность $\{B_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathcal{M}_n$, для которой выполнены соотношения

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(B_m, C) = 0, \quad \lambda(B_m) = \lambda(B). \quad (4)$$

Из (2)–(4) следует, что каждая точка C замкнутого множества $\mathcal{B}(A)$ является точкой разрыва функционала λ , но пространство \mathcal{M}_n^u — полное, а поэтому функционал не является функцией первого класса Бэра на этом пространстве [5, с. 430]. Лемма 1 доказана.

Обозначим через $\bar{\lambda}(\cdot) : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$ функционал, заданный следующей формулой:

$$\bar{\lambda}(A) = \sup_{B \in \mathcal{B}(A)} \lambda(B).$$

Лемма 2. Пусть остаточный функционал $\varphi(\cdot) : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит первому классу Бэра на пространстве \mathcal{M}_n^u и для произвольной системы A выполнены неравенства $\lambda(A) \leq \varphi(A) \leq \bar{\lambda}(A)$, тогда $\varphi(A) \equiv \bar{\lambda}(A)$.

Доказательство. Допустим, что существуют система A и число $\delta > 0$, такие, что выполнено равенство $\varphi(A) = \bar{\lambda}(A) - \delta$. В силу определения функционала $\bar{\lambda}$ существует система $B \in \mathcal{B}(A)$, такая, что $\lambda(B) \geq \bar{\lambda}(A) - \frac{\delta}{2}$, следовательно, $\varphi(B) \geq \lambda(B) > \bar{\lambda}(A) - \delta = \varphi(A)$. Согласно лемме 1, функционал φ не принадлежит первому классу Бэра на пространстве \mathcal{M}_n^u . Полученное противоречие доказывает лемму 2.

Из леммы 2 следует, что если функционал $\bar{\lambda}$ принадлежит первому классу Бэра на пространстве \mathcal{M}_n^u , то он является наименьшей функцией первого класса Бэра, оценивающей функционал λ сверху.

Завершение доказательства теоремы. Пусть $\lambda_i(A)$ — i -й показатель Ляпунова системы A . Обозначим через λ_i^{\max} минимальную полунепрерывную сверху мажоранту i -го показателя Ляпунова, т.е.

$$\lambda_i^{\max}(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\rho(A, B) \leq \varepsilon} \lambda_i(B).$$

В силу определения функционал λ_i^{\max} является остаточным и принадлежит первому классу Бэра на пространстве \mathcal{M}_n^u . В [3] доказана справедливость следующих равенств:

$$\bar{\lambda}_i(A) = \lambda_i^{\max}(A) = \Omega_i(A), \quad (5)$$

из которых вытекает, что функционал $\bar{\lambda}_i$ является остаточным и принадлежит первому классу Бэра на пространстве \mathcal{M}_n^u . Следовательно, из леммы 2 и равенств (5) получаем, что для остаточного функционала φ первого класса Бэра, удовлетворяющего неравенствам

$$\lambda_i(A) \leq \varphi(A) \leq \Omega_i(A),$$

выполнено тождество $\varphi(A) \equiv \Omega_i(A)$. Теорема доказана.

Таким образом, наименьшей функцией первого класса Бэра на пространстве \mathcal{M}_n^u , оценивающей i -й показатель Ляпунова сверху, является i -й центральный показатель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миллиончиков В.М. Формулы для показателей Ляпунова семейства эндоморфизмов метризованного векторного расслоения // Матем. заметки. 1986. **39**, № 1. 29–51.
2. Ратимбердиев М.И. О бэровском классе показателей Ляпунова // Матем. заметки. 1962. **31**, № 6. 925–931.
3. Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. Семинара им. И.Г. Петровского. 1983. Вып. 9. 111–166.
4. Ветохин А.Н. О классе Бэра остаточных показателей // Дифференц. уравнения. 1995. **31**, № 5. 909–1000.
5. Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.

Поступила в редакцию
13.09.2000