Ph. A. Ustinov, A problem of the fastest detection of regime changing for Levy processes, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2009, Number 2, 69–71 где $C_{n,s}$ — некоторые нормировочные постоянные. Они выбраны так, что число

$$C_{n,s}\Omega_{n+1}(a_0 Q_{n,s}(q) + \sum_{j=1}^{3} a_j P_{n,j,s}(q)) \tag{11}$$

целое рациональное. При этом $C_{n,s}^{1/n} \to 4$ при $n \to \infty$.

Для некоторого s, зависящего от n, число (11) отлично от нуля. Следовательно, модуль этого числа не меньше единицы. Таким образом,

$$|C_{n,s}\Omega_{n+1}Q_{n,s}(q)l| \geqslant 1 - 3aC_{n,s}\Omega_{n+1} \max_{j=1,2,3} |R_{n,j,s}(q)|,$$

или

$$|l| \geqslant A^n - 3a(BA)^n \tag{12}$$

для всех достаточно больших n, где

$$A = \frac{3^3}{2^{23}e^6q^3}, \quad B = \frac{2^{23}e^6}{3^3q}.$$

Условие $B < 1$ равносильно неравенству (1). Полагая в (12) $n = \left[\frac{\log\left(3a\frac{\log(BA)}{\log(A)}\right)}{\log\frac{1}{B}}\right]$, получаем оценку (2), (3).

Теорема доказана.

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 08–01–00317, НШ–3906.2008.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Huttner M., Matala-aho T.* Diophantine approximations for a constant related to elliptic functions // J. Math. Soc. Japan. 2001. **53**, N 4. 957–974.
2. *Гончар А.А., Рахманов Е.А., Сорокин В.Н.* Аппроксимации Эрмита–Паде для систем функций марковского типа // Матем. сб. 1997. **188**, № 5. 33–58.
3. *Сорокин В.Н.* О линейной независимости значений обобщенных полилогарифмов // Матем. сб. 2001. **192**, № 8. 139–154.

Поступила в редакцию
16.06.2008

УДК 519.217.3

ЗАДАЧА О СКОРЕЙШЕМ ОБНАРУЖЕНИИ СМЕНЫ РЕЖИМА ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ЛЕВИ

Ф. А. Устинов[1]

Найден оптимальный момент в задаче о скорейшем обнаружении смены режима (разладке) в обобщенной байесовской постановке для произвольного процесса Леви.

Ключевые слова: скорейшее обнаружение смены режима, задача о разладке, обобщенная байесовская постановка, процессы Леви, процесс Ширяева.

The optimal stopping time for the quickest regime change detection (disorder) problem in the generalized Bayesian setting is determined for an arbitrary Levy process.

Key words: quickest detection of regime change, disorer problem, generalized Bayesian setting, Levy processes, Shiryaev process.

Задача о скорейшем обнаружении смены режима в обобщенной байесовской постановке была впервые рассмотрена в работе [1] в случае броуновского движения. В работе [2] исследуется случай простого

[1] *Устинов Филипп Александрович* — асп. каф. теории вероятностей мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: atikin85@mail.ru.

пуассоновского процесса (при $\lambda_0 > \lambda_1$, т.е. в случае снижения частоты скачков). Здесь рассматривается вопрос о виде оптимального момента в задаче для произвольных процессов Леви.

На некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ наблюдается процесс Леви $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ с триплетом характеристик (a_0, σ, ν_0). Предположим, что в неизвестный и ненаблюдаемый момент времени θ этот триплет характеристик меняется на (a_1, σ, ν_1). Обозначим через P_{θ_0} распределение процесса X в предположении, что момент смены режима $\theta = \theta_0$. При распределении P_∞ смена режима не происходит никогда, при P_0 смена режима происходит мгновенно, в момент времени 0. Момент подачи сигнала тревоги об обнаружении смены режима обозначим через τ. Это марковский момент относительно фильтрации $\mathcal{F}^X$, порожденной процессом X. Следуя [1], будем искать наилучший момент в классе $\mathcal{M}_T = \{\tau : E_\infty \tau \geqslant T\}$, т.е. среди правил остановки, для которых среднее время до подачи (ложной) тревоги в случае отсутствия разладки не меньше T. Момент τ^* будем называть *оптимальным* в классе $\mathcal{M}_T$, если инфимум

$$B(T) := \frac{1}{T} \inf_{\tau \in \mathcal{M}_T} \int\limits_0^\infty E_\theta (\tau - \theta)^+ d\theta \tag{1}$$

($B(T)$ называется функцией потерь) достигается на τ^*. В этом критерии θ можно интерпретировать как обобщенную случайную величину с равномерным распределением на $[0, \infty]$, поэтому подход называется обобщенным байесовским. Для отыскания оптимального момента рассмотрим процесс

$$\psi_t = \psi_0 L_t + \int\limits_0^t \frac{L_t}{L_s} ds,$$

где $L_t = \frac{d(P_0 | \mathcal{F}_t^X)}{d(P_\infty | \mathcal{F}_t^X)}$ — производная Радона–Никодима сужения меры P_0 на сигма-алгебру, порожденную процессом X до момента t, по сужению меры P_∞ на ту же сигма-алгебру. Пользуясь статистикой ψ_t и действуя аналогично [1, лемма 2.3], можно переписать $B(T)$ в виде

$$B(T) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}_T} \frac{1}{T} E_\infty^0 \int\limits_0^\tau \psi_s ds$$

(здесь и ниже $E^x(\cdot)$ означает $E(\cdot | \psi_0 = x)$; в случае $x = 0$ индекс будем опускать). Чтобы решить последнюю задачу оптимальной остановки, воспользуемся методом множителей Лагранжа и избавимся от ограничений (на математическое ожидание момента остановки). Рассмотрим семейство задач

$$v^{(c)}(x) = \inf_\tau E_\infty^x \int\limits_0^\tau (\psi_u - c) du. \tag{2}$$

Утверждение 1. *Оптимальным правилом остановки в задаче* (2) *является* $\tau_{A(c)} = \inf\{t : \psi_t > A(c)\}$ *для некоторого* $A(c)$.

Для доказательства этого утверждения сначала изучим процесс ψ_t. Он удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\psi_t = dt + \frac{\psi_t}{L_t} dL_t,$$

где L_t — процесс плотности (в [3, формула (5.21)] процесс плотности обозначен Z_t). Заметим, что

$$E_\infty^x \int_0^\tau \psi_s ds \leqslant E_\infty^y \int_0^\tau \psi_s ds,$$

если $x \leqslant y$. Отсюда сразу следует, что наша задача об оптимальной остановке простая односторонняя, т.е. множество продолжения наблюдений имеет вид $[0, A]$, $A \in [0, \infty]$. Утверждение следует из следующей леммы.

Лемма. *Рассматриваются марковский процесс* Y_t *и задача*

$$H(T) = \inf_\tau E_\infty^0 \int\limits_0^\tau f(Y_s) ds.$$

Пусть функция f монотонно возрастает и $f(0) \leqslant 0$. Пусть траектория процесса при условии $Y_0 = a$ почти наверное находится выше траектории при условии $Y_0 = b$, если $a > b$. Тогда оптимальный момент имеет вид $\tau^* = \tau_A$.

Из условия леммы нетрудно вывести, что если некоторая точка находится в множестве продолжения наблюдений, то и нижележащая точка будет находиться в множестве продолжения наблюдений.

Заметим, что момент $\tau_{A(c)}$ будет оптимальным в классе $M_{E\tau_{A(c)}}$. Действительно, так как для любого τ

$$E_\infty^{(x)} \int\limits_0^{\tau_{A(c)}} (\psi_s - c)ds \leqslant E_\infty^{(x)} \int\limits_0^{\tau} (\psi_s - c)ds,$$

то, полагая $x = 0$ и пользуясь $\int\limits_0^{\tau_{A(c)}} cds = \tau_{A(c)}c$, получаем

$$E_\infty^0 \int\limits_0^{\tau_{A(c)}} \psi_s ds \leqslant E_\infty^0 \int\limits_0^{\tau} \psi_s ds + cE_\infty^0(\tau_{A(c)} - \tau).$$

То есть момент остановки $\tau_{A(c)}$ является оптимальным (в классе $M_{E\tau_{A(c)}}$) для нашей исходной задачи. Установим теперь, что для каждого T найдется такое $c(T)$, что $E\tau_{A(c(T))} = T$. Для этого достаточно доказать два следующих утвержения.

Утверждение 2. *Функция $A(c)$ возрастает до бесконечности и непрерывна.*

Утверждение 3. *Функция $f(A) = E_\infty^0 \tau_A$ возрастает до бесконечности и непрерывна.*

Доказательство утверждения 2. Ясно, что $A(c)$ возрастает. Если предположить, что у $A(c)$ есть скачок в точке c_0, то для точки A^* из интервала $(A(c_0-), A(c_0+))$ удается показать, что она лежит одновременно и в множестве продолжения наблюдений, и в множестве прекращения наблюдений.

Доказательство утверждения 3. Свойство возрастания, очевидно, выполнено. Для непрерывности достаточно доказать, что в случае достаточно больших C

$$E_\infty^0(\tau_Z - \tau_A) I_{(\tau_{2A} < C)} \to 0$$

при $A \to Z$. Разбивая оцениваемое выражение на два, соответствующие непрерывному и скачковому пересечению уровня A, получаем, что каждое из них стремится к нулю. При этом важную роль играют траектории процесса ψ. Из утверждений 2, 3 получаем, что у функции $g(c) = E_\tau A(c)$ найдется обратная. Таким образом, из утверждений 1–3 следует

Теорема. *В задаче об обнаружении смены режима для процессов Леви (1) при любом $T > 0$ найдется оптимальный в классе $\mathcal{M}_T$ момент остановки $\tau^* = \tau_{A(T)}$ — момент выхода процесса ψ_t за уровень $A(T)$. При этом уровень $A(T)$ таков, что $E_\infty \tau_{A(T)} = T$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Feinberg E.A., Shiryaev A.N.* Quickest detection of drift change for Brownian motion in generalized Bayesian and minimax settings // Statistics and Decisions. 2006. **24**, N 4. 445–470.
2. *Бурнаев Е.В.* Задача о разладке для пуассоновского процесса в обобщенной байесовской постановке // Успехи матем. наук. 2007. **62**, № 4(376). 151–152.
3. *Jacod J., Shiryaev A.N.* Limit theorems for stochastic processes. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

Поступила в редакцию
17.09.2008