

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. D. Morozkin, Optimal control of one-dimensional heating with phase restrictions, *Mat. Model.*, 1996, Volume 8, Number 3, 91–110

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.171

March 23, 2025, 13:43:49



ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

УДК 517.977:669.046

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОМЕРНЫМ НАГРЕВОМ С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

© *Н.Д. Морозкин*

Башкирский государственный университет,
450074, г.Уфа, ул.Фрунзе, д.32,
E-mail: yavdat@bguu.bashkiria.su

Рассматривается задача оптимального по быстродействию управления нагревом одномерных тел (пластины, цилиндра и шара) с учетом ограничений на температуру поверхности и на сжимающие и растягивающие термонапряжения. Управление осуществляется через граничные условия. Предлагается приближенный способ решения, основанный на аппроксимации исходной задачи конечномерной. Указывается численный алгоритм типа Итона-Нейштадта решения конечномерной задачи. Доказывается сходимость этого алгоритма. Получены оценки скорости сходимости конечномерных аппроксимаций по квадратичному функционалу и оценки погрешностей выполнения фазовых ограничений. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

OPTIMAL CONTROL OF ONE-DIMENSIONAL HEATING WITH PHASE RESTRICTIONS

N.D. Morozkin

*Department of Mathematics, Bashkir State University,
450074, RUSSIA, Ufa, ul. Frunze, 32,
E-mail: yavdat@bguu.bashkiria.su*

The time-optimal control problem of heating of one-dimensional bodies (plates, cylinders and balls) with restrictions on surface temperature and compressing and expanding thermotensions is considered. The control through boundary conditions is fulfilled. The approximate solution method, based on approximation of input problem by finite-dimensional problem, is proposed. The numerical algorithm of solution of finite-dimensional problem of Neustadt-Eaton type is proposed. The convergence of this algorithm is proved. Estimates of the rate of convergence for the square functional and estimates of errors in realization of phase restrictions are obtained. The results of calculating experiments are given.

Введение. Задачи оптимизации процессов нагрева массивных тел с фазовыми ограничениями по сравнению с аналогичными задачами без ограничений изучены значительно меньше. В исследованиях, ведущихся в этом направлении, можно выделить работы [1-3]. В [1] решается нелинейная задача управления нагревом с учетом фазовых ограничений методом последовательной линеаризации Р.П.Федоренко. В работе [2] изучается линейная задача. В предположе-

нии, что оптимальный нагрев можно осуществить, двигаясь только по верхним границам наложенных ограничений, решение исходной задачи сводится либо к обычной, либо к неклассической задаче теплопроводности, когда вместо условий теплообмена на границе заданы термонапряжения. В работе [3] линейная бесконечномерная задача аппроксимируется конечномерной и сводится к оптимальному управлению системой обыкновенных дифференциальных уравнений с линейными ограничениями на фазовые переменные. Методы решения полученной задачи были указаны лишь для укороченной системы двух-трех уравнений без учета сжимающих напряжений и зависимости предела прочности от температуры.

В настоящей работе развивается подход, использованный в [3]. В §1, воспользовавшись обобщенным интегральным преобразованием М.Д. Михайлова [4] и аппроксимировав зависимость предела прочности от температуры линейной функцией, исходную задачу оптимизации сводим к конечномерной задаче оптимального по быстродействию управления системой N линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с линейными ограничениями на фазовые переменные. Для сформулированной задачи получены оценки скорости сходимости конечномерных приближений по квадратичному функционалу, а также оценки выполнения фазовых ограничений.

В §2 предлагается численный алгоритм решения конечномерной задачи, основанный на методе корректировки опорной гиперплоскости и представляющий собой модификацию "многошагового двойственного алгоритма", изложенного в [5]. Доказана теорема о сходимости последовательных приближений, построенных согласно предложенному алгоритму. Алгоритм может быть использован для решения любых задач оптимального быстродействия, описываемых линейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений как при наличии линейных ограничений на фазовые переменные, так и при их отсутствии.

В §3 приведены результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие эффективную работу алгоритма, а также обсуждены некоторые аспекты, связанные с его компьютерной реализацией.

§ 1. Постановка задачи и конечномерная аппроксимация

1. **Постановка задачи.** Предположим, что все теплофизические и механические коэффициенты, входящие в уравнения (за исключением предела прочности), постоянны и равны приведенным. Введем следующие переменные: $\tau = at/R^2$ – безразмерное время, a – коэффициент температуропроводности, t – текущее время; R – толщина или радиус изделия; $\ell = r/R$ – безразмерная пространственная координата, r – текущая пространственная координата, $r \in [0, R]$; $Bi = \alpha R/\lambda$ – критерий Био, α – коэффициент теплоотдачи, λ – коэффициент теплопроводности; $Q = \beta T$ – безразмерная температура, β – коэффициент линейного расширения, T – текущая температура; $\sigma_p^* = \sigma_p(1-\nu)/E$, $\sigma_c^* = \sigma_c(1-\nu)/E$ – безразмерные пределы прочности на растяжение и сжатие соответственно, σ_p, σ_c – текущие значения пределов прочности, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

В указанных обозначениях тепловое поле описывается следующими соотношениями:

$$\frac{\partial Q(\ell, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 Q(\ell, \tau)}{\partial \ell^2} + \frac{q}{\ell} \frac{\partial Q(\ell, \tau)}{\partial \ell}, \quad \ell(0,1), \quad \tau > 0, \quad (1)$$

$$Q(\ell, 0) = Q_0 = \text{const}, \quad \ell[0,1], \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q(0, \tau)}{\partial \ell} = 0, \quad \tau > 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial Q(\ell, \tau)}{\partial \ell} = \text{Bi}(u(\tau) - Q(\ell, \tau)), \quad \tau > 0, \quad (4)$$

где $q=0$ для пластины, $q=1$ для цилиндра, $q=2$ для шара, $u=u(\tau)$ – управление – кусочно-непрерывная функция со значениями из отрезка $[M_1, M_2]$, т.е.

$$M_1 \leq u(\tau) \leq M_2, \quad \tau > 0. \quad (5)$$

Множество таких управлений обозначим через U .

Поле термоупругих напряжений описывается системой уравнений Дюамеля-Неймана, которая в условиях рассматриваемой задачи решается аналитически. В случае пластины отличными от нуля будут нормальные напряжения σ_{yy} и σ_{zz} , причем $\sigma_{yy} = \sigma_{zz}$, в случае сплошного цилиндра и шара – нормальные напряжения σ_{rr} , σ_{zz} и $\sigma_{\varphi\varphi}$, причем для цилиндра $\sigma_{zz} = \sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}$, а для шара $\sigma_{zz} = \sigma_{\varphi\varphi}$.

Анализ термонапряжений показывает, что при осесимметричном нагреве растягивающие напряжения наибольших значений достигают на оси, а сжимающие на поверхности нагреваемых тел. При этом максимальными по абсолютной величине для сплошного цилиндра и шара на поверхности являются нормальные напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$, а на оси – нормальные напряжения σ_{zz} [2, стр.80]. С учетом вышесказанного, ограничения на термонапряжения записываются в виде

$$Q(1, \tau) - (q+1) \int_0^1 \xi^q Q(\xi, \tau) d\xi \leq \sigma_c^*(Q(1, \tau)), \quad (6)$$

$$\gamma \left(-\frac{1}{q+1} Q(0, \tau) + \int_0^1 \xi^q Q(\xi, \tau) d\xi \right) \leq \sigma_p^*(Q(0, \tau)), \quad (7)$$

где коэффициент $\gamma=1$ для $q=0$, $\gamma=2$ для $q=1$ и $q=2$.

Аппроксимировав зависимости $\sigma_c^*(Q)$ и $\sigma_p^*(Q)$ линейными функциями

$$\sigma_c^*(Q) = a_1 + b_1 Q, \quad (8)$$

$$\sigma_p^*(Q) = a_2 + b_2 Q,$$

перепишем неравенства (6), (7) в виде

$$(1-b_1)Q(1, \tau) - (q+1) \int_0^1 \xi^q Q(\xi, \tau) d\xi \leq a_1, \quad (9)$$

$$-\left(\frac{1}{q+1} + b_2 \right) Q(0, \tau) + \int_0^1 \xi^q Q(\xi, \tau) d\xi \leq a_2 / \gamma. \quad (10)$$

На практике часто требуется, чтобы температура в наиболее нагретой точке тела не превышала некоторой величины. В рассматриваемом случае нагрева внешними тепловыми источниками такой точкой является поверхность и, значит, соответствующие ограничения можно записать в виде

$$Q(1, \tau) \leq Q^{\text{гон}}. \quad (11)$$

Задача 1. Найти управление $u^0(\tau) \in U$, $\tau \in [0, \tau^0]$, которое за минимально возможное время τ^0 переводит систему (1),(3),(4) из начального положения (2) в заданное конечное положение

$$Q(\rho, \tau^0) = \tilde{Q} = \text{const}, \quad \rho \in [0, 1], \quad \tilde{Q} \in [M_1, M_2] \quad (12)$$

так, чтобы при всех $\tau \in [0, \tau^0]$ были выполнены неравенства (9)-(11).

2. Решение основных уравнений. Применяя обобщенное интегральное преобразование М.Д. Михайлова [4], решение тепловой задачи (1)-(4) можно записать в виде

$$Q(\rho, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n x_n(\tau) K(\mu_n \rho), \quad (13)$$

где

$$D_n = \frac{2Bi^2}{\mu_n(\mu_n^2 + Bi^2 + (1-q)Bi)K_1(\mu_n)}, \quad (14)$$

$K(\xi)$ – собственные функции однородной тепловой задачи

$$K(\xi) \Big|_{q=0} = \cos(\xi); \quad K_1(\xi) \Big|_{q=0} = \sin(\xi);$$

$$K(\xi) \Big|_{q=1} = J_0(\xi); \quad K_1(\xi) \Big|_{q=1} = J_1(\xi); \quad (15)$$

$$K(\xi) \Big|_{q=2} = \frac{\sin(\xi)}{\xi}; \quad K_1(\xi) \Big|_{q=2} = \frac{\sin(\xi) - \xi \cos(\xi)}{\xi^2},$$

μ_n – собственные числа, определяемые как корни уравнения

$$BiK(\mu_n) - \mu_n K_1(\mu_n) = 0 \quad (16)$$

$\mathbf{x}(\tau) = (x_1(\tau), \dots, x_k(\tau), \dots)$ – решение бесконечномерной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_n(\tau)}{d\tau} = -\mu_n^2 x_n(\tau) + \mu_n^2 u(\tau), \quad x_n(0) = Q_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Аналогично работе [5], с.173 можно показать, что выражение (13) является решением уравнений (1)-(4) в обобщенном смысле.

С учетом соотношений (13),(16) неравенства (9)-(11) можно переписать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{in} x_n(u^*, \tau) \leq E_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Здесь

$$B_{1n} = F_n \left[(1 - b_1) - \frac{q+1}{\mu_n^2} Bi \right],$$

$$B_{2n} = F_n \left[\frac{Bi}{\mu_n^2} - \left(\frac{1}{(q+1)} + b_d \right) \lambda_q \right], \quad q = 0, 1, 2, \quad (19)$$

$$B_{3n} = F_n,$$

где

$$\lambda_0 = 1/\cos(\mu_n), \quad \lambda_1 = 1/J_0(\mu_n), \quad \lambda_2 = \mu_n/\sin(\mu_n),$$

$$F_n = \frac{2Bi}{\mu_n^2 + Bi^2 + (1-q)Bi}, \quad E_1 = a_1, \quad E_2 = a_2/\gamma, \quad E_3 = Q^{gon}. \quad (20)$$

Убедимся в справедливости равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n K(\mu_n \ell) = 1. \quad (21)$$

Действительно, равенство (21) представляет собой разложение функции $f(\ell) = 1$ в ряд Фурье на промежутке $[0,1]$ по ортогональной и полной в $L_2[0,1]$ (с весом ℓ^q) системе функций $\{K(\mu_n \ell)\}$. Ортогональность этой системы можно проверить непосредственно, причем

$$\int_0^1 \ell^q K^2(\mu_n \ell) d\ell = \frac{\mu_n^2 + Bi^2 + (1-q)Bi}{2Bi^2} K_1^2(\mu_n), \quad (22)$$

а полнота в $L_2(0,1)$ с весовой функцией ℓ^q следует из полноты системы функций $\{\sqrt{\ell^q} \cdot K(\mu_n \ell)\}$, являющихся собственными функциями соответствующих самосопряженных операторов. Домножив обе части равенства (21) на $\ell^q K(\mu_n \ell)$ и проинтегрировав на промежутке $[0,1]$, получим формулу для определения коэффициентов D_n :

$$D_n = \frac{2Bi^2}{(\mu_n^2 + Bi^2 + (1-q)Bi)K_1^2(\mu_n)} \int_0^1 \ell^q K(\mu_n \ell) d\ell = \frac{2Bi^2}{(\mu_n^2 + Bi^2 + (1-q)Bi)K_1(\mu_n)},$$

что совпадает с формулой (14). Тем самым справедливость соотношения (21) установлена.

Согласно (21) для выполнения равенства (12) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось бесконечное число равенств

$$x_k(u(*), \tau^0) = \exp(-\mu_k^2 \tau^0) \left[Q_0 + \mu_k^2 \int_0^{\tau^0} u^0(\xi) \exp(\mu_k^2 \xi) d\xi \right] = \tilde{Q}, \quad k=1,2,\dots \quad (23)$$

3. Конечномерная аппроксимация. Введем функционал

$$I(u(*), t) = \int_0^1 \ell^q [Q(\ell, t) - \tilde{Q}]^2 d\ell = \int_0^1 \ell^q \left[\sum_{n=1}^{\infty} D_n x_n(u(*), t) K(\mu_n \ell) - \tilde{Q} \right]^2 d\ell. \quad (24)$$

Рассмотрим первые N уравнений системы (17). Пусть для этой укороченной системы найдены время τ_N и управление $u_N(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_N]$, обеспечивающие выполнение равенств

$$x_i(u_N(*), \tau_N) = \tilde{Q}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (25)$$

Лемма. Для функционала (24) на управлениях $u_N(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_N]$, обеспечивающих для первых N уравнений (17) выполнение условий (25), справедлива оценка

$$|I(u^0(*), \tau^0) - I(u_N(*), \tau_N)| < \frac{2Bi^2 G^2}{3\pi^3} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^4} \right), \quad N \geq 2, \quad (26)$$

где

$$G = \max\{|Q_0 - \tilde{Q}|, |M_1 - \tilde{\theta}|, |M_2 - \tilde{\theta}|\}. \quad (27)$$

Доказательство. Преобразуем функционал $I(u_N(\cdot); \tau_N)$. С учетом ортогональности семейства функций $\{K(\mu_n \ell)\}$ с весовой функцией ℓ^q и соотношений (21), (22) можно написать

$$\begin{aligned} I(u_N(*), \tau_N) &= \\ &= \int_0^1 \ell^q \left[\sum_{n=1}^N \tilde{Q} D_n K(\mu_n \ell) + \sum_{n=N+1}^{\infty} D_n x_n(u_N(*), \tau_N) K(\mu_n \ell) - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{Q} D_n K(\mu_n \ell) \right]^2 d\ell = \\ &= \int_0^1 \ell^q \sum_{n=N+1}^{\infty} D_n^2 \left[x_n(u_N(*), \tau_N) - \tilde{Q} \right]^2 K^2(\mu_n \ell) d\ell = \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \eta_n \left[x_n(u_N(*), \tau_N) - \tilde{Q} \right]^2, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\eta_n = 2B_1^2 / [\mu_n^2 (\mu_n^2 + B_1^2 + (1-q)B_1)]. \quad (29)$$

Покажем, что для корней уравнения (16) при любом $n \geq 2$ справедливы соотношения

$$\mu_n \geq \pi(n-1), \quad n=2,3,\dots \quad (30)$$

При $q=0$ и $q=2$ такой вывод следует из [7], стр.192,223. При $q=1$ собственные числа μ_n удовлетворяют неравенству [7], стр. 240

$$\mu_n \geq z_n, \quad n=1,2,\dots,$$

где z_n — корни уравнения

$$J_1(z) = 0, \quad (31)$$

которые, в свою очередь, удовлетворяют соотношениям

$$z_n \geq \pi(n-1), \quad n=1,2,\dots \quad (32)$$

Справедливость неравенств (32) при больших значениях z_n ($z_n > z_0$) следует из асимптотического разложения функции $J_1(z)$ [8], стр.387. При $z_n \leq z_0$ установить справедливость неравенств (32) можно непосредственно, вычислив корни уравнения (31).

По условию задачи $B_1 > 0$. Следовательно, при $q=0$ и $q=1$ справедливы неравенства

$$\mu_n^2 + B_1^2 + (1-q)B_1 > \mu_n^2 \geq \pi^2(n-1)^2, \quad n=1,2,\dots \quad (33)$$

Исследуем случай $q=2$. Очевидно, что при $B_1 \geq 1$ неравенства (33) справедливы. При $0 < B_1 < 1$ минимальное значение выражения $B_1^2 - B_1$ равно 0,25. Следовательно,

$$\mu_n^2 + B_1^2 - B_1 \geq \mu_n^2 - 0,25 \geq \pi^2(n-1)^2 - 0,25 \geq 3\pi(n-1)^2, \quad n=2,3,\dots \quad (34)$$

Поскольку $x_n(u_n(*), \tau_n)$, $n=1,2,\dots$ - решение системы (17), то справедлива оценка

$$[x_n(u(*), \tau_N) - \tilde{Q}]^2 \leq G^2, \quad n=1,2,\dots, \tag{35}$$

где G - определяется согласно (27). Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

то с учетом (28),(33)-(35) для функционала $I(u(*), \tau_N)$ можно написать

$$|I_N(u_N(*), \tau_N)| < \frac{2}{3} \text{Bi}^2 \frac{G^2}{\pi^3} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^4} = \frac{2}{3} \text{Bi}^2 \frac{G^2}{\pi^3} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^4} \right), \quad N \geq 2.$$

Что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть равенства (25) выполнены с точностью ε_i , т.е.

$$x_i(u_N(*), \tau_N) = \tilde{Q} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Тогда для функционала $I_N(u_N(*), \tau_N)$ имеет место оценка

$$|I_N(u_N(*), \tau_N)| < \sum_{n=1}^N \eta_n |\varepsilon_i| + \frac{2}{3} \text{Bi}^2 \frac{G^2}{\pi^3} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^4} \right), \quad N \geq 2, \tag{36}$$

где η_n определяются согласно (29).

Из оценки (36) следует, что при приближенном решении конечномерной системы, состоящей из первых N уравнений системы (17), наиболее существенное влияние на величину функционала оказывают погрешности ε_i вычисления первых компонент вектора $\mathbf{x}(u_N(*), \tau_N)$. С увеличением номера i влияние ε_i заметно уменьшается, что следует учитывать при проведении конкретных расчетов.

Конечномерная аппроксимация предполагает замену бесконечномерных рядов в (18) суммой их первых N членов. Выпишем оценки возникающих при этом погрешностей $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Используя конкретный вид (19),(20) коэффициентов ряда (18) и оценки, полученные при выводе неравенства (26), можно написать

$$\begin{aligned} |\delta_1| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} B_{1n} x_n(u(*), \tau) \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2\text{Bi} |x_n(u(*), \tau)|}{3\pi} \left[\frac{|1-b_1|}{(n-1)^2} + \frac{\text{Bi}(q+1)}{\pi^2(n-1)^4} \right] \leq \\ &\leq \frac{2\text{Bi} |1-b_1| M_2}{3\pi} \left[\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^2} \right] + \frac{2\text{Bi}^2(q+1) M_2}{3\pi^3} \left[\frac{\pi^4}{90} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^4} \right], \quad N \geq 2,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\delta_3| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} B_{3n} x_n(u(*), \tau) \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2\text{Bi} M_2}{3\pi(n-1)^2} \leq \frac{2\text{Bi} M_2}{3\pi} \left[\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^2} \right], \quad N \geq 2, \end{aligned}$$

поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Оценка для δ_2 при $q=0$ получается аналогично

$$\begin{aligned} |\delta_2| &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2Bi^2 M_2}{\mu_n^2 (\mu_n^2 + Bi^2 + Bi)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2Bi |1+b_2| M_2}{|\cos \mu_n| (\mu_n^2 + Bi^2 + Bi)} \leq \\ &\leq \frac{2Bi^2 M_2}{\pi^4} \left[\frac{\pi^4}{90} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^4} \right] + \frac{2Bi |1+b_2| M_2}{\pi^2 G_0} \left[\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^2} \right], \end{aligned}$$

где $G_0 = |\cos(\mu_{N+1})|$, так как числа μ_n таковы, что

$$|\cos(\mu_n)| < |\cos(\mu_{n+1})| < \dots, \quad n=N+1, N+2, \dots$$

Оценки для δ_2 при $q=1$ и при $q=2$ здесь приводить не будем ввиду их громоздкости. Отметим лишь, что при $q=1$ ряды, входящие в оценку $|\delta|$ сходятся со скоростью сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$, а при $q=2$ — со скоростью сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Отметим также, что обычно в рассматриваемой задаче пользуются укороченной системой первых двух-трех уравнений в (17), считая, что на практике это обеспечивает необходимую точность расчетов [3]. Обосновывается такое предположение оценкой типа (26). Как показывают оценки для δ_1 , δ_2 и δ_3 , учет первых двух-трех членов ряда может обеспечить заданную точность выполнения фазовых ограничений только при малых значениях Bi .

Сформулируем конечномерную задачу и укажем алгоритм ее решения независимо от размерности N . Ограничившись в (17) первыми N уравнениями и первыми N членами ряда в (18) и сделав замену переменной $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \tilde{Q}$, получим

$$\frac{dz}{d\tau} = -\mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{u} + \tilde{Q}), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \quad (37)$$

$$\mathbf{Bz} \leq \mathbf{C}, \quad (38)$$

где $\mathbf{A} = \text{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_N^2)$ — диагональная ($N \times N$) матрица; $\mathbf{z}_0 = (Q_0 - \tilde{Q}, \dots, Q_0 - \tilde{Q})$; \mathbf{B} — матрица размерности $(3 \times N)$ с элементами (B_{in}) , $i=1,3$, $n=1, N$, определяемыми согласно (19);

$$\mathbf{C} = (a_1 - \tilde{Q} \sum_{n=1}^N B_{1n}, a_2 / \gamma - \tilde{Q} \sum_{n=1}^N B_{2n}, Q^{\text{gon}} - \tilde{Q} \sum_{n=1}^N B_{3n}).$$

Поставим задачу оптимального управления для системы (37), (38).

Задача 2. Найти управление $u_N^0(\tau) \in \mathbf{U}$, $\tau \in [0, \tau_N^0]$, переводящее за минимально возможное время τ_N^0 систему (37) при соблюдении ограничений (38) в положение $\mathbf{0}_{R^n}$, т.е.

$$\mathbf{z}(u_N^0(*), \tau_N^0) \equiv \mathbf{0}_{R^n}.$$

Управление u_N^0 будем принимать в качестве N -го приближения оптимального управления u^0 в задаче 1, а время τ_N^0 — в качестве N -го приближения времени оптимального быстрогодействия τ^0 .

§ 2. Решение конечномерной задачи оптимального быстрогодействия

1. **Общая схема решения конечномерной задачи.** Укажем алгоритм решения задачи 2. По своей идее он близок к методу поворота опорной гиперплоскости Итона-Нейштадта [9,10], однако в отличие от этого метода не требует строгой выпуклости достижимого множества и, как показали вычислительные эксперименты, обладает более высокой скоростью сходимости.

Введем гильбертово пространство \mathbb{P} с элементами

$$\mathbf{p} = \left\{ \mathbf{h}(t), \mathbf{y} \right\}_{t \in [0, T]}, \quad \mathbf{h} \in L_2^3[0, T], \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$$

и с нормой

$$\|\mathbf{p}\|^2 = \int_0^T (\mathbf{h}(t), \mathbf{h}(t)) dt + (\mathbf{y}, \mathbf{y}),$$

где T – некоторое конечное число, большее либо равное τ_N^0 . Если такого числа $T > 0$ не существует, то будем предполагать, что поставленная задача не имеет решения.

Сформулируем задачу 2 в \mathbb{P} как задачу оптимального управления без ограничений на фазовые переменные. С этой целью запишем ограничения (38) в эквивалентной форме

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}(u^*), t), \mathbf{v}(t), \tau = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$$

при всех $t \in [0, T]$ и при любом фиксированном $\tau \in [0, T]$, где

$$\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3),$$

$$g_i(\mathbf{z}(u^*), t), v_i(t), \tau =$$

$$= \begin{cases} \left(\max \left\{ \sum_{n=1}^N B_{in} z_n(u^*), t) - C_i(t), 0 \right\} \right)^2 + v_i(t), & t \in [0, \tau], \\ 0, & t \in [\tau, T], \end{cases}$$

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ – вспомогательный управляющий параметр – кусочно-непрерывная вектор-функция, определенная на $[0, T]$, с неотрицательными компонентами. Множество таких вектор-функций обозначим через \mathbb{V} .

Введем обозначения:

$$\omega = (u, \mathbf{v}) \in \mathbb{U} \times \mathbb{V} = \mathbb{W},$$

$$\mathbf{p}(\omega, \tau) = \left\{ \mathbf{g}(\mathbf{z}(u^*), t), \mathbf{v}(t), \tau, \mathbf{z}(u^*), \tau \right\}_{t \in [0, T]}.$$

Очевидно, что $\mathbf{p}(\omega, \tau)$ при любом фиксированном $\tau \in [0, T]$ является элементом пространства \mathbb{P} . Тогда в этом пространстве задачу 2 можно переформулировать в следующем виде: найти наименьший момент времени τ_N^0 и управление $\omega^0 \in \mathbb{W}$, такие, что

$$\mathbf{p}(\omega^0, \tau_N^0) = \mathbf{0}_{\mathbb{P}}.$$

Рассмотрим множество (область достижимости в пространстве \mathbb{P})

$$S(\tau) = \left\{ \mathbf{p}(\omega, \tau) : \omega \in \mathbb{W} \right\}.$$

Очевидно, что $\tau_N^0 > 0$ – минимальное время, при котором множество $S(\tau)$ достигает точки O_p . Это значит, что

$$O_p \notin S(\tau), \quad \forall \tau < \tau_N^0.$$

Аналогично работе [5], стр.45 можно показать, что $S(\tau)$ – выпуклое множество. Следовательно, при любом $\tau < \tau_N^0$ существует опорная гиперплоскость, отделяющая точку O_p от $S(\tau)$. На этом свойстве и базируется указанный ниже алгоритм, который позволяет строить оценки снизу времени быстрого действия

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3 \leq \dots \leq \tau_N^0.$$

По известному значению τ_k момент времени τ_{k+1} определяется так. Находится направление нормали l_k гиперплоскости, строго разделяющей точку O_p и множество $S(\tau_k)$; строится опорная к $S(\tau_k)$ гиперплоскость с нормалью l_k ; построенная опорная гиперплоскость непрерывно переносится в опорную гиперплоскость множества $S(\tau)$ при $\tau > \tau_k$ и определяется первый момент встречи ее с элементом O_p . Этот момент и принимается за τ_{k+1} .

Опишем по отдельности каждую из указанных процедур.

Нахождение нормали l_k . Скорость сходимости алгоритма существенно зависит от выбора нормали l_k . В предлагаемом алгоритме в качестве нормали l_k берется антиградиент функционала

$$\rho(p, \tau_k) = \sum_{i=1}^3 \int_0^T g_i(z(u^*), t, v_i(t), \tau_k) dt + \frac{1}{2} (z(u^*), \tau_k, z(u^*), \tau_k) \quad (39)$$

в точке $p_k \in S(\tau_k)$, где

$$\rho(p_k, \tau_k) = \inf \{ \rho(p, \tau_k) : p \in S(\tau_k) \}. \quad (40)$$

Функционал $\rho(p_k, \tau_k)$ характеризует в некотором смысле расстояние от точки O_p до множества $S(\tau_k)$. Найти точку $p_k = \{h_k(t), y_k\}_{t \in [0, T]}$ непосредственно из решения задачи (40) не удастся, поскольку множество $S(\tau_k)$ априорно неизвестно. Укажем приближенный способ нахождения точки p_k .

Пусть к шагу k известны $(m-1)$ элемент множества $S(\tau_k)$

$$p^j = \{g^j(t, \tau_k), z^j(\tau_k)\}_{t \in [0, T]}, \quad j = \overline{2, m},$$

и элемент $p_{k-1} \in S(\tau_k)$ – приближенное решение задачи (40) на шаге $(k-1)$. Точку p_k будем искать, минимизируя функционал $\rho(p, \tau_k)$ на выпуклой оболочке этих элементов. Опишем один цикл шагов алгоритма минимизации. Положим $p^1 = p_{k-1}$, $r^0 = p^1$ и построим последовательность $\{r^j\}$

$$r^j = \{h^j(t, \tau_k), y^j(\tau_k)\}_{t \in [0, T]}, \quad h^j \in L_2^3[0, T], \quad y^j \in R^N, \quad j = \overline{1, m},$$

так, чтобы

$$\rho(r^j, \tau_k) = \min_{\mu \in [0, 1]} \rho(p^j + \mu(r^{j-1} - p^j), \tau_k), \quad j = \overline{1, m}.$$

Решение этой задачи с учетом конкретного вида функционала $\rho(p, \tau_k)$ записывается в виде

$$r^j = (1 - \mu^j) p^j + \mu^j r^{j-1}, \quad j = \overline{1, m},$$

где μ^j — число из отрезка $[0,1]$, ближайшее к числу $\tilde{\mu}^j$:

$$\tilde{\mu}^j = \begin{cases} -\frac{H^{j-1} - G^j + ((\mathbf{y}^{j-1} - \mathbf{z}^j), \mathbf{z}^j)}{(\mathbf{y}^{j-1} - \mathbf{z}^j, \mathbf{y}^{j-1} - \mathbf{z}^j)}, & \text{при } \|\mathbf{y}^{j-1} - \mathbf{z}^j\| \neq 0 \\ 1, & \text{при } \|\mathbf{y}^{j-1} - \mathbf{z}^j\| = 0 \text{ и } H^{j-1} < G^j, \\ 0, & \text{при } \|\mathbf{y}^{j-1} - \mathbf{z}^j\| = 0 \text{ и } H^{j-1} \geq G^j \end{cases}$$

$$H^{j-1} = \sum_{i=1}^3 \int_0^{\tau_k} h_i^{j-1}(t) dt, \quad G^j = \sum_{i=1}^3 \int_0^{\tau_k} q_i^j(t) dt. \quad (41)$$

Цикл заканчивается построением точки \mathbf{r}^m . Взяв полученную точку в качестве \mathbf{r}^0 , цикл повторяют до тех пор, пока не выполнится неравенство

$$|\rho(\mathbf{r}^m, \tau_k) - \rho(\mathbf{r}^0, \tau_k)| < \varepsilon,$$

где ε — заданная точность выхода. Полученный элемент \mathbf{r}^m и принимается за \mathbf{p}_k — решение задачи (40). Отметим, что вид функционала $\rho(\mathbf{p}, \tau_k)$ в (39) позволяет при поиске точки \mathbf{p}_k вместо вектор-функций $\mathbf{g}^j(t, \tau_k)$, $t \in [0, T]$ запоминать лишь числа G^j , определяемые согласно соотношению (41). Последнее обстоятельство важно с точки зрения рационального использования памяти компьютера и уменьшения трудоемкости операций в алгоритме. Поэтому далее в алгоритме вместо элементов \mathbf{p}^j будут запоминаться векторы \mathbf{z}^j и числа G^j , $j=2, m$.

Построение опорной гиперплоскости с нормалью \mathbf{l}_k . Как было указано выше, в качестве направления нормали \mathbf{l}_k гиперплоскости, разделяющей элемент \mathcal{O}_p и множество $S(\tau_k)$, берется антиградиент функционала (39) в точке \mathbf{p}_k

$$\mathbf{l}_k = -\text{grad} \rho(\mathbf{p}_k, \tau_k) = \{-1_{L_2^3[0, T]}, -\mathbf{y}_k\}. \quad (42)$$

Укажем способ построения опорной к множеству $S(\tau_k)$ гиперплоскости с нормалью \mathbf{l}_k . Для этого достаточно решить задачу

$$\beta_k = \beta(\tau_k) = (\mathbf{l}_k, \mathbf{p}(\tilde{\omega}, \tau_k)) = \sup \{(\mathbf{l}_k, \mathbf{p}(\omega, \tau_k)) : \omega \in W\}. \quad (43)$$

Из конкретного вида нормали (42) следует, что $\tilde{\mathbf{v}} = \mathcal{O}_{L_2^3[0, T]}$. Тогда задачу (43) можно преобразовать к следующему виду: найти управление $\tilde{u}(\ast) \in U$, минимизирующее на решениях системы (37) функционал $J(u(\ast), \tau_k)$:

$$J(u(\ast), \tau_k) = \sum_{i=1}^3 \int_0^{\tau_k} \left(\max \left\{ \sum_{n=1}^N B_{in} z_n(u(\ast), t) - C_i, 0 \right\} \right)^2 dt + (\mathbf{y}_k, \mathbf{z}(u, \tau_k)), \quad (44)$$

т.е. решить задачу

$$J(\tilde{u}(\ast), \tau_k) = \min_{u(\ast) \in U} J(u(\ast), \tau_k). \quad (45)$$

Тогда $\beta(\tau_k) = -J(\tilde{u}(\ast), \tau_k)$.

Для решения задачи (45) используется метод условного градиента [11]. Можно показать, используя теорему 6 [11], стр.80, что последовательность $\{u_j\}$, построенная согласно методу условного градиента, слабо в $L_2[0, T]$ сходится к множеству точек минимума $U_* \subset U$ функционала $J(u_*, \tau_k)$.

Отметим, что градиент функционала (44) вычисляется по формуле

$$J'(u(t)) = -A\psi(t), \quad t \in [0, \tau_k],$$

где вектор-функция $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_N(t))^T$ — решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = A\psi(t) + 2 \sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i \max \left\{ \sum_{n=1}^N B_{in} z_n(u_*, t) - C_i, 0 \right\}, \quad (46)$$

$$\psi(\tau_k) = -\mathbf{y}_k, \quad (47)$$

$$\mathbf{b}_i = (B_{i1}, B_{i2}, \dots, B_{iN})^T.$$

Отметим также, что системы дифференциальных уравнений (37), (46) при известном j -м приближении управления решаются аналитически.

Вычисление τ_{k+1} . Для нахождения τ_{k+1} следует непрерывно перенести гиперплоскость $(\mathbf{1}_k, \mathbf{p})$ в опорную гиперплоскость множества $S(\tau)$ при $\tau > \tau_k$ и определить момент времени τ^* , при котором она пройдет через точку \mathbb{O}_p . Это значение τ^* вычисляется как первый момент времени $\tau > \tau_k$, при котором выполняется неравенство

$$\beta(\tau) \geq 0, \quad (48)$$

где

$$\beta(\tau) = \sup \{ (\mathbf{1}(\tau), \mathbf{p}(\omega, \tau)) : \omega \in \mathbf{W} \}, \quad (49)$$

$$\mathbf{1}(\tau_k) = \mathbf{1}_k.$$

В целях обеспечения непрерывного переноса гиперплоскости в множество $S(\tau)$ при $\tau > \tau_k$ положим

$$\mathbf{1}(\tau) = (-1_{L_2^3[0, T]}, \psi(\tau)), \quad (50)$$

где $\psi(\tau)$, $\tau \in [\tau_k, \tau^*]$ — решение системы (46) с начальным условием $\psi(\tau_k) = -\mathbf{y}_k$. При таком значении $\mathbf{1}$ легко находится решение задачи (49): вспомогательное управление $\hat{\mathbf{v}} = \mathbb{O}_{L_2^3[0, T]}$, а управление $\hat{u}(\tau)$ согласно принципу максимума Л.С.Понтрягина вычисляется по формуле

$$\hat{u}(\tau) = \frac{M_2 + M_1}{2} + \frac{M_2 - M_1}{2} \operatorname{sign} \left(\sum_{n=1}^N \mu_n^2 \psi_n(\tau) \right), \quad (51)$$

где $\psi_n(\tau)$ — компоненты вектор-функции $\psi(\tau)$.

2. Алгоритм. Пусть к шагу k известны:

$$\tau_k \leq \tau_N^0, \quad u_k = u_k(\tau) \in U, \quad \tau \in [0, \tau_k], \quad y_k = z(u_k(*), \tau_k), \quad G_k = G(u_k(*), \tau_k), \\ z^j = z(u^j(*), \tau_k), \quad G^j = G(u^j(*), \tau_k), \quad j = \overline{2, m},$$

где

$$G(u_k(*), \tau_k) = \sum_{i=1}^3 \int_0^{\tau_k} \left(\max \left\{ \sum_{n=1}^N B_{in} z_n(u_k(*), t) - C_i, 0 \right\} \right)^2 dt, \\ G(u^j(*), \tau_k) = \sum_{i=1}^3 \int_0^{\tau_k} \left(\max \left\{ \sum_{n=1}^N B_{in} z_n(u^j(*), t) - C_i, 0 \right\} \right)^2 dt, \quad j = \overline{2, m}. \quad (52)$$

Осуществим следующие операции:

1. Построим опорную к $S(\tau_k)$ гиперплоскость с нормалью

$$1_k = (-1, L_2^3[0, T], -y_k),$$

т.е. решим задачу (43) и найдем управление $\tilde{\omega} = (\tilde{u}, \tilde{v})$, а также элемент

$$\tilde{p} = p(\tilde{\omega}, \tau_k).$$

Если число $\beta_k = \beta(\tau_k)$, полученное в результате решения задачи (43), больше либо равно нулю, то, положив $\tau_{k+1} = \tau_k$, переходим к операции 4, иначе переходим к операции 2.

2. Уточним нижнюю оценку времени быстрогодействия τ_N^0 . Для этого, как было показано выше, необходимо интегрировать систему (46) с начальным условием $\psi(\tau_k) = -y_k$ и систему (37) с начальным условием $z(\tau_k) = z(\tilde{u}(*), \tau_k)$ по возрастанию τ при $u = \hat{u}(\tau)$, вычисляемым по формуле (51), до тех пор, пока не выполнится неравенство (48). Этот момент τ^* и принимается за τ_{k+1} . Элемент, соответствующий управлению

$$\tilde{\omega} = (\tilde{u}(\tau), 0, L_2^3[0, T]), \quad \tau \in [0, \tau_{k+1}],$$

$$\text{где } \tilde{u}(\tau) = \begin{cases} \tilde{u}(\tau), & \tau \in [0, \tau_k], \\ \hat{u}(\tau), & \tau \in (\tau_k, \tau_{k+1}], \end{cases}$$

как и в п.1, обозначим через $\tilde{p} = p(\tilde{\omega}, \tau_{k+1})$. Если конечного момента времени τ^* не существует, то задача не имеет решения.

3. Область достижимости рассматриваемой задачи может оказаться не монотонной, т.е. $S(t_1) \not\subseteq S(t_2)$ при $t_2 > t_1$, поэтому доинтегрируем систему (37) на промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ с начальными условиями $z(\tau_k) = y_k$ и $z(\tau_k) = z^j$, $j = \overline{2, m}$, с некоторым управлением $\bar{u} \in U$ и добавим к интегралам G_k и G^j , $j = \overline{2, m}$, вычисленным по формуле (52), значения этих же интегралов, но вычисленных на промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ при $u = \bar{u}(\tau)$, $\tau \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$. Тем самым мы "подтянем" соответствующие точки p_k и p^j , $j = \overline{2, m}$, в множество $S(\tau_{k+1})$.

4. Среди точек \mathbf{p}^j , $j=2, \overline{m}$, найдем наиболее удаленную от $\mathbf{0}_p$ в смысле функционала $\rho(\mathbf{p}, \tau_k)$ и заменим ее на элемент $\tilde{\mathbf{p}}$. На выпуклой оболочке полученных элементов \mathbf{p}_k и \mathbf{p}^j , $j=2, \overline{m}$ согласно изложенному выше алгоритму найдем точку минимума функционала $\rho(\mathbf{p}, \tau_{k+1})$ и обозначим ее через \mathbf{p}_{k+1} . Если

$$\rho(\mathbf{p}_{k+1}, \tau_{k+1}) < \varepsilon,$$

где ε — заданная точность выхода, то решение задачи закончено. Иначе, положив $k=k+1$, переходим к п.1 алгоритма.

Напомним, что для минимизации функционала $\rho(\mathbf{p})$ на выпуклой оболочке элементов \mathbf{p}_k и \mathbf{p}^j , $j=2, \overline{m}$, достаточно знать векторы $\mathbf{y}_k(u_k(*), \tau_{k+1})$, $\mathbf{z}^j(u^j(*), \tau_{k+1})$ и числа $G(u_k(*), \tau_{k+1})$, $G(u^j(*), \tau_{k+1})$, $j=2, \overline{m}$. Отметим также, что при построении последовательности $\{\mathbf{p}_k\}$ вспомогательное управление $\mathbf{v}^*(*)$ равно нулю, а управление $u(\cdot)$ в силу линейности систем (37) находится как линейная комбинация управлений u_k и u^j , $j=2, \overline{m}$, с соответствующими коэффициентами μ^j , вычисляемыми при минимизации $\rho(\mathbf{p}, \tau_{k+1})$ в пункте 4.

3. Сходимость алгоритма. Покажем, что построенная согласно алгоритму 1-4 последовательность $\{\mathbf{p}_k\}$ такова, что выполнено неравенство

$$\rho(\mathbf{p}(\omega_k, \tau_{k+1}), \tau_{k+1}) - \rho(\mathbf{p}(\omega_k, \tau_k), \tau_k) \leq \lambda(\tau_{k+1} - \tau_k), \quad (53)$$

где λ — некоторая константа, ω_k — k -е приближение оптимального управления.

Действительно, при построении последовательности $\{\mathbf{p}_k\}$ вспомогательное управление $\mathbf{v}_k(\tau)$ полагалось равным нулю. Значит, существование константы λ в (53) будет следовать из того факта, что вектор-функции $\mathbf{z}(u(*), \tau)$ равномерно по u ограничены и равномерно по u удовлетворяют условию Липшица по τ как решения системы линейных дифференциальных уравнений (37).

Аналогично [12, стр. 34-35] можно установить, что существует строго положительная при $\alpha > 0$ функция $\eta(\alpha)$ такая, что

$$\rho(\mathbf{p}_{k+1}, \tau_{k+1}) \leq \rho(\mathbf{p}(\omega_k, \tau_{k+1}), \tau_{k+1}) - \eta(\rho(\mathbf{p}(\omega_k, \tau_{k+1}), \tau_{k+1}) - \hat{\rho}(\tau_{k+1})), \quad (54)$$

где

$$\hat{\rho}(\tau_{k+1}) = \inf\{\rho(\mathbf{p}, \tau_{k+1}) : \mathbf{p} \in S(\tau_{k+1})\}.$$

Можно также показать, что последовательность $\{\mathbf{p}_k\}$, удовлетворяющая неравенствам (53), (54), такова, что

$$\rho(\mathbf{p}_{k+1}, \tau_{k+1}) - \hat{\rho}(\tau_{k+1}) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (55)$$

Сформулируем теорему о сходимости последовательностей, построенных согласно алгоритму 1-4.

Теорема. Построенные согласно алгоритму 1-4 последовательности таковы, что

1. Если $\tau_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, то задача 2 не имеет решения.

2. Если $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \bar{\tau}$, то $\bar{\tau} = \tau_N^0$ и

а) по любым $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ можно указать номер $k(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ такой, что при $k > k(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ выполняется

$$\|z(u_{k+1}(*), \tau_{k+1})\| \leq \varepsilon_1, \tag{56}$$

$$\sum_{n=1}^N B_{in} z_n(u_{k+1}(*), \tau) - C_i \leq \varepsilon_2, \quad i = \overline{1,3}, \quad \tau \in [0, \tau_{k+1}], \tag{57}$$

б) предел $u_N^0(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_{k+1}]$, любой слабосходящейся подпоследовательности из $\{u_k(\tau)\}$ является оптимальным управлением.

Доказательство. Будем вести доказательство по схеме доказательства теоремы 2.8 [13, стр.74]. Воспользоваться непосредственно теоремой 2.8 не удастся в силу неограниченности семейства множеств $\{S(\tau)\}$. По построению $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_N^0$. Следовательно, если $\tau_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, то $\tau_N^0 \rightarrow \infty$ и, значит, задача не имеет решения.

Пусть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \bar{\tau}.$$

Покажем, что $\bar{\tau} = \tau_N^0$. Предположим противное, т.е. $\bar{\tau} < \tau_N^0$. Тогда согласно свойству замкнутости в метрике \mathbb{P} семейства множеств $\{S(\tau)\}$ существует шар с центром в точке \mathbb{O}_p , не содержащий ни при каком k точек из множества $S(\tau_k)$. Это значит, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\rho(p, \tau_k) > \varepsilon$ при любом k и $p \in S(\tau_k)$. В силу выпуклости по p функционала ρ можно написать

$$\rho(p, \tau) - \rho(\bar{p}, \tau) \geq \frac{\partial \rho(\bar{p}, \tau)}{\partial p} \cdot (p - \bar{p})$$

при любом фиксированном τ . Положив $\bar{p} = p_{k+1}$ и $p = \mathbb{O}_p$, получим

$$\frac{\partial \rho(p_{k+1}, \tau_{k+1})}{\partial p} \cdot (-p_{k+1}) \leq -\varepsilon \tag{58}$$

Покажем, что для такой последовательности $\{p_{k+1}\}$ справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \beta(\tau_{k+1}) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sup \left\{ -\frac{\partial \rho(p_{k+1}, \tau_{k+1})}{\partial p} \cdot p : p \in S(\tau_{k+1}) \right\} < -\varepsilon < 0 \tag{59}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sup \left\{ -\frac{\partial \rho(p_{k+1}, \tau_{k+1})}{\partial p} \cdot p : p \in S(\tau_{k+1}) \right\} &= -\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \inf \left\{ \frac{\partial \rho(p_{k+1}, \tau_{k+1})}{\partial p} \cdot \right. \\ &\left. \cdot (p - p_{k+1}) : p \in S(\tau_{k+1}) \right\} + \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sup \left\{ \frac{\partial \rho(p_{k+1}, \tau_{k+1})}{\partial p} \cdot (-p_{k+1}) \right\}. \end{aligned} \tag{60}$$

Убедимся, что

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \inf \left\{ -\frac{\partial \rho(p_{k+1}, \tau_{k+1})}{\partial p} \cdot (p - p_{k+1}) : p \in S(\tau_{k+1}) \right\} = 0. \tag{61}$$

Пусть соотношение (61) не имеет места. Тогда предел (61) меньше нуля, поскольку $p_{k+1} \in S(\tau_{k+1})$, т.е. существует число $\Delta > 0$ и подпоследовательности $\{p_{i+1}\} \subset \{p_{k+1}\}$, $\hat{p}_{i+1} \in S(\tau_{k+1})$ такие, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial \rho(\mathbf{p}_{i+1}, \tau_{i+1})}{\partial \mathbf{p}} \cdot (\hat{\mathbf{p}}_{i+1} - \mathbf{p}_{i+1}) \leq -\Delta < 0. \quad (62)$$

Положим

$$\bar{\mathbf{p}}_{i+1} = \mathbf{p}_{i+1} + \mu_i (\hat{\mathbf{p}}_{i+1} - \mathbf{p}_{i+1}), \quad \mu_i(0,1).$$

Элемент $\bar{\mathbf{p}}_{i+1} \in S(\tau_{i+1})$ ввиду выпуклости множества $S(\tau_{i+1})$. С учетом конкретного вида функционала $\rho(\mathbf{p}, \tau)$ и соотношения (62) можно написать

$$\begin{aligned} \rho(\bar{\mathbf{p}}_{i+1}, \tau_{i+1}) - \rho(\mathbf{p}_{i+1}, \tau_{i+1}) &= \frac{\partial \rho(\mathbf{p}_{i+1}, \tau_{i+1})}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mu \{ \hat{\mathbf{p}}_{i+1} - \mathbf{p}_{i+1} \} + \\ &+ \frac{1}{2} \mu^2 \| \hat{\mathbf{z}}(\tau_{i+1}) - \mathbf{z}(\tau_{i+1}) \|^2 \leq -\mu_i \Delta + \frac{1}{2} \mu_i^2 d, \end{aligned}$$

где $d > \Delta > 0$ – некоторое число, обеспечивающее выполнение неравенства

$$\frac{1}{2} \| \hat{\mathbf{z}}(\tau_{i+1}) - \mathbf{z}(\tau_{i+1}) \|^2 \leq d.$$

Такое число d существует в силу равномерной ограниченности функций $\mathbf{z}(u^*, \tau)$ как множества решений системы (37). Положим

$$\mu_i = \frac{\Delta}{d}.$$

Тогда

$$\rho(\bar{\mathbf{p}}_{i+1}, \tau_{i+1}) - \rho(\mathbf{p}_{i+1}, \tau_{i+1}) \leq -\frac{\Delta^2}{d} + \frac{\Delta^2 d}{2d^2} = -\frac{\Delta^2}{2d} < 0. \quad (63)$$

Очевидно, что неравенство (63) на бесконечном множестве точек \mathbf{p}_{i+1} из последовательности $\{\mathbf{p}_{k+1}\}$ противоречит (55). Из соотношений (58), (60), (61) следует справедливость неравенства (59).

На основании (59) можно утверждать, что существует бесконечная последовательность номеров j , для которых

$$\beta_{j+1} = \beta(\tau_{j+1}) < -\varepsilon < 0.$$

Тогда, если показать, что функции $\beta(\tau) = \beta(\tau, \mathbf{l}(\tau))$, вычисляемые согласно (49), где $\mathbf{l}(\tau)$ определяется по формуле (50), равномерно непрерывны, то согласно п.2 алгоритма существует $\alpha > 0$, такое, что

$$\tau_{j+2} > \tau_{j+1} + \alpha.$$

Переходя к пределу, получим $\bar{\tau} \geq \bar{\tau} + \alpha$. Это противоречие и доказывает неправомочность предположения $\bar{\tau} < \tau_N^0$ и тот факт, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \bar{\tau} = \tau_N^0. \quad (64)$$

Для справедливости (64) осталось показать, что функции $\beta(\tau, \mathbf{l}(\tau))$ равномерно непрерывны по τ . Действительно, рассмотрим разность

$$\Delta\beta = \beta(\tau + h) - \beta(\tau).$$

Обозначим через $\{\omega_i^h\}_{i=1}^\infty$ и $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$ последовательности из W , реализующие $\beta(\tau+h)$ и $\beta(\tau)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= \lim_{i \rightarrow \infty} [l(\tau+h) \cdot p(\omega_i^h, \tau+h) - l(\tau) \cdot p(\omega_i, \tau)] = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} [(l(\tau+h) - l(\tau)) \cdot p(\omega_i^h, \tau+h) + l(\tau) \cdot (p(\omega_i^h, \tau+h) - p(\omega_i^h, \tau)) + \\ &+ l(\tau) \cdot (p(\omega_i^h, \tau) - p(\omega_i, \tau))] . \end{aligned}$$

Из вида (50) функций $l(\tau)$ можно заключить, что в управлениях $\omega_i^h = (u_i^h, v_i^h)$ и $\omega_i = (u_i, v_i)$ компоненты v_i^h и v_i равны нулю. Учитывая, что функции $z(\tau) = z(u(\cdot), \tau)$ и $\psi(\tau) = \psi(u(\cdot), \tau)$ как решения системы (37) и (46) равномерно по u ограничены и равномерно по u удовлетворяют условию Липшица по τ , а также то, что предел последнего слагаемого неположителен, для $\Delta\beta$ можно написать оценку

$$|\Delta\beta| \leq c|h|, \quad (65)$$

где $c > 0$ — некоторая константа. Из оценки (65) и следует равномерная непрерывность семейства функций $\beta(\tau, l(\tau))$.

Докажем справедливость заключений (56), (57) теоремы. Для этого достаточно показать, что

$$\|p(u_{k+1}, \tau_{k+1})\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (66)$$

В силу свойств функции $\rho(p, \tau)$ (66) эквивалентно соотношению $\rho(p_{k+1}, \tau_{k+1}) \rightarrow 0$, которое будет следовать из (55), если установить, что

$$\hat{\rho}(\tau_{k+1}) = \rho(p_{k+1}^*, \tau_{k+1}) = \inf\{\rho(p, \tau_{k+1}) : p \in S(\tau_{k+1})\} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Пусть $\hat{\rho}(\tau_{k+1})$ не стремится к нулю, т.е. существует шар с центром в точке O_p , не содержащий ни при каком k точек из множества $S(\tau_{k+1})$. Следовательно, существует подпоследовательность $\{p_j^*\}$ последовательности $\{p_{k+1}^*\}$ и число $\delta > 0$ такое, что $\rho(p_j^*, \tau_j) \geq \delta > 0$. Повторяя для этой подпоследовательности те же рассуждения, что и выше, получим противоречие $\tau_N^0 > \tau_N^0 + \alpha$, $\alpha > 0$. Этим и доказывается справедливость соотношения (66).

Заключение б) теоремы следует из предельного перехода при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ в соотношениях (56), (57) на подпоследовательности из $\{u_k\}$, имеющей слабый предел u_N^0 , и из определения числа τ_N^0 как времени быстрого действия.

§ 3. Результаты вычислительных экспериментов и их анализ

Предложенный алгоритм апробирован на ряде задач. В случае отсутствия фазовых ограничений результаты вычислительного эксперимента в сравнении с другими алгоритмами, основанными на методе поворота опорной гиперплоскости, приведены в [4,14]. В работе [14] показано, что скорость сходимости алгоритма существенно зависит от количества m точек, на выпуклой оболочке которых минимизируется функционал (39) (см. п.4 алгоритма). Например, в задаче нахождения кусочно-непрерывного управления $u = u(\tau)$, $|u| \leq 1$, переводя-

щего систему $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_3$, $\dot{x}_3 = u$ из положения (16,0,0) в положение (0,0,0) за минимальное время при $m=9$ точность 0.1 была достигнута за 10 итераций, а при $m=2$ – за 812 итераций.

В настоящем параграфе рассмотрим задачу нагрева неограниченной пластины ($q=0$) из сплава ЖСБУ толщиной $2R=0.46$ м с начальной температурой 20°C до конечной (постоянной по сечению) температуры 920°C за минимальное время с учетом и без учета ограничений на термонапряжения и температуру поверхности, которая по условию не должна была превышать 1100°C . Значения теплофизических и механических параметров (за исключением предела прочности) считались постоянными и соответственно равными [15]:

$$\begin{aligned} a &= 0.0153 \text{ м}^2/\text{час}, & \lambda &= 23 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{град}), & \alpha &= 200 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{град}), \\ \beta &= 0.18 \cdot 10^{-4} \text{ 1/град}, & E &= 0.145 \cdot 10^{12} \text{ Н}/\text{м}^2, & \nu &= 0.3. \end{aligned}$$

Зависимость предела прочности от температуры задавалась таблично [15]

Температура, $^\circ\text{C}$		20	975	1050	1100	1150
Предел прочности, МПА	Сжатие	1500	700	470	310	210 – 240
	Растяжение	980	540	370	140	

и после перехода к безразмерным величинам аппроксимировалась линейными соотношениями типа (8). Температура греющей среды менялась в диапазоне $[800^\circ\text{C}, 1600^\circ\text{C}]$.

Задача решалась для $N=3$, $N=4$, $N=5$ и $N=6$, где N – размерность конечномерной системы (37), или число учитываемых членов ряда в соотношении (13). Требуемая точность нагрева считалась достигнутой, если в конечный момент времени τ_N^0 были выполнены неравенства

$$\|z(u^*, \tau_N^0)\| / \|z_0\| \leq 0.005, \quad (67)$$

$$\sum_{i=1}^3 \int_0^{\tau_N^0} \left(\max \left\{ \sum_{n=1}^N B_{in} z(u^*, t) - C_i \right\} \right)^2 dt \leq 0.0001 \cdot \|C\|.$$

При $N=3$ задача была решена за 19 итераций. Время быстрогодействия $\tau_N^0 = 3.23$ часа. Фазовые ограничения мало влияли на длительность процесса нагрева (при их отсутствии время нагрева уменьшается на 1%). Время счета на IBM PC/AT-386 SX с сопроцессором составляло 5 мин. При $N=4$ решение задачи было найдено за 48 итераций. Время счета на том же компьютере составляло 1 час. Наиболее трудоемкая часть алгоритма – построение опорной гиперплоскости с заданной нормалью методом условного градиента ($\approx 70\%$ времени счета). Оптимальное управление имеет 43 переключения. На рисунках 1 и 2 представлены графики изменения температуры поверхности и оптимального управления во времени соответственно при наличии и отсутствии фазовых ограничений. Выключение фазовых ограничений осуществляется увеличением компонент вектора C так, чтобы на решениях системы (37) неравенство (38) было выполнено при любых $\tau \in [0, \tau_N^0]$. Время быстрогодействия при $N=4$ с учетом фазовых ограничений 3.77 часа, а без учета фазовых ограничений 3.26, т.е. уменьшается на 13.5%. Отметим, что при $N=5$ время быстрогодействия в задаче с

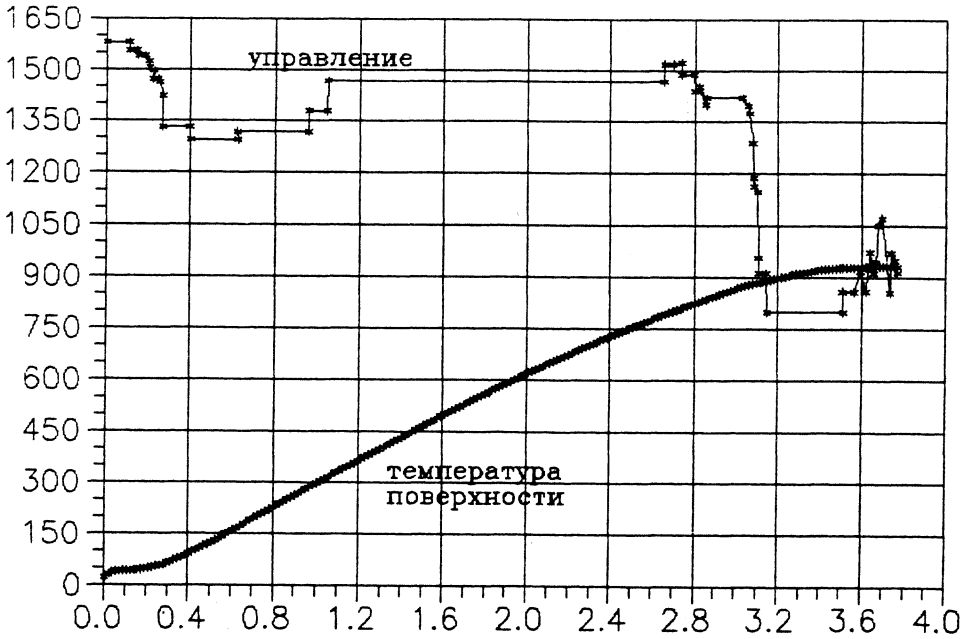


Рис.1. Зависимость температуры поверхности и оптимального управления от времени в задаче с фазовыми ограничениями ($N=4$).

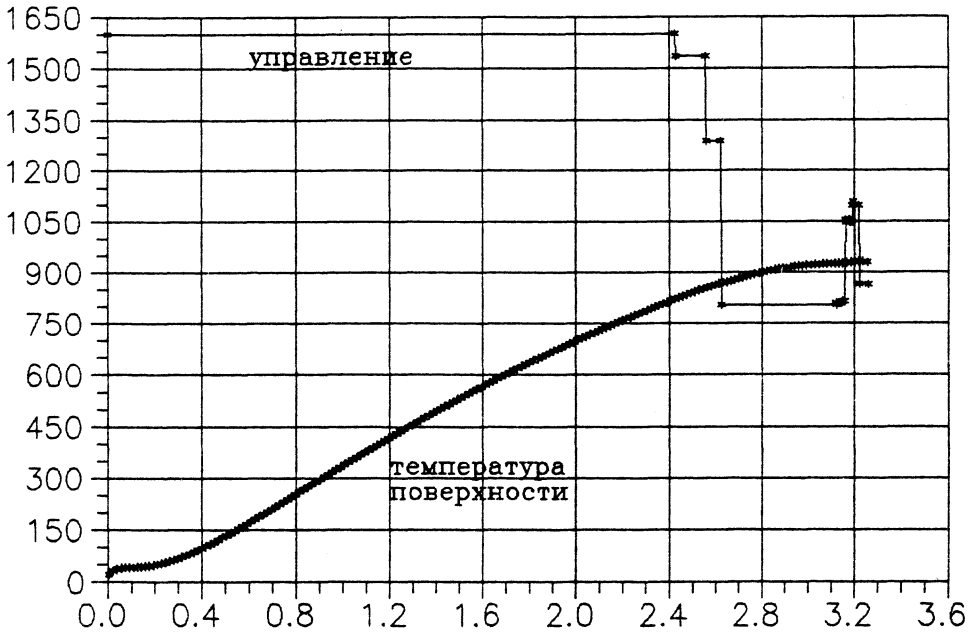


Рис.2. Зависимость температуры поверхности и оптимального управления от времени при отсутствии фазовых ограничений ($N=4$).

фазовыми ограничениями увеличивается еще на 4% по сравнению с $N=4$ и далее с ростом N существенно не изменяется. Таким образом, вычислительный эксперимент показывает, что использование только первых двух-трех членов ряда (13) недостаточно для решения поставленной задачи с фазовыми ограничениями.

Подчеркнем также, что с увеличением N уменьшается скорость сходимости алгоритма, так как растет разброс между числами μ_n , $n=1, N$, квадраты которых, взятые с обратным знаком, являются собственными значениями матрицы A . Сходимость алгоритма можно увеличить, пользуясь оценкой (36), из которой следует, что погрешности ε_i , $i=1, N$, вычисления последних компонент вектора $z(u(\cdot), \tau_N^0)$ на решение задачи влияют существенно меньше, чем погрешности вычисления первых компонент. Значит, в соответствии с (36) можно ввести весовые множители $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N > 0$, которые позволят с разной точностью вычислять компоненты вектора $z(u(\cdot), \tau_N^0)$. При этом неравенство (67) следует заменить на неравенство

$$\sqrt{\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \dots + \lambda_N z_N^2} / \|z_0\| \leq 0,005.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю.Н. Андреев, Р.П. Федоренко, Е.З. Черняховский. Опыт применения приближенных решений задач оптимального управления в инженерно-конструкторских разработках // Автоматика и телемеханика, 1980, № 8, с.16-26, № 9, с.5-12.
2. В.М. Вигах. Управление температурными напряжениями и перемещениями. - Киев: Наукова думка, 1988, 312с.
3. Н.Н. Голубь. Оптимальное управление симметричным нагревом массивных тел при различных фазовых ограничениях // Автоматика и телемеханика, 1967, т.28, № 4, с.38-57.
4. М.Д. Михайлов. Нестационарный тепло- и массоперенос в одномерных телах. - М.: ИТМО, 1969, 184с.
5. Н.Е. Кирич, Н.Д. Морозкин. Численные приближения экстремалей управляемых динамических систем. - Уфа: 1989, 89с.
6. О.А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики. - М.: Наука, 1973, 408с.
7. Ф.В. Лыков. Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1967, 600с.
8. Андре Анго. Математика для электро- и радионинженеров. - М.: Наука, 1964, 772с.
9. L.W. Neustadt. Synthesis of time-optimal Control systems // Math. Anal. and Appl., 1960, v.1, № 4, p. 484-492.
10. J.H. Eaton. An iterative solution to time optimal control // Math. Anal. and Appl., 1962, v.5, № 2, p. 329-344.
11. Ф.П. Васильев. Методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1981, 400 с.
12. Н.Д. Морозкин. Последовательные оценки экстремалей Л.С. Понтрягина. - Л.: ЛГУ, 1981, дисс. канд. физ.-мат. наук.
13. Н.Е. Кирич. Методы последовательных оценок в задачах оптимизации управляемых систем. - Л.: ЛГУ, 1975, 160с.
14. Н.Д. Морозкин. О сходимости некоторых алгоритмов решения задачи линейного быстрого действия // Математические методы анализа управляемых процессов. - Л.: ЛГУ, 1986, вып. 8, 212с.
15. Н.Д. Морозкин, С.В. Шапиро. Оптимизация индукционного нагрева сплошного цилиндра с учетом зависимости предела прочности от температуры // Электричество, 1993, № 4, с.61-64

Поступила в редакцию
20.12.94.