Возмущение линейных быстропротекающих процессов

Т. Р. ГИЧЕВ, Р. К. АНГЕЛОВА
Университет архитектуры и строительства
София, Болгария

Н. Х. РОЗОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

УДК 517.926.4

Аннотация

Исследуется влияние одного класса возмущений на поведение решений линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, коэффициенты и компоненты внешнего воздействия в которой являются неограниченными на конечном интервале изменения независимой переменной.

Abstract

T. R. Gichev, R. K. Angelova, N. Kh. Rozov, Perturbation of linear swift processes, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **1**(1995), 649–660.

We study the influence of some class of perturbations on the behavior of solutions of an ordinary linear equation system with coefficients and external influence components that are unbounded in the finite range of the indeterminate.

Рассматривается нормальная линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений, коэффициенты и компоненты внешнего воздействия в которой являются неограниченными на конечном интервале изменения независимой переменной [1], [2]. Именно такая система возникает при теоретическом описании феномена коммутации в линейных электрический цепях. Система того же типа представляет математическую модель соударения двух материальных точек. Подчеркнем, что оба эти процесса протекают в течение достаточно короткого, но конечного промежутка реального времени, а потому решения указанного вида системы уравнений естественно называть *быстропротекающими процессами*.

В настоящей работе исследуется влияние одного класса возмущений на поведение быстропротекающих процессов.

1. Пусть в полуинтервале $t_0 \leqslant t < T < \infty$ быстропротекающий процесс описывается линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + [B_1(t) + Q(t)B_2(t)]\, y + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \dot{y} &= [a_1(t) + Q(t)a_2(t)]\, x - Q(t)b(t)y + [g_1(t) + Q(t)g_2(t)]\,, \quad y \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

Фундаментальная и прикладная математика 1995, **1**, № 3, 649–660.
© 1995 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом "Открытые системы"

где $Q(t)$, $b(t)$, $g_i(t)$, $i = 1, 2$ — скалярные функции, $A(t)$ — $n \times n$-матрица-функция, $B_i(t)$, $i = 1, 2$, $f(t)$ — n-векторы-столбцы, $a_i(t)$, $i = 1, 2$ — n-векторы-строки. Предполагается, что функция $Q(t)$ непрерывна на интервале (t_0, T), а все остальные функции, входящие в систему (1), непрерывны на отрезке $[t_0, T]$. Кроме того, будем считать, что

$$\begin{aligned} &Q(t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad t \in (t_0, T)\,; \\ &b(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0, T]\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Ниже изучаются только следующие два основных случая: либо

$$\text{а) } a_2(t) = 0 \text{ и } g_2(t) = 0 \quad \text{при всех } t \in [t_0, T]\,, \tag{3}$$

либо

$$\text{б) } B_2(t) = 0 \text{ при всех } t \in [t_0, T]\,; \tag{4}$$

остальные возможности оставляются здесь без рассмотрения.

Обозначим через $X(t, \tau)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, нормированную при $t = \tau$ фундаментальную матрицу линейной системы $\dot{x} = A(t)x$, $x \in \mathbb{R}^n$. Далее, исходя из линейного уравнения $\dot{y} = -Q(t)b(t)y$, $y \in \mathbb{R}$, на треугольнике $t_0 < \tau \leqslant t < T$ введем скалярную функцию

$$Y(t, \tau) = \exp\left[-\int\limits_{\tau}^{t} Q(\xi)b(\xi)\, d\xi\right],$$

которую доопределим для $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$ соотношениями

$$\begin{aligned} &Y(t, t_0) = \lim_{\sigma \to t_0 + 0} Y(t, \sigma) \quad \text{при} \quad t_0 = \tau \leqslant t < T, \\ &Y(T, \tau) = \lim_{s \to T - 0} Y(s, \tau) \quad \text{при} \quad t_0 < \tau \leqslant t = T, \\ &Y(T, t_0) = \lim_{\substack{s \to T - 0 \\ \sigma \to t_0 + 0}} Y(s, \sigma), \quad Y(t_0, t_0) = Y(T, T) = 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда ясно, что решение $(x(t), y(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ системы (1) с начальными условиями

$$x(t_0) = v, \quad y(t_0) = w \tag{6}$$

удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$x(t) = X(t, t_0)v + \int\limits_{t_0}^{t} X(t, \tau)\left\{\left[B_1(\tau) + Q(\tau)B_2(\tau)\right] y(\tau) + f(\tau)\right\}\, d\tau, \tag{7}$$

$$y(t) = Y(t, t_0)w + \int\limits_{t_0}^{t} Y(t, \tau)\left\{\left[a_1(\tau) + Q(\tau)a_2(\tau)\right] x(\tau) + \left[g_1(\tau) + Q(\tau)g_2(\tau)\right]\right\}\, d\tau. \tag{8}$$

В случае а) (см. (3)) после подстановки функции $y(\tau)$, найденной из (8), в уравнение (7) и некоторых преобразований приходим (с учетом (2)) к интегральному уравнению для функции $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t,t_0)v + \int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau)f(\tau)\,d\tau + \\ &+ \left[\int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau)B_1(\tau)Y(\tau,t_0)\,d\tau - \int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau)\frac{B_2(\tau)}{b(\tau)}\,dY(\tau,t_0)\right]w + \\ &+ \int\limits_{t_0}^{t}\left[\int\limits_{\xi}^{t} X(t,\tau)B_1(\tau)Y(\tau,\xi)\,d\tau - \int\limits_{\xi}^{t} X(t,\tau)\frac{B_2(\tau)}{b(\tau)}\,dY(\tau,\xi)\right]\times \\ &\times\left[a_1(\xi)x(\xi)+g_1(\xi)\right]d\xi. \end{aligned} \tag{9}$$

В случае б) (см. (4)) после подстановки функции $x(\tau)$, найденной из (7), в уравнение (8) и некоторых преобразований приходим к интегральному уравнению для функции $y(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= Y(t,t_0)w + \\ &+ \int\limits_{t_0}^{t} Y(t,\tau)\left\{a_1(\tau)\left[X(\tau,t_0)v + \int\limits_{t_0}^{\tau} X(\tau,\xi)f(\xi)\,d\xi\right] + g_1(\tau)\right\}d\tau + \\ &+ \int\limits_{t_0}^{t}\left\{\frac{a_2(\tau)}{b(\tau)}\left[X(\tau,t_0)v + \int\limits_{t_0}^{\tau} X(\tau,\xi)f(\xi)\,d\xi\right] + \frac{g_2(\tau)}{b(\tau)}\right\}dY(t,\tau) + \\ &+ \int\limits_{t_0}^{t} Y(t,\tau)a_1(\tau)\left[\int\limits_{t_0}^{\tau} X(\tau,\xi)B_1(\xi)y(\xi)\,d\xi\right]d\tau + \\ &+ \int\limits_{t_0}^{t}\frac{a_2(\tau)}{b(\tau)}\left[\int\limits_{t_0}^{\tau} X(\tau,\xi)B_1(\xi)y(\xi)\,d\xi\right]dY(t,\tau). \end{aligned} \tag{10}$$

Отметим, что к системе вида (7), (8) с дополнительным условием (4) сводится линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + Q(t)b(t)y^{(n-1)} + b_2(t)y^{(n-2)} + \dots + b_n(t)y = b_{n+1}(t), \tag{11}$$

где

$$b_p(t) = b_{p1}(t) + Q(t)b_{p2}(t), \quad p = 2,\dots,n,n+1,$$

и выполнены предположения (2). Решение уравнения (11) определялось в [3] с помощью аппроксимирующих последовательностей.

2. Возьмем скалярную функцию $\Phi(t)$, $t_0 < t < T$, и с ее помощью введем функцию

$$Y(t,\tau) = \exp\left[\Phi(t) - \Phi(\tau)\right], \quad t_0 < \tau \leqslant t < T; \tag{12}$$

будем предполагать, что эта последняя функция допускает доопределения (5). Если при каждом $\tau \in [t_0, T]$ полное изменение функции $Y(\cdot,\tau)$ ограничено на отрезке $[\tau, T]$, то мы можем рассматривать систему интегральных уравнений (9), (8). Если же при каждом $t \in [t_0, T]$ полное изменение функции $Y(t,\cdot)$ ограничено на отрезке $[t_0, t]$, то мы можем рассматривать систему интегральных уравнений (7), (10). В обоих случаях используются интегралы в смысле Римана – Стилтьеса.

Определенную равенством (12) (при доопределениях (5)) функцию $Y(t,\tau)$ и решение $(x(t), y(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, системы интегральных уравнений (9), (8) или (7), (10) с этой функцией $Y(t,\tau)$ при начальных условиях (6) будем называть *порожденными функцией* $\Phi(t)$.

3. Напомним вкратце необходимые для дальнейшего сведения из теории расстояния Хаусдорфа [4] и близких вопросов теории функций.

Пусть $\varphi(t)$, $t \in (a,b)$ — скалярная функция. *Дополненным графиком* $\overline{\varphi}$ функции $\varphi(t)$ называется множество

$$\overline{\varphi} = \left\{(t,y) \mid t \in (a,b),\ y \in [I_\varphi(t), S_\varphi(t)]\right\},$$

где

$$I_\varphi(t) = \lim_{\lambda\to 0} \inf_{|t-\tau|\leqslant\lambda} \varphi(\tau), \qquad S_\varphi(t) = \lim_{\lambda\to 0} \sup_{|t-\tau|\leqslant\lambda} \varphi(\tau).$$

Пусть $\left\{\varphi_k(t)\right\}_1^\infty$, $t_0 < t < T$ — последовательность скалярных функций, а функция $\varphi_0(t)$ определена по крайней мере в фиксированной точке $\theta \in (t_0, T)$. Говорят, что эта последовательность *h-сходится к $\varphi_0(t)$ в точке θ*, если

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{(t,y)\in\overline{\varphi}_k} \max\left(|\theta - t|, |\varphi_0(\theta) - y|\right) = 0.$$

Пусть $\varphi(t)$, $t \in [a,b]$ — функция с ограниченным изменением; ее полное изменение обозначим через $V_a^b[\varphi]$. Последовательность $\left\{\varphi_k(t)\right\}_1^\infty$ функций с ограниченным изменением *$*$-слабо сходится к функции $\varphi_0(t)$ на отрезке* $[a,b]$, если при любой непрерывной функции $f(t)$ имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(t)\, d\varphi_k(t) = \int_a^b f(t)\, d\varphi_0(t).$$

Для функции $\varphi(t)$, $t \in [a,b]$ с ограниченным изменением через $\varphi^*(t)$ обозначим функцию

$$\varphi^*(t) = \begin{cases} \varphi(t+0) & \text{при } t \in (a,b); \\ \varphi(t) & \text{при } t = a \text{ и } t = b. \end{cases}$$

Справедливы следующие факты ([5]–[7]).

Теорема А. *Для того чтобы последовательность* $\{\varphi_k(t)\}_1^\infty$, $t \in [a,b]$, *функций с ограниченным изменением, удовлетворяющих условию* $\varphi_k(a) = c$, $k = 1, 2, \ldots$, $*$*-слабо сходилась на отрезке* $[a,b]$ *к функции* $\varphi_0(t)$, $t \in [a,b]$, *с ограниченным изменением, удовлетворяющей условию* $\varphi_0(a) = c$, *необходимо и достаточно, чтобы:*

1) существовала такая константа $M > 0$, *что*

$$V_a^b[\varphi_k^*] \leqslant M \quad \text{для всех} \quad k = 1, 2, \ldots;$$

2) $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(b) = \varphi_0(b)$;

3) последовательность $\{\varphi_k^*(t)\}_1^\infty$ h*-сходилась к функции* $\varphi_0(t)$ *в каждой точке непрерывности этой функции.*

Теорема Б. *Пусть* $\varphi_0(t)$, $t \in [a,b]$ *— функция с ограниченным изменением, а* $\{\varphi_k(t)\}_1^\infty$, $t \in [a,b]$ *— такая последовательность функций с ограниченным изменением, что полные изменения* $V_a^b[\varphi_k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *равномерно ограничены и* $\varphi_k(a) = \varphi_0(a)$, $k = 1, 2, \ldots$. *Тогда из соотношения*

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(b) = \varphi_0(b)$$

и из h*-сходимости этой последовательности к* $\varphi_0(t)$ *в каждой точке непрерывности функции* $\varphi_0(t)$ *следует, что*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b |\varphi_k(t) - \varphi_0(t)|\, dt = 0.$$

4. Пусть скалярные функции $\Phi_k(t)$, $t_0 < t < T$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, порождают (см. (12)) функции $Y_k(t,\tau)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$. Везде в дальнейшем будем считать выполненными следующие условия.

Условие 1. Для почти всех $t \in (t_0, T)$ имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} \Phi_k(t) = \Phi_0(t),$$

а в любой точке $\theta \in (t_0, T)$, в которой функция $\Phi_0(t)$ непрерывна, последовательность $\{\Phi_k(t)\}_1^\infty$ h-сходится к $\Phi_0(t)$. Кроме того, выполняются соотношения:

$$\lim_{k\to\infty} Y_k(t, t_0) = Y_0(t, t_0), \qquad t \in (t_0, T];$$

$$\lim_{k\to\infty} Y_k(T, \tau) = Y_0(T, \tau), \quad \tau \in [t_0, T).$$

Условие 2. Для каждой точки $\theta \in (t_0, T)$, в которой функция $\Phi_0(t)$ непрерывна, существует окрестность, где функция $\Phi_0(t)$ имеет ограниченное полное изменение и справедливо соотношение

$$\lim_{\delta\to 0} V_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}[\Phi_0] = 0.$$

Условие 3_1. Существует такая константа $M_1 > 0$, что для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ и $\tau \in [t_0, T]$ имеет место неравенство

$$V_\tau^T \left[Y_k(\cdot, \tau)\right] \leqslant M_1.$$

Условие 3_2. Существует такая константа $M_2 > 0$, что для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ и $t \in [t_0, T]$ имеет место неравенство

$$V_{t_0}^t \left[Y_k(t, \cdot)\right] \leqslant M_2.$$

Далее через $\|\cdot\|$ обозначается фиксированная норма в конечномерном пространстве.

5. Сформулируем и наметим доказательства нескольких вспомогательных утверждений, которые будут необходимы для обоснования основных результатов.

Лемма 1. *Пусть имеется последовательность $\{\Phi_k(t)\}_1^\infty$, $t_0 < t < T$. Пусть либо выполняется условие 3_1, а $(x_k(t), y_k(t))$ — порожденное функцией $\Phi_k(t)$ решение системы* (9), (8) *с начальными условиями* (6), *либо выполняется условие 3_2, а $(x_k(t), y_k(t))$ — порожденное функцией $\Phi_k(t)$ решение системы* (7), (10) *с начальными условиями* (6). *Тогда существует такая константа $M_0 > 0$, что*

$$\sup_{k=1,2,\ldots} \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant T} \left(\|x_k(t)\| + |y_k(t)|\right) \leqslant M_0.$$

Доказательство. В случае, когда выполняется условие 3_1, последовательно оцениваются сверху $\|x_k(t)\|$ и $|y_k(t)|$ с помощью (9) и (8). В случае выполнения условия 3_2 сначала оценивается $|y_k(t)|$, а потом $\|x_k(t)\|$.

Лемма 2_1. *Пусть функции $\Phi_k(t)$, $t_0 < t < T$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условию* 1, *а интегрируемая функция $f(t)$ и непрерывная функция $F(t)$ определены на отрезке $[t_0, T]$. Пусть, далее, функция $\Phi_0(t)$ непрерывна в точке $\theta \in (t_0, T)$, а для точек $(\tau_k, g_k) \in \overline{\Phi}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, выполняется равенство*

$$\lim_{k \to \infty} \max\left(|\tau_k - \theta|, |g_k - \Phi_0(\theta)|\right) = 0.$$

Пусть, наконец, $Y_k(t, \tau)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$ — функции, порожденные функциями $\Phi_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и удовлетворяющие условию 3_1, а

$$Y_k^g(t, \tau) = \begin{cases} Y_k(t, \tau) & \text{для} \quad t \in [\tau, \tau_k), \\ g_k & \text{для} \quad t = \tau_k, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Тогда имеют место соотношения:

$$\lim_{k \to \infty} \int_{t_0}^{\tau_k} f(\tau) \int_\tau^{\tau_k} F(t) \left[Y_k^g(t, \tau) - Y_0(t, \tau)\right] dt\, d\tau = 0; \tag{13}$$

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{t_0}^{\tau_k} f(\tau)\left[\int\limits_{\tau}^{\tau_k} F(t)\,dY_k^g(t,\tau)-\int\limits_{\tau}^{\tau_k} F(t)\,dY_0(t,\tau)\right]d\tau=0; \tag{14}$$

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{t_0}^{\tau_k}\left|\int\limits_{t_0}^{s} f(\tau)\left[\int\limits_{\tau}^{s} F(t)\,dY_k^g(t,\tau)-\int\limits_{\tau}^{s} F(t)\,dY_0(t,\tau)\right]d\tau\right|ds=0. \tag{15}$$

Доказательство. В соотношениях (13) и (14) сходимость при $k\to\infty$ к нулю для почти всех τ последовательностей функций, находящихся под знаком интегрирования по τ, следует соответственно из теорем А и Б. Далее, сами равенства (13) и (14) вытекают из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Аналогичным образом доказывается и соотношение (15).

Сформулируем и естественный вариант этой леммы.

Лемма 2_2. *Пусть выполнены все предположения леммы 2_1, за исключением того, что условие 3_1 заменено на условие 3_2. Тогда имеют место соотношения:*

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{t_0}^{\tau_k} f(s)\int\limits_{s}^{\tau_k} F(\tau)\left[Y_k^g(\tau_k,\tau)-Y_0(\tau_k,\tau)\right]d\tau\,ds=0;$$

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{t_0}^{\tau_k} f(s)\left[\int\limits_{s}^{\tau_k} F(\tau)\,dY_k^g(\tau_k,\tau)-\int\limits_{s}^{\tau_k} F(\tau)\,dY_0(\tau_k,\tau)\right]ds=0;$$

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{t_0}^{\tau_k}\left|f(t)\left[\int\limits_{t_0}^{t} F(\tau)\,dY_k^g(t,\tau)-\int\limits_{t_0}^{t} F(\tau)\,dY_0(t,\tau)\right]\right|dt=0.$$

Лемма 3. *Пусть функция $\Phi_0(t)$, $t_0<t<T$, удовлетворяет условию 2 и непрерывна в точке $\theta\in(t_0,T)$, а $Y_0(t,\tau)$, $t_0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T$ — порожденная ею функция. Тогда для любой непрерывной функции $F(t)$, $t_0<t<T$, имеют место соотношения:*

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} F(t)\,dY_0(t,\tau)=0 \quad \text{при } \tau\in[t_0,\theta)\,;\\ &\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} F(\tau)\,dY_0(t,\tau)=0 \quad \text{при } t\in(\theta,T]\,.\end{aligned} \tag{16}$$

Доказательство. Например, первое из соотношений (16) немедленно вытекает из оценки

$$\left|\int\limits_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} F(t)\,dY_0(t,\tau)\right|\leqslant \max_{t\in[\theta-\delta,\theta+\delta]}|F(t)|\cdot V_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}\left[Y_0(\cdot,\tau)\right],$$

являющейся следствием свойств интеграла Стилтьеса.

Лемма 4. *Пусть функция* $\Phi_0(t)$, $t_0 < t < T$, *удовлетворяет условию* 2 *и либо условию* 3_1 — *и в таком случае* $(x_0(t), y_0(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ — *порожденное этой функцией решение системы* (9) (8) — *либо условию* 3_2 — *и в таком случае* $(x_0(t), y_0(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ — *порожденное этой функцией решение системы* (7), (10) (*в обоих случаях — при начальных условиях* (6)). *Тогда решение* $x_0(t), y_0(t)$ *непрерывно в любой точке* $\theta \in (t_0, T)$ *непрерывности функции* $\Phi_0(t)$.

Доказательство. Пусть $\{\tau_k\}_1^\infty$ — такая последовательность точек, что $\tau_k \in (t_0, T)$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\tau_k \to \theta$ при $k \to \infty$. Для определенности будем считать, что $\tau_k < \theta$ при всех $k = 1, 2, \ldots$; рассмотрим лишь случай, когда $(x_0(t), y_0(t))$ — решение системы (9), (8) (с учетом (6)).

В силу непрерывности функций, находящихся в правой части системы (1), и согласно лемме 3 заключаем из равенства (9), что

$$\lim_{k\to\infty} [x_0(\tau_k) - x_0(\theta)] = 0,$$

так что первая компонента решения $(x_0(t), y_0(t))$ непрерывна в точке θ.

Далее, из равенства (8) следует, что

$$\begin{aligned} y_0(\tau_k) - y_0(\theta) = {} & [Y_0(\tau_k, t_0) - Y_0(\theta, t_0)]\, w + \\ & + \int_{t_0}^{\tau_k} [Y_0(\tau_k - \tau) - Y_0(\theta, \tau)]\, [a_1(\tau) x_0(\tau) + g_1(\tau)]\, d\tau - \\ & - \int_{\tau_k}^{\theta} Y_0(\theta, \tau)\, [a_1(\tau) x_0(\tau) + g_1(\tau)]\, d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку функция $\Phi_0(t)$ непрерывна в точке θ, а функции $Y_0(t, \tau)$, $x_0(t)$ ограничены, то

$$\lim_{k\to\infty} [y_0(\tau_k) - y_0(\theta)] = 0,$$

так что и вторая компонента решения $(x_0(t), y_0(t))$ непрерывна в точке θ.

6. Рассмотрим функцию $\Phi(t)$, $t_0 < t < T$, и порожденное ею решение $(x(t), y(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ системы (9), (8) при начальных условиях (6).

Обозначим через $\Phi^g(t)$, $t_0 < t < T$, такую функцию, что при каждом $t \in (t_0, T)$ точка $(t, \Phi^g(t))$ ее графика принадлежит дополненному графику $\overline{\Phi}$ функции $\Phi(t)$. Пусть, далее, $(x^g(t), y^g(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ — порожденное функцией $\Phi^g(t)$ решение системы (9), (8) при начальных условиях (6). Ясно, что фиксированной функции $\Phi(t)$ будут отвечать в общем случае бесконечные множества функций $\Phi^g(t)$ и порождаемых ими решений $(x^g(t), y^g(t))$.

Введем множество точек $(t, x^g(t), y^g(t))$, где $t \in [t_0, T]$, а $(x^g(t), y^g(t))$ пробегает всевозможные решения системы (9), (8) (с учетом (6)), каждое из которых порождается некоторой функцией $\Phi^g(t)$, определенной по указанному только что правилу с помощью дополненного графика $\overline{\Phi}$ функции $\Phi(t)$. Такое множество естественно назвать *дополненным графиком* решения $(x(t), y(t))$ и обозначать через $(\overline{x}, \overline{y})$.

Пусть функции $\Phi_k(t)$, $t_0 < t < T$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, порождают решения $(x_k(t), y_k(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, системы (9), (8) при начальных условиях (6). Будем говорить, что последовательность $\left\{x_k(t), y_k(t)\right\}_1^\infty$ *h-сходится к решению* $(x_0(t), y_0(t))$ *в точке* $\theta \in (t_0, T)$, если

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{(\tau,\xi,\eta)\in(\overline{x},\overline{y})} \max\left(|\tau - \theta|, \|\xi - x_0(\theta)\|, |\eta - y_0(\theta)|\right) = 0.$$

Не составляет труда сформулировать аналогичные определения дополненного графика решения и h-сходимости последовательности решений в случае, когда речь идет о системе (7), (10).

7. Сформулируем и докажем основные результаты, которые определяют класс рассматриваемых возмущений систем (9), (8) или (7), (10) и описывают влияние такого типа возмущений на решения этих систем.

Теорема. *Пусть функции $\Phi_k(t)$, $t_0 < t < T$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условиям* 1, 2, 3_1 (*или* 1, 2, 3_2). *Пусть, далее, $(x_k(t), y_k(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$ — порожденные функциями $\Phi_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, решения системы* (9), (8) (*или системы* (7), (10)) *при начальных условиях* (6). *Тогда выполнено соотношение*

$$\lim_{k\to\infty} \left[\|x_k(T) - x_0(T)\| + |y_k(T) - y_0(T)|\right] = 0 \tag{17}$$

и последовательность решений $\left\{(x_k(t), y_k(t))\right\}_1^\infty$ h-сходится к решению $(x_0(t), y_0(t))$ во всех тех точках $\theta \in (t_0, T)$, в которых функция $\Phi_0(t)$ непрерывна.

Доказательство. Проведем необходимые рассуждения только в случае системы (9), (8), ибо случай системы (7), (10) рассматривается аналогично.

Пусть функция $\Phi_0(t)$ непрерывна в точке $\theta \in (t_0, T)$. Так как последовательность $\{\Phi_k(t)\}_1^\infty$ h-сходится к функции $\Phi_0(t)$ в точке θ, то найдется такая последовательность $\left\{(\tau_k, g_k)\right\}_1^\infty$ точек $(\tau_k, g_k) \in \overline{\Phi}_0$, что

$$\lim_{r\to\infty} \max\left(|\tau_k - \theta|, |g_k - \Phi_0(\theta)|\right) = 0.$$

Введем функции $(k = 1, 2, \ldots)$

$$\Phi_k^g(t) = \begin{cases} \Phi_k(t) & \text{при} \quad t \in (t_0, \tau_k) \cup (\tau_k, T), \\ g_k & \text{при} \quad t = \tau_k; \end{cases}$$

через $Y_k^g(t,\tau)$ и $(x_k^g(t), y_k^g(t))$ обозначим соответственно функцию и решение (системы (9), (8)), порожденные функцией $\Phi_k^g(t)$; $k = 1, 2, \ldots$. Ясно, что точка $(\tau_k, x_k^g(\tau_k), y_k^g(\tau_k))$ принадлежит дополненному графику $(\overline{x}_k, \overline{y}_k)$ решения $(x_k(t), y_k(t))$.

При $t \in [t_0, T]$ из равенства (9) нетрудно заключить, что при любом $k = 1, 2, \ldots$

$$\|x_k^g(t) - x_0(t)\| \leqslant \|\alpha_k(t) - \alpha_0(t)\| + \beta_k \int\limits_{t_0}^{t} \|x_k^g(\xi) - x_0(\xi)\| \, d\xi, \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_k(t) = &\int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau) B_1(\tau) Y_k^g(\tau, t_0) w \, d\tau + \\
&+ \int\limits_{t_0}^{t} \Bigg[\int\limits_{\xi}^{t} X(t,\tau) B_1(\tau) Y_k^g(\tau,\xi) \, d\tau \Bigg] [a_1(\xi) x_0(\xi) + g_1(\xi)] \, d\xi - \\
&- \int\limits_{t_0}^{t} \Bigg[\int\limits_{\xi}^{t} X(t,\tau) \frac{B_2(\tau)}{b(\tau)} \, dY_k^g(\tau,\xi) \Bigg] [a_1(\xi) x_0(\xi) + g_1(\xi)] \, d\xi;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0(t) = &\int\limits_{t_0}^{t} X(t,\tau) B_1(\tau) Y_0(\tau, t_0) w \, d\tau + \\
&+ \int\limits_{t_0}^{t} \Bigg[\int\limits_{\xi}^{t} X(t,\tau) B_1(\tau) Y_0(\tau,\xi) \, d\tau \Bigg] [a_1(\xi) x_0(\xi) + g_1(\xi)] \, d\xi - \\
&- \int\limits_{t_0}^{t} \Bigg[\int\limits_{\xi}^{t} X(t,\tau) \frac{B_2(\tau)}{b(\tau)} \, dY_0(\tau,\xi) \Bigg] [a_1(\xi) x_0(\xi) + g_1(\xi)] \, d\xi;
\end{aligned}$$

$$\beta_k = \max_{\substack{t_0 \leqslant \tau \leqslant t \\ t_0 \leqslant t \leqslant T}} \Bigg\| \int\limits_{\tau}^{t} X(t,\xi) B_1(\xi) Y_k^g(\xi,\tau) \, d\xi - \int\limits_{\tau}^{t} X(t,\xi) \frac{B_2(\xi)}{b(\xi)} \, dY_k^g(\xi,\tau) \Bigg\|.$$

Применяя к (18) лемму об интегральном неравенстве, немедленно получаем оценку

$$\|x_k^g(t) - x_0(t)\| \leqslant \|\alpha_k(t) - \alpha_0(t)\| + \beta_k \int\limits_{t_0}^{t} \|\alpha_k(\xi) - \alpha_0(\xi)\| e^{\beta_k (t-\xi)} \, d\xi, \tag{19}$$

откуда, согласно лемме 2_1, следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k^g(\tau_k) - x_0(\tau_k)\| = 0. \tag{20}$$

Поскольку по неравенству треугольника

$$\|x_k^g(\tau_k) - x_0(\theta)\| \leqslant \|x_k^g(\tau_k) - x_0(\tau_k)\| + \|x_0(\tau_k) - x_0(\theta)\|,$$

то на основании (20) и леммы 4 можем утверждать, что

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k^g(\tau_k) - x_0(\theta)\| = 0. \tag{21}$$

Обратимся, далее, к равенству (8). Проведя несложные преобразования, установим, что при любом $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} |y_k^g(\tau_k) - y_0(\tau_k)| &\leqslant |(Y_k^g(\tau_k, t_0) - Y_0(\tau_k, t_0))\, w| + \\ &+ \left| \int_{t_0}^{\tau_k} [Y_k^g(\tau_k, \tau) - Y_0(\tau_k, \tau)]\, [a_1(\tau)x_0(\tau) + g_1(\tau)]\, d\tau \right| + \\ &+ \left| \int_{t_0}^{\tau_k} Y_k^g(\tau_k, \tau) a_1(\tau)\, [x_k^g(\tau) - x_0(\tau)]\, d\tau \right|. \end{aligned}$$

Если теперь привлечь оценку (19) и лемму 2_1, то убедимся в справедливости соотношения

$$\lim_{k\to\infty} [y_k^g(\tau_k) - y_0(\tau_k)] = 0. \tag{22}$$

Снова воспользуемся неравенством треугольника

$$|y_k^g(\tau_k) - y_0(\theta)| \leqslant |y_k^g(\tau_k) - y_0(\tau_k)| + |y_0(\tau_k) - y_0(\theta)|,$$

откуда, с помощью равенства (22) и леммы 4, заключаем, что

$$\lim_{k\to\infty} |y_k^g(\tau_k) - y_0(\theta)| = 0. \tag{23}$$

Совокупность предельных соотношений (21) и (23) как раз и означает, что последовательность $\{(x_k(t), y_k(t))\}_1^\infty$ решений системы (9), (8) (с учетом (6)) h-сходится к решению $(x_0(t), y_0(t))$ в точке $\theta \in (t_0, T)$ непрерывности функции $\Phi_0(t)$. Аналогичным образом доказывается и утверждение (17).

Литература

[1] Т. Р. Гичев. Один класс линейных дифференциальных уравнений с неограниченными коэффициентами. 1. Свойства и решения // Сердика — Бълг. мат. списание. — 1992. — Т. 18. — № 1–2. — С. 79–89.

[2] Т. Р. Гичев, Р. К. Ангелова. Один класс линейных дифференциальных уравнений с неограниченными коэффициентами. 2. Некоторые приложения // Сердика — Бълг. мат. списание. — 1992. — Т. 18. — № 1–2. — С. 90–98.

[3] С. Т. Завалищин, А. Н. Сесекин. Импульсные процессы. Модели и приложения. — М.: Наука, 1991.

[4] Б. Сендов. Хаусдорфовые приближения. — София: Изд-во БАН, 1979.

[5] В. И. Гливенко. Интеграл Стилтьеса. — М.–Л.: ОНТИ, 1936.

[6] Т. Р. Гичев. Один критерий сходимости интеграла Стилтьеса // Вестник МГУ. Матем., механ. — 1975. — № 1. — С. 18–22.

[7] Т. Р. Гичев, Н. Х. Розов. Нелинейная управляемая импульсная система. I. Влияние некоторых возмущений // Дифференц. уравнения. — 1979. — Т. 15. — № 11. — С. 1933–1939.

Статья поступила в редакцию в июне 1995 г.