

ХРОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПРЕЩЕННЫМИ РАССТОЯНИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ С ℓ_q -МЕТРИКОЙ

© 2016 г. А. В. БЕРДНИКОВ

Аннотация. Работа посвящена исследованию хроматического числа $\bar{\chi}(X; \rho; k)$ метрического пространства X с метрикой ρ и k запрещенными расстояниями. Получена оценка вида $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; \rho; k) \geq (Bk)^{Cn}$ для тех случаев, когда метрика ρ на множестве \mathbb{R}^n порождена ℓ_q -нормой.

1. Введение. *Хроматическим числом* метрического пространства (X, ρ) с запрещенными расстояниями $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}_+$ называется наименьшее количество цветов, которое может понадобиться для раскраски всех точек множества X таким образом, чтобы расстояние между любыми двумя точками одинакового цвета не было равно ни одному из чисел a_1, \dots, a_k . Для этой величины мы будем использовать обозначение $\chi(X; \rho; a_1, \dots, a_k)$.

Приведенное определение является естественным обобщением классического понятия хроматического числа, впервые сформулированного в середине XX века Э. Нельсоном и Г. Хадвигером. Они рассматривали хроматическое число пространства \mathbb{R}^n со стандартной евклидовой метрикой и одним запрещенным расстоянием (т.е. в случае $k = 1$).

Данная статья посвящена исследованию величины

$$\bar{\chi}(X; \rho; k) := \max_{a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}_+} \chi(X; \rho; a_1, \dots, a_k).$$

В ряде публикаций [2–4, 6, 7] число $\bar{\chi}(X; \rho; k)$ уже оценивалось для различных метрических пространств (X, ρ) . В частности, в статье А. М. Райгородского [4] доказано, что существуют положительные константы B и C , для которых при любом достаточного большом значении n и любом натуральном k справедлива оценка

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; \rho_e; k) \geq (Bk)^{Cn}, \quad (1)$$

где ρ_e — стандартная евклидова метрика на множестве \mathbb{R}^n .

В 2014 г. автор уточнил [1] этот результат, доказав, что для любого $C < 1/3$ найдется такая константа $B > 0$, что неравенство (1) будет выполнено при всех натуральных значениях n и k . На момент написания данной статьи доказательство еще не опубликовано.

В настоящей работе производится оценка вида $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; \rho; k) \geq (Bk)^{Cn}$ для тех случаев, когда метрика ρ на множестве \mathbb{R}^n порождена ℓ_q -нормой.

2. Определения и формулировка теоремы. Пусть на множестве X задана метрика ρ , а также выбраны запрещенные расстояния $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}_+$.

Множество $Y \subset X$ называется *независимым*, если все расстояния между его точками не являются запрещенными, т.е. $\rho(x, y) \notin \{a_1, \dots, a_k\}$ для любых $x, y \in Y$. Фактически, хроматическое число пространства X — это количество множеств в наименьшем покрытии множества X независимыми множествами. Мощность наибольшего независимого множества в пространстве X называется *числом независимости* этого пространства; для данной величины мы введем обозначение $\alpha(X; \rho; a_1, \dots, a_k)$.

Один из стандартных способов оценить величину $\chi(X; \rho; a_1, \dots, a_k)$ — это выделить в X некоторое подмножество Σ и воспользоваться неравенством

$$\chi(\Sigma; \rho; a_1, \dots, a_k) \geq \frac{\text{card } \Sigma}{\alpha(\Sigma; \rho; a_1, \dots, a_k)}. \quad (2)$$

Поскольку $\chi(X; \rho; a_1, \dots, a_k) \geq \chi(\Sigma; \rho; a_1, \dots, a_k)$, отношение в правой части неравенства (2) действительно является нижней оценкой хроматического числа пространства X . Мы воспользуемся описанным методом в доказательстве следующей теоремы.

Теорема. Пусть зафиксировано натуральное число q и для каждого натурального n на множестве \mathbb{R}^n задана метрика ρ , порожденная ℓ_q -нормой, т.е.

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_q = \sqrt[q]{|x_1 - y_1|^q + \dots + |x_n - y_n|^q} \quad (3)$$

для любых точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ из \mathbb{R}^n . Тогда для любого положительного числа $C < \frac{1}{q+1}$ найдется такое число B , что неравенство

$$\overline{\chi}(\mathbb{R}^n; \rho; k) \geq (Bk)^{Cn} \quad (4)$$

будет выполнено для всех натуральных чисел k и n .

3. Доказательство теоремы. Прежде чем приступить к доказательству теоремы, докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть заданы натуральные числа q, r и n и метрика ρ на множестве $\Sigma \subset \{1, \dots, r\}^n$ порождена ℓ_q -нормой, т.е. для любой пары точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ из Σ выполнено равенство (3). Пусть, кроме того, заданы простое число p и запрещенные расстояния $a_1 = \sqrt[q]{p}, \dots, a_k = \sqrt[q]{kr}$, причем расстояние между любыми двумя точками из Σ не представимо в виде $\sqrt[q]{ir}$, где $i \in \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, k\}$. Тогда выполнено неравенство

$$\alpha(\Sigma; \rho; a_1, \dots, a_k) \leq \sum_{m=0}^{p-1} C_n^m (r-1)^m.$$

Замечание. Здесь удобно полагать $C_n^m = 0$ при $m > n$ и $0^0 = 1$, хотя в дальнейшем такие «вырожденные» случаи нам не пригодятся.

В основе доказательства леммы лежит так называемый *линейно-алгебраический метод*. Более подробно с этим методом можно ознакомиться, например, по книге А. М. Райгородского [5].

Доказательство. Зафиксируем произвольный вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ из множества Σ и определим функцию $f_{\mathbf{x}} : \Sigma \rightarrow \mathbb{Z}$ следующим образом:

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{p-1} (i - \rho^q(\mathbf{x}, \mathbf{y}));$$

здесь

$$\rho^q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}))^q = |x_1 - y_1|^q + \dots + |x_n - y_n|^q$$

для любого $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \Sigma$. Замечательная особенность этой функции заключается в том, что для каждого вектора $\mathbf{y} \in \Sigma \setminus \{\mathbf{x}\}$ условие $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p}$ выполняется тогда и только тогда, когда расстояние между \mathbf{x} и \mathbf{y} не является запрещенным.

Поскольку $|x_j - y_j|$ — целозначная функция от y_j , заданная на множестве $\{1, \dots, r\}$, ее можно заменить некоторым многочленом от y_j с рациональными коэффициентами. Следовательно, функция $\rho^q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ от \mathbf{y} равна на множестве Σ какому-то многочлену с рациональными коэффициентами, в каждом одночлене которого присутствует не более одной переменной, и найдется многочлен $P_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_n]$, равный на множестве Σ функции $f_{\mathbf{x}}(y_1, \dots, y_n)$, причем в каждый одночлен многочлена $P_{\mathbf{x}}$ входит не более $p-1$ переменной (иными словами, $P_{\mathbf{x}}$ — сумма одночленов вида $y_{j_1}^{\beta_1} \dots y_{j_m}^{\beta_m}$, где $m < p$, с рациональными коэффициентами).

Теперь для каждого $j \in \{1, \dots, n\}$, выразив y_j^r из тождества

$$(y_j - 1) \cdots (y_j - r) = 0,$$

мы можем понизить степень вхождения переменной y_j во все одночлены многочлена $P_{\mathbf{x}}$, не меняя при этом значения, которые этот многочлен принимает на множестве Σ . В итоге получим многочлен $\tilde{P}_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_n]$, равный функции $f_{\mathbf{x}}(y_1, \dots, y_n)$ при всех $(y_1, \dots, y_n) \in \Sigma$, каждый одночлен которого имеет вид $y_{j_1}^{\beta_1} \cdots y_{j_m}^{\beta_m}$, где $m < p$ и $\beta_l < r$ для каждого $l \in \{1, \dots, m\}$.

Итак, каждому вектору $\mathbf{x} \in \Sigma$ мы можем поставить в соответствие многочлен $\tilde{P}_{\mathbf{x}}$ по вышеописанной схеме.

Теперь зафиксируем любое независимое множество максимальной мощности $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_h\} \subset \Sigma$ (при этом, естественно, $h = \alpha(\Sigma; \rho; a_1, \dots, a_k)$). Из свойств построенных нами многочленов следует, что условие $\tilde{P}_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_j) \equiv 0 \pmod{p}$ выполняется тогда и только тогда, когда $i \neq j$. Значит, многочлены $\tilde{P}_{\mathbf{x}_1}, \dots, \tilde{P}_{\mathbf{x}_h}$ независимы как отображения из множества Σ в поле $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ остатков по модулю p , т.е. если для некоторого набора целых чисел c_1, \dots, c_h при всех $\mathbf{y} \in \Sigma$ выполняется тождество

$$c_1 \tilde{P}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}) + \dots + c_h \tilde{P}_{\mathbf{x}_h}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p}, \quad (5)$$

то $c_1 \equiv \dots \equiv c_h \equiv 0 \pmod{p}$. Действительно, подставив \mathbf{x}_i вместо \mathbf{y} в тождество (5), получим $c_i \equiv 0 \pmod{p}$. Нетрудно видеть, что отсюда вытекает независимость многочленов $\tilde{P}_{\mathbf{x}_1}, \dots, \tilde{P}_{\mathbf{x}_h}$ в пространстве $\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_n]$.

Таким образом,

$$\alpha(\Sigma; \rho; a_1, \dots, a_k) \leq \dim \mathcal{P},$$

где $\mathcal{P} = \langle \tilde{P}_{\mathbf{x}} \rangle_{\mathbf{x} \in \Sigma}$ — линейная оболочка многочленов $\tilde{P}_{\mathbf{x}}$ в пространстве $\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_n]$. Для завершения доказательства осталось заметить, что $\dim \mathcal{P}$ не превышает количества одночленов вида $y_{j_1}^{\beta_1} \cdots y_{j_m}^{\beta_m}$, где $m < p$ и $\beta_l < r$ для всех $l \in \{1, \dots, m\}$, т.е.

$$\dim \mathcal{P} \leq \sum_{m=0}^{p-1} C_n^m (r-1)^m.$$

Лемма доказана. □

Теперь мы готовы доказать теорему.

Доказательство теоремы. Зафиксируем константу $C < \frac{1}{q+1}$ и докажем для нее утверждение теоремы.

Сначала найдем число A , удовлетворяющее неравенствам

$$\max \left\{ q, \frac{1}{1 - Cq} \right\} \leq A < q + 1, \quad (6)$$

и натуральное число L , для которого выполняется неравенство $\frac{L}{L+1} > AC$ (для удобства введем обозначение $\Lambda := \frac{L}{L+1}$). Теперь выберем константу $K_2 \geq 6^q$, удовлетворяющую условию

$$\Lambda - \frac{4}{K_2^{q/A}} \geq AC, \quad (7)$$

и константу $K_1 > 0$, удовлетворяющую условиям

$$\frac{1}{L} \left(\frac{K_1}{K_2} \right)^{1/A} \geq 36, \quad (8)$$

$$K_1^{\frac{1}{A} - \frac{1}{q+1}} \geq 8LK_2. \quad (9)$$

Произведем оценку величины $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; \rho; k)$. В зависимости от значений n и k возможны три случая.

1. $k \leq K_1$. Это самый простой случай. Достаточно взять константу $B_1 := \frac{1}{K_1}$, чтобы выполнялось неравенство $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; \rho; k) \geq (B_1 k)^{Cn}$.

2. $K_1 < k \leq K_2 n^A$.

Определим величину

$$r := \left\lceil \frac{1}{L} \left(\frac{k}{K_2} \right)^{1/A} \right\rceil.$$

Поскольку $k > K_1$ и выполняется условие (8), мы можем утверждать, что $r \geq 36$. Кроме того, справедливы следующие оценки:

$$\frac{1}{2L} \left(\frac{k}{K_2} \right)^{1/A} \leq r \leq \frac{1}{L} \left(\frac{k}{K_2} \right)^{1/A}. \quad (10)$$

Также определим число $t := \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$. Так как $L \in \mathbb{N}$ и $\frac{n}{r} \geq L$ в силу условия

$$n \geq \left(\frac{k}{K_2} \right)^{1/A},$$

выполнено неравенство

$$t \geq \frac{L}{L+1} \frac{n}{r}.$$

Значит, можно оценить rt следующим образом:

$$\Lambda n \leq rt \leq n. \quad (11)$$

Далее мы будем оценивать снизу величину $\bar{\chi}(\mathbb{R}^{rt}; \rho; k)$. Полученная оценка будет являться также и оценкой числа $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; \rho; k)$, поскольку $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; \rho; k) \geq \bar{\chi}(\mathbb{R}^{rt}; \rho; k)$.

Рассмотрим множество Σ , состоящее из всех векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{rt}$, у которых t координат равны 1, t координат равны 2, \dots , t координат равны r . Более формально, вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{rt})$ принадлежит множеству Σ тогда и только тогда, когда

$$\text{card}\{j \mid x_j = c\} = t \quad \forall c \in \{1, \dots, r\}.$$

Мы собираемся определить запрещенные расстояния a_1, \dots, a_k и получить оценку величины $\bar{\chi}(\mathbb{R}^{rt}; \rho; k)$, воспользовавшись неравенством (2).

Легко видеть, что

$$\text{card } \Sigma = \frac{(rt)!}{(t!)^r}.$$

Поскольку

$$t! \leq t^t, \quad (rt)! \geq \left(\frac{rt}{3} \right)^{rt}$$

(последнее неравенство можно доказать индукцией по значению rt), получаем нижнюю оценку для $\text{card } \Sigma$:

$$\text{card } \Sigma \geq \left(\frac{r}{3} \right)^{rt}. \quad (12)$$

Чтобы воспользоваться неравенством (2), нам остается определить значения a_1, \dots, a_k . Введем величину

$$s := \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma} \rho^q(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Сразу же оценим ее сверху:

$$s \leq rt \cdot (r-1)^q \leq r^{q+1} t.$$

Для получения нижней оценки рассмотрим вектор $\mathbf{x} = (1, \dots, 1, \dots, r, \dots, r) \in \Sigma$, координаты которого упорядочены по неубыванию, и вектор $\mathbf{y} = (r, \dots, r, \dots, 1, \dots, 1) \in \Sigma$, координаты которого не возрастают. Поскольку

$$\rho^q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = t(|r-1|^q + |r-3|^q + \dots + |1-r|^q)$$

и $r \geq 36$, выполняется неравенство

$$\rho^q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq t \cdot \frac{r}{3} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^q.$$

Итак, мы получили оценку

$$\frac{1}{3 \cdot 2^q} r^{q+1} t \leq s \leq r^{q+1} t. \quad (13)$$

Отсюда немедленно следует, что

$$\frac{s}{k} \geq \frac{1}{3 \cdot 2^q k} r^{q+1}.$$

Теперь используем оценку (10):

$$\frac{s}{k} \geq \frac{1}{3 \cdot 2^q k} \left(\frac{1}{2L} \left(\frac{k}{K_2} \right)^{1/A} \right)^{q+1} \geq \left(\frac{k^{\frac{1}{A} - \frac{1}{q+1}}}{8LK_2} \right)^{q+1}.$$

Но

$$k > K_1, \quad \frac{1}{A} - \frac{1}{q+1} > 0$$

в силу условия (6), поэтому

$$\frac{s}{k} \geq \left(\frac{K_1^{\frac{1}{A} - \frac{1}{q+1}}}{8LK_2} \right)^{q+1}.$$

Осталось воспользоваться условием (9), чтобы убедиться в справедливости оценки $\frac{s}{k} \geq 1$. Таким образом, если мы определим число p как наименьшее простое, удовлетворяющее условию

$$p \geq \frac{s}{k}, \quad (14)$$

постулат Бертрана даст нам неравенство $p \leq \frac{2s}{k}$. Верхняя оценка на s (неравенство (13)) позволяет оценить p следующим образом:

$$p \leq \frac{2}{k} \cdot r t \cdot r^q.$$

Воспользовавшись неравенствами (10), (11) и (6), получаем:

$$p \leq \frac{2n}{K_2^{q/A}}. \quad (15)$$

Запрещенные расстояния в пространстве Σ мы определим следующим образом:

$$a_i = \sqrt[q]{i^p}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Итак, из неравенства (2) следует, что

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^{rt}; \rho; k) \geq \frac{\text{card } \Sigma}{\alpha(\Sigma; \rho; a_1, \dots, a_k)}. \quad (16)$$

Условие (14) гарантирует, что для любых точек \mathbf{x} и \mathbf{y} из Σ выполнено неравенство $\rho^q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq kp$. Значит, мы можем применить лемму и получить следующую оценку:

$$\alpha(\Sigma; \rho; a_1, \dots, a_k) \leq \sum_{m=0}^{p-1} C_{rt}^m (r-1)^m \leq 2^{rt} r^p.$$

Поскольку $r \geq 36$, можно утверждать, что

$$\alpha(\Sigma; \rho; a_1, \dots, a_k) \leq 2^{rt} \left(\frac{r}{6}\right)^{2p}.$$

Используя этот результат и неравенство (12), получаем оценку

$$\frac{\text{card } \Sigma}{\alpha(\Sigma; \rho; a_1, \dots, a_k)} \geq \left(\frac{r}{6}\right)^{rt-2p}. \quad (17)$$

Из неравенств (11), (15) и (7) следует, что

$$rt - 2p \geq ACn. \quad (18)$$

Таким образом, неравенства (16), (17), (18) и (10) дают окончательную оценку:

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; \rho; k) \geq (B_2 k)^{Cn},$$

где

$$B_2 := \frac{1}{(12L)^A K_2}.$$

3. $k > \max\{K_1, K_2 n^A\}$.

В этом случае рассмотрим множество

$$S := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \mid \|\mathbf{x}\|_q \leq \frac{\sqrt[q]{k}}{2} \right\}$$

всех точек с целыми координатами в шаре радиуса $\frac{1}{2}\sqrt[q]{k}$. Заметим, что $\bar{\chi}(S; \rho; k) = \text{card } S$. Действительно, $\rho^q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{1, \dots, k\}$ для любых различных точек $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$, поэтому можно определить запрещенные расстояния a_1, \dots, a_k таким образом, чтобы все независимые множества в пространстве S были одноэлементными. Так как $K_2 \geq 6^q$, неравенство

$$\frac{\sqrt[q]{k}}{2} - \sqrt[q]{n} \geq \frac{\sqrt[q]{k}}{3}$$

выполняется при всех значениях n и k , удовлетворяющих условию $k > K_2 n^A$. Следовательно, справедлива следующая оценка:

$$\text{card } S \geq V_n^q \left(\frac{\sqrt[q]{k}}{2} - \sqrt[q]{n} \right) \geq V_n^q \left(\frac{\sqrt[q]{k}}{3} \right),$$

где

$$V_n^q(r) = \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{q} + 1\right)r \right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{q} + 1\right)}$$

— объем шара радиуса r в n -мерном пространстве с ℓ_q -метрикой. Из формулы Стирлинга следует, что существует такая константа G , для которой независимо от n верна оценка

$$\Gamma\left(\frac{n}{q} + 1\right) \leq (Gn)^{n/q}.$$

Кроме того, $n < k^{1/A}$, поэтому

$$\Gamma\left(\frac{n}{q} + 1\right) \leq (Gk^{1/A})^{n/q}.$$

Таким образом,

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; \rho; k) \geq \text{card } S \geq (B_3 k)^{\frac{n}{q}\left(1 - \frac{1}{A}\right)},$$

где

$$B_3 := \left(\frac{\left(\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{1}{q} + 1\right) \right)^q}{G} \right)^{\frac{1}{1 - \frac{1}{A}}}.$$

Из условия (6) следует неравенство

$$\frac{1}{q}\left(1 - \frac{1}{A}\right) \geq C,$$

поэтому

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; \rho; k) \geq (B_3 k)^{Cn}.$$

Итак, в каждом из трех случаев мы нашли константу B_i , для которой выполняется неравенство

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; \rho; k) \geq (B_i k)^{Cn}.$$

Значит, достаточно взять $B := \min\{B_1, B_2, B_3\}$, чтобы неравенство (4) выполнялось при всех натуральных k и n . \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бердников А. В. Оценка хроматического числа евклидова пространства с несколькими запрещенными расстояниями // Мат. заметки. — 2016. — 99, № 5. — С. 783–787.
2. Горская Е. С., Митричева И. М., Протасов В. Ю., Райгородский А. М. Оценка хроматических чисел евклидова пространства методами выпуклой минимизации // Мат. сб. — 2009. — 200, № 6. — С. 3–22.
3. Моцевитин Н. Г., Райгородский А. М. О раскрасках пространства \mathbb{R}^n с несколькими запрещенными расстояниями // Мат. заметки. — 2007. — 81, № 5. — С. 733–743.
4. Райгородский А. М. Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств // Усп. мат. наук. — 2001. — 56, № 1. — С. 107–146.
5. Райгородский А. М. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2007.
6. Райгородский А. М., Шитова И. М. О хроматических числах вещественных и рациональных пространств с вещественными или рациональными запрещенными расстояниями // Мат. сб. — 2008. — 199, № 4. — С. 107–142.
7. Шитова И. М. О хроматических числах метрических пространств с двумя запрещенными расстояниями // Докл. РАН. — 2007. — 413, № 2. — С. 178–180.

А. В. Бердников

МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

E-mail: alexey-berdnikov@yandex.ru