МАЙ 1989 г., ТОМ 25, № 5

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925

А. Ю. АЛЕКСАНДРОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕКУРРЕНТНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = -x + f(t), \tag{1}$$

где $f(t)$ — вещественная, непрерывная и ограниченная функция, заданная при $t \in (-\infty, +\infty)$.

Уравнение (1) имеет единственное ограниченное решение, которое можно представить в виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^{0} \exp(s) f(s+t)\, ds. \tag{2}$$

Если $f(t)$ — периодическая или почти периодическая функция, то уравнение (1) имеет единственное периодическое и соответственно почти периодическое решение.

Возникает вопрос, будет ли решение (2) рекуррентной функцией, если возмущение $f(t)$ — рекуррентная функция (см. [1, с. 105]).

Пусть возмущение имеет вид

$$f(t) = \sin(t\varphi(t)), \tag{3}$$

где $\varphi(t)$ — вещественная, дважды непрерывно дифференцируемая, 2π-периодическая функция, и уравнение

$$\varphi'(t) = 0 \tag{4}$$

имеет конечное число корней на промежутке $[0, 2\pi]$. В [1, с. 119] показано, что при выполнении этих условий функции вида (3) являются рекуррентными.

Теорема 1. *Уравнение (1) с возмущениями из класса (3) не имеет рекуррентных решений.*

Доказательство. Оценим единственное ограниченное решение уравнения (1):

$$|x(t)| \leqslant \left| \int_{-\infty}^{-2\pi N} \exp(s) \sin((t+s)\varphi(t+s))\, ds \right| + \left| \int_{-2\pi N}^{0} \exp(s) \sin((t+s)\varphi(t+s))\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp(-2\pi N) + \left| \int_{-2\pi N}^{0} \exp(s) \sin((t+s)\varphi(t+s))\, ds \right|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое N, чтобы

$$\exp(-2\pi N) < \varepsilon. \tag{5}$$

Если p — количество корней уравнения (4) на промежутке $[0, 2\pi]$, то для любого t на $[-2\pi N, 0]$ будет не более Np корней уравнения $\varphi'(s+t) = 0$. Выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы выполнялось

$$2Np\delta < \varepsilon. \tag{6}$$

Пусть $B = \bigcup_{j=1}^{r} (\lambda_j - \delta,\ \lambda_j - \delta)$, где λ_j — корни уравнения $\varphi'(s+t) = 0$ на $[-2\pi N,\ 0]$; r — количество этих корней, а $A = [-2\pi N,\ 0] \setminus B$. Тогда существуют m_1 и m_2, что при $s \in A$ $0 < m_1 \leqslant |\varphi'(s+t)| \leqslant m_2$, причем m_1 и m_2 не зависят от t.

Введем обозначения:

$$m_3 = \max_{t \in [0, 2\pi]} |\varphi(t)|, \quad m_4 = \max_{t \in [0, 2\pi]} |\varphi''(t)|.$$

Оценим

$$\int_{-2\pi N}^{0} \exp(s) \sin((t+s)\,\varphi(t+s))\, ds.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int \exp(s) \sin((s+t)\,\varphi(s+t))\, ds = -\Big(\exp(s) \cos((s+t)\,\varphi(s+t)) \frac{1}{\varphi(s+t) + (s+t)\,\varphi'(s+t)} + \int \exp(s) \cos((s+t)\,\varphi(s+t)) \left(\frac{(-1)}{\varphi(s+t) + (s+t)\,\varphi'(s+t)} + \frac{2\varphi'(s+t) + (s+t)\,\varphi''(s+t)}{(\varphi(s+t) + (s+t)\,\varphi'(s+t))^2}\right) ds\Big).$$

Воспользовавшись этим соотношением и неравенствами (5), (6), найдем, что при достаточно большом t

$$|x(t)| \leqslant \exp(-2\pi N) + \int_B |\exp(s) \sin((t+s)\,\varphi(t+s))|\, ds + \left|\int_A \exp(s) \sin((t+s)\,\varphi(t+s))\, ds\right| \leqslant \exp(-2\pi N) + 2pN\delta + \frac{3}{(t-2\pi N)\, m_1 - m_3} + \frac{m_1 t + 2m_2}{((t-2\pi N)\, m_1 - m_3)^2} < 3\varepsilon.$$

Получили, что единственное ограниченное решение стремится к нулю при $t \to \infty$, следовательно, уравнение (1) не имеет рекуррентных решений. Теорема доказана.

Возьмем теперь возмущение $f(t)$, принадлежащее пространству $H^N(t\varphi_1, ..., t\varphi_n)$ рекуррентных функций, где все $\varphi_k(t)$ удовлетворяют условиям, наложенным на функцию $\varphi(t)$ (см. [1, с. 127]).

Теорема 2. *Уравнение (1) с возмущениями из пространства $H^N(t\varphi_1, ..., t\varphi_n)$ не имеет рекуррентных решений.*

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + f(t), \tag{7}$$

где A — вещественная постоянная матрица.

Теорема 3. *Если вещественные части собственных чисел матрицы A отличны от нуля, а компоненты вектор-функции $f(t)$ принадлежат пространству $H^N(t\varphi_1, ..., t\varphi_n)$, то система (7) не имеет рекуррентных решений.*

Литература

1. Зубов В. И. Аналитическая динамика гироскопических систем. Л., 1970.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 25 августа 1987 г.

УДК 517.928

Л. А. БАКАЛЕЙНИКОВ, Ю. А. ПОЛОВКО

АСИМПТОТИКА БЛИЗКИХ К РАЗРЫВНЫМ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ

1. Введение. В работе [1] были исследованы периодические решения автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром μ при производных. Рассматривался случай, когда при любых значениях μ на фазовой плоскости существует ячейка, состоящая из седел, соединенных сепаратри-