Ю. Б. Ермолаев, Вычисление центрального элемента универсальной обертывающей алгебры алгебры Витта, *Изв. вузов. Матем.*, 1975, номер 5, 20–26

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1975 МАТЕМАТИКА № 5 (156)

УДК 519.4

Ю. Б. Ермолаев

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА УНИВЕРСАЛЬНОЙ ОБЕРТЫВАЮЩЕЙ АЛГЕБРЫ АЛГЕБРЫ ВИТТА

Пусть P — поле характеристики $p \geqslant 3$ и $\mathfrak{L}$ — алгебра Витта над P с базисом e_i, $i=-1, \dots, p-2$, для которого

$$e_i \circ e_j = \begin{cases} (i-j)\, e_{i+j}, & \text{если } i+j \leqslant p-2, \\ 0, & \text{если } i+j > p-2. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $\mathfrak{U}$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{L}$; $\mathfrak{Z}$ — ее центр. Как обычно, $\mathfrak{L}$ считаем вложенной в $\mathfrak{U}$. Введем обозначения для следующих элементов алгебры $\mathfrak{U}$:

$$z_{km} = \sum_{(m_i) \in M_{km}} e_{p-2-m_1}\, e_{p-2-m_2} \dots e_{p-2-m_k},$$

где сумма распространена на все наборы $(m_1, \dots, m_k)$ целых чисел множества $M_{km} = \{(m_1, \dots, m_k) \mid m_1 + \dots + m_k = m,\ 0 \leqslant m_i \leqslant p-1,\ i=\overline{1, k}\}$, $k=\overline{1, p-1}$; $m=\overline{0, p-1}$. Через D_i обозначим дифференцирование $\operatorname{ad} e_i$ в $\mathfrak{U}$, т. е. $uD_i = ue_i - e_iu$ для $u \in \mathfrak{U}$.

Лемма 1. *Имеют место соотношения*

$$\begin{gathered} z_{km} D_{-1} = -(m+1)\, z_{k;\, m+1}, \quad m=\overline{0, p-1}; \\ z_{km} D_{p-2} = 0, \quad m = \overline{0, p-3}; \\ z_{k,\, p-2} D_{p-2} = 2k z_{k,\, 0}; \quad z_{k;\, p-1} D_{p-2} = (2k-1)\, z_{k,\, 1}. \end{gathered} \tag{2}$$

Доказательство. Индукция по k. При $k=1$ $z_{1,m} = e_{p-2-m}$ и (2) представляют из себя иную запись соответствующих формул (1). При $k>1$ воспользуемся равенством

$$z_{k,m} = \sum_{i=0}^{m} z_{1i} z_{k-1;\, m-i}, \quad k \geqslant 2.$$

Предполагая (2) справедливыми при первом индексе $<k$, будем иметь

$$z_{k;\, m} D_{-1} = \sum_{i=0}^{m} \left[-(i+1)\, z_{1;\, i+1} z_{k-1;\, m-i} - (m-i+1)\, z_{1;\, i} z_{k-1,\, m-i+1}\right] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m+1} i z_{1i} z_{k-1,\, m-i+1} - \sum_{i=0}^{m} (m-i+1)\, z_{1i} z_{k-1,\, m-i+1} =$$

$$= -(m+1) \sum_{i=0}^{m+1} z_{1i} z_{k-1;\, m+1-i} = -(m+1)\, z_{k;\, m+1}.$$

Далее из равенства

$$z_{km}D_{p-2} = \sum_{i=0}^{m} [z_{1i}D_{p-2}z_{k-1,\, m-i} + z_{1i}z_{k-1;\, m-i}D_{p-2}]$$

и предположения индукции следует $z_{km}D_{p-2} = 0$ для $m = \overline{0,\ p-3}$; кроме того,

$$z_{k,\, p-2}D_{p-2} = 2(k-1)\, z_{1,\, 0}z_{k-1;\, 0} + 2z_{1;\, 0}z_{k-1,0} = 2kz_{k;\, 0},$$

$$z_{k;\, p-1}D_{p-2} = (2k-3)\, z_{1;\, 0}z_{k-1,\, 1} + 2(k-1)\, z_{1,\, 1}z_{k-1;\, 0} + 2z_{1;\, 0}z_{k-1;\, 1} + \\ + z_{11}z_{k-1,\, 0} = (2k-1)(z_{10}z_{k-1;\, 1} + z_{11}z_{k-1;0}) = (2k-1)\, z_{k;\, 1}.$$

Лемма доказана.

Всюду в дальнейшем $q = \dfrac{p-1}{2}$.

Следствие. *Элемент*

$$z = z_{q+1;\, p-1} = \sum_{(m_i)\in M_{q+1,\, p-1}} e_{p-2-m_0}\, e_{p-2-m_1} \dots e_{p-2-m_q}$$

является центральным в универсальной обертывающей алгебре $\mathfrak{U}$ *алгебры Витта.*

Действительно, элементы e_{-1} и e_{p-2} являются образующими в $\mathfrak{L}$. А так как по (2) $z_{q+1;\, p-1}D_{-1} = 0$ и $z_{q+1;\, p-1}D_{p-2} = 0$, то z коммутирует со всеми $a \in \mathfrak{L}$, а следовательно, и со всеми $u \in \mathfrak{U}$.

Выразим z через обычный базис Пуанкаре — Биркгофа — Витта.

Пусть E — множество всевозможных независящих от порядка наборов базисных элементов алгебры $\mathfrak{L}$

$$e_{p-2-m_0},\ e_{p-2-m_1}, \dots,\ e_{p-2-m_q},$$

для индексов которых имеют место соотношения $m_0 + m_1 + \dots + m_q = p-1$, $0 \leqslant m_i \leqslant p-1$, $i = \overline{0,\ q}$. Справедливы три следующих свойства.

а) Только один набор из E содержит e_{-1}, а именно,

$$e_{-1},\ \overbrace{e_{p-2}, \dots,\ e_{p-2}}^{q},$$

и только один набор из E содержит e_0, а именно,

$$e_0,\ e_{p-3},\ \overbrace{e_{p-2}, \dots,\ e_{p-2}}^{q-1}.$$

б) Если при $1 \leqslant k \leqslant q-1$ элемент e_k входит в набор множества E, то для остальных элементов e_{n_j} этого набора $n_j \geqslant p-3-k$. Причем, если e_{p-3-k} или e_{p-2-k} входят в набор вместе с e_k, то это возможно лишь в двух следующих случаях:

$$e_k,\ e_{p-3-k},\ \overbrace{e_{p-2}, \dots,\ e_{p-2}}^{q-1}; \qquad e_k,\ e_{p-2-k},\ e_{p-3},\ \overbrace{e_{p-2}, \dots,\ e_{p-2}}^{q-2}.$$

в) Во всех наборах множества E, за исключением одного

$$e_{q-1},\ e_{q-1},\ \overbrace{e_{p-2}, \dots,\ e_{p-2}}^{q-1}, \tag{3}$$

число базисных элементов e_k с $k < q$ не больше одного.

Лемма 2. *В множестве E некоммутирующие между собой элементы содержат лишь следующие наборы:*

$$\begin{gathered} e_{-1},\ \overbrace{e_{p-2},\ \dots,\ e_{p-2}}^{q}; \\ e_k,\ e_{p-3-k},\ \overbrace{e_{p-2},\ \dots,\ e_{p-2}}^{q-1},\quad k=\overline{0,\ q-2}; \\ e_k,\ e_{p-2-k},\ e_{p-3},\ \overbrace{e_{p-2},\ \dots,\ e_{p-2}}^{q-2},\quad k=\overline{1,\ q-1}. \end{gathered} \tag{4}$$

Остальные наборы множества E состоят из элементов перестановочных между собой.

Доказательство. В виду пп. а), б) каждый набор, не принадлежащий к совокупности (4), либо содержит только элементы, все индексы которых $\geqslant q$, либо содержит лишь один элемент e_k с $k<q$, а индексы остальных элементов $>p-2-k$ и потому они коммутируют с e_k и, тем более между собой, либо, наконец, совпадает с набором (3), элементы которого перестановочны. Лемма доказана.

Через $(e_{i_1},\dots,e_{i_k})$ обозначим симметрическую сумму всех членов вида $e_{j_1}\dots e_{j_k}$, где $j_1,\dots,j_k$ — перестановка индексов $i_1,\dots,i_k$. Отметим, что сумма $(e_{i_1},\dots,e_{i_k})$ содержит $\frac{k!}{k_{-1}!\dots k_{p-2}!}$ слагаемых, где k_i — число элементов в наборе $e_{i_1},\dots,e_{i_k}$, совпадающих с e_i, $i=\overline{-1,\ p-2}$. Элемент z можно, очевидно, записать в виде

$$z=\sum_E (e_{n_0},\ e_{n_1},\dots,e_{n_q}), \tag{5}$$

где сумма распространена на все наборы множества E.

Лемма 3. *Справедливы равенства:*

$$\begin{gathered} (e_{-1},\ \overbrace{e_{p-2},\dots,\ e_{p-2}}^{q}) = (q+1)\,e_{p-2}^{q}e_{-1}+\frac{(q+1)\,q}{2}\,e_{p-3}e_{p-2}^{q-1}; \\ (e_0,\ e_{p-3},\ \overbrace{e_{p-2},\dots,\ e_{p-2}}^{q-1}) = (q+1)\,qe_{p-3}e_{p-2}^{q-1}e_0; \\ (e_k,\ e_{p-3-k},\ \overbrace{e_{p-2},\dots,\ e_{p-2}}^{q-1}) = \\ =(q+1)\,qe_{p-3-k}e_{p-2}^{q-1}e_k+\frac{(q+1)\,q}{2}(2k+3)\,e_{p-3}e_{p-2}^{q-1};\ k=\overline{1,\ q-2}; \\ (e_1,\ e_{p-3},\ e_{p-3},\ \overbrace{e_{p-2},\dots,\ e_{p-2}}^{q-2}) = \\ =\frac{(q^2-1)\,q}{2}\,e_{p-3}^{2}\,e_{p-2}^{q-2}\,e_1+2\,(q^2-1)\,qe_{p-3}e_{p-2}^{q-1}; \\ (e_k,\ e_{p-2-k},\ e_{p-3},\ \overbrace{e_{p-2},\dots,\ e_{p-2}}^{q-2}) = \\ =(q^2-1)\,qe_{p-2-k}e_{p-3}e_{p-2}^{q-2}e_k+(q^2-1)\,q\,(k+1)e_{p-3}e_{p-2}^{q-1},\quad k=\overline{2,\ q-1}. \end{gathered} \tag{6}$$

Доказательство. Можно записать

$$(e_{-1},\ e_{p-2},\dots,\ e_{p-2})=\sum_{i=0}^{q} e_{p-2}^{q-i}e_{-1}e_{p-2}^{i};$$

$$(e_0, e_{p-3}, e_{p-2}, \dots, e_{p-2}) =$$
$$= \sum_{i=0}^{q-1} [(i+1) e_{p-2}^{q-i-1} e_0 e_{p-3} e_{p-2}^{i} + (q-i) e_{p-3} e_{p-2}^{q-i-1} e_0 e_{p-2}^{i}];$$

$$(e_k, e_{p-3-k}, e_{p-2}, \dots, e_{p-2}) =$$
$$= \frac{(q+1)q}{2} (e_k e_{p-3-k} e_{p-2}^{q-1} + e_{p-3-k} e_k e_{p-2}^{q-1}), \quad k = \overline{1, q-2};$$

$$(e_1, e_{p-3}, e_{p-3}, e_{p-2}, \dots, e_{p-2}) =$$
$$= \frac{(q+1)q(q-1)}{6} (e_1 e_{p-3}^2 e_{p-2}^{q-2} + e_{p-3} e_1 e_{p-3} e_{p-2}^{q-2} + e_{p-3}^2 e_1 e_{p-2}^{q-2});$$

$$(e_k, e_{p-2-k}, e_{p-3}, e_{p-2}, \dots, e_{p-2}) =$$
$$= \frac{(q+1)q(q-1)}{2} (e_k e_{p-2-k} e_{p-3} e_{p-2}^{q-2} + e_{p-2-k} e_k e_{p-3} e_{p-2}^{q-2}), \quad k = \overline{2, q-1}.$$

Отсюда, используя формулы

$$e_{-1} e_{p-2}^{i} = e_{p-2}^{i} e_{-1} + i e_{p-3} e_{p-2}^{i-1};$$
$$e_0 e_{p-2}^{i} = e_{p-2}^{i} e_0 + 2i e_{p-2}^{i}; \quad e_0 e_{p-3} e_{p-2}^{i} = e_{p-3} e_{p-2}^{2} e_0 + (2i+3) e_{p-3} e_{p-2}^{i};$$
$$e_k e_{p-3-k} = e_{p-3-k} e_k + (2k+3) e_{p-3};$$
$$e_k e_{p-2-k} = e_{p-2-k} e_k + 2(k+1) e_{p-2}; \quad e_1 e_{p-3}^{2} = e_{p-3}^{2} e_1 + 8 e_{p-3} e_{p-2},$$

первые три из которых доказываются индукцией по i, получим (6).

Предложение 1. *При $p=5$ центральный элемент z универсальной обертывающей алгебры алгебры Витта имеет вид*

$$z = 3e_3^2 e_{-1} + e_2 e_3 e_0 + 3e_2^2 e_1 + 3e_3 e_1^2,$$

а при $p \geqslant 7$ —

$$z = a + (q+1) e_{p-2}^{q} e_{-1} + (q+1) q e_{p-3} e_{p-2}^{q-1} e_0 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{q-1} a_k e_k + \frac{(q+1)q}{2} e_{p-2}^{q-1} e_{q-1}^{2}, \tag{7}$$

где

$$a = \sum_{(k_i) \in M} \frac{(q+1)!}{k_0! k_1! \dots k_{q-1}!} e_q^{k_0} e_{q+1}^{k_1} \dots e_{p-2}^{k_{q-1}} - \frac{5}{64} e_{p-3} e_{p-2}^{q-1}; \tag{7'}$$
$$a_k = \sum_{(k_i) \in M_k} \frac{(q+1)!}{k_0! k_1! \dots k_{q-1}!} e_q^{k_0} e_{q+1}^{k_1} \dots e_{p-2}^{k_{q-1}}, \quad k = \overline{1, q-1};$$

суммирование происходит по множествам

$$M = \left\{(k_0, \dots, k_{q-1}) \mid k_i \geqslant 0; \ \sum_{i=0}^{q-1} k_i = q+1; \ \sum_{i=1}^{q-1} i k_i = q^2 - 2q - 1\right\},$$
$$M_k = \left\{(k_0, \dots, k_{q-1}) \mid k_i \geqslant 0; \ \sum_{i=0}^{q-1} k_i = q; \ \sum_{i=1}^{q-1} i k_i = q^2 - q - 1 - k\right\},$$

$$k = \overline{1,\ q-1}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$(e_{n_0}, e_{n_1}, \ldots, e_{n_q}) = \frac{(q+1)!}{k_{-1}!k_0! \ldots k_{p-2}!} e_q^{k_q} \ldots e_{p-2}^{k_{p-2}} e_{-1}^{k_{-1}} e_0^{k_0} \ldots e_{q-1}^{k_{q-1}} + u,$$

где

$$\sum_{i=-1}^{p-2} k_i = q+1, \quad \sum_{i=-1}^{p-2} ik_i = (q-1)(2q+1), \ k_i \geqslant 0$$

$\left(\text{т. к. } \sum_{i=0}^{q} (p-2-m_i) = (q-1)(2q+1)\right)$, а u — добавочный член степени $< q+1$ относительно совокупности $e_{-1}, e_0, \ldots, e_{p-2}$, который возникает за счет перестановок множителей в слагаемых $(e_{n_0}, \ldots, e_{n_q})$. Если исключить слагаемое, соответствующее набору (3), то в силу п. в) среди чисел $k_{-1}, \ldots, k_{q-1}$ только одно, не более, равно единице, остальные — нули. Собирая те слагаемые правой части (5), которые содержат одно данное e_k, получим $a_k e_k + u_k$, где u_k — добавочный член полученный суммированием добавочных членов, использованных слагаемых, $k = -\overline{1,\ q-1}$. В (7′) объединяем слагаемые, которые содержат e_{n_i} с $n_i \geqslant q$ и сумму добавочных членов $\sum_{k=-1}^{q-1} u_k$. При этом добавочные члены возникают лишь в тех слагаемых правой части (5), которые соответствуют наборам (4), указанным в лемме 2. Поэтому для получения Σu_k достаточно просуммировать добавочные члены, вычисленные в лемме 3. Так как все они кратны $e_{p-3}e_{p-2}^{q-1}$, то суммируем только коэффициенты

$$\frac{(q+1)q}{2} + \frac{(q+1)q}{2} \sum_{k=1}^{q-2} (2k+3) + (q^2-1)q \sum_{k=1}^{q-1} (k+1) =$$

$$= \frac{(q+1)q}{2}(q^3+q^2-3q-1) = -\frac{5}{64},$$

поскольку $q = -\frac{1}{2}$, как элемент поля P. Таким образом, $\sum_{k=-1}^{q-1} u_k = -\frac{5}{64} e_{p-3}e_{p-2}^{q-1}$. Учитывая еще слагаемое, соответствующее набору (3), и выделяя отдельно члены с e_{-1} и e_0 (используя при этом пп. в) и а)), получим (7). При $p=5$ не все соотношения (6) имеют смысл, поэтому выражение для z в этом случае не следует из общей формулы (7). Случай $p=3$ дает известный центральный элемент $z = e_0^2 - e_0 - e_{-1}e_1$. Предложение доказано.

Введём обозначения: $x_{-1} = e_{-1}^p$, $x_0 = e_0^p - e_0$, $x_i = e_i^p$, $i = \overline{1, p-2}$. Элементы x_i, $i = -\overline{1, p-2}$, как известно, лежат в центре $\mathfrak{Z}$ алгебры $\mathfrak{U}$ (см. [1]). Пусть $R = P[x_{-1}, x_0, \ldots, x_{p-2}]$.

Предложение 2. *Элементы* x_i, $i=\overline{-1, p-2}$, *и* z *порождают центр* $\mathfrak{Z}$ *алгебры* $\mathfrak{U}$. z — *целый над* R *степени* p.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — подалгебра в $\mathfrak{U}$, порожденная элементами

$$x_{-1},\ x_0,\ x_1, \dots ,\ x_{q-1},\ e_q,\ e_{q+1}, \dots ,\ e_{p-2}; \tag{8}$$

$\mathfrak{B}$ — подалгебра в $\mathfrak{U}$, порожденная $\mathfrak{A}$ и центром $\mathfrak{Z}$. Алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, очевидно, коммутативны. $\mathfrak{A}$ изоморфна кольцу многочленов над P от p алгебраически независимых переменных, соответствующих образующим (8), поскольку всякая алгебраическая зависимость между (8) влечет линейную зависимость базисных мономов Пуанкаре—Биркгофа—Витта. Можно рассматривать $\mathfrak{U}$ как левый модуль над $\mathfrak{A}$. Этот модуль свободен и имеет конечную размерность, равную p^{q+1}. Действительно, мономы

$$e_{-1}^{k_{-1}} e_0^{k_0} e_1^{k_1} \dots e_{q-1}^{k_{q-1}}, \tag{9}$$

где $0 \leqslant k_i \leqslant p-1$, $i=\overline{-1, q-1}$, служат его базисом. Пусть имеется зависимость $\Sigma a_\gamma M_\gamma = 0$, где M_γ пробегает некоторое множество различных мономов (9), а $a_\gamma \in \mathfrak{A}$. Пусть a_γ имеет степень $m_i(\gamma)p$, а M_γ — степень $k_i(\gamma)$ относительно e_i, $i=\overline{-1, q-1}$. Тогда $m_i(\gamma_1)p + k_i(\gamma_1) = m_i(\gamma_2)p + k_i(\gamma_2)$ влечет $m_i(\gamma_1) = m_i(\gamma_2)$ и $k_i(\gamma_1) = k_i(\gamma_2)$, поскольку $0 \leqslant k_i(\gamma) \leqslant p-1$. Поэтому предполагая сумму $\Sigma a_\gamma M_\gamma$ содержащей наименьшее возможное число слагаемых, получим, что все слагаемые имеют одинаковую степень относительно всех e_i, $i=\overline{-1, q-1}$. Но это означает, что в нее входит лишь одно слагаемое, что невозможно, так как в $\mathfrak{U}$ нет делителей нуля. Если упорядочить образующие алгебры $\mathfrak{U}$ следующим образом:

$$e_q,\ e_{q+1}, \dots ,\ e_{p-2},\ e_{-1},\ e_0,\ e_1, \dots ,\ e_{q-1}$$

и рассмотреть базисные мономы Пуанкаре — Биркгофа — Витта относительно такого упорядочения, то сразу видно, что (9) порождают $\mathfrak{U}$ как левый $\mathfrak{A}$-модуль.

Пусть K — поле частных алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{U}_{(K)}$ — линейное пространство над K, полученное расширением кольца операторов левого $\mathfrak{A}$-модуля $\mathfrak{U}$ до K. Размерность $\mathfrak{U}_{(K)}$ над K равна p^{q+1}. $\mathfrak{B}$ рассматриваем тоже как левый $\mathfrak{A}$-модуль. Тогда $\mathfrak{B}_{(K)}$, как подпространство в $\mathfrak{U}_{(K)}$, полученное расширением кольца операторов $\mathfrak{A}$-модуля $\mathfrak{B}$ до K, имеет конечную размерность над K. Поэтому коммутативная алгебра $\mathfrak{B}_{(K)}$ является полем — конечным алгебраическим расширением поля K. Отсюда следует, что степень $\mathfrak{B}_{(K)}$ над K есть делитель $\dim \mathfrak{U}_{(K)} = p^{q+1}$. Пусть $[\mathfrak{B}_{(K)} : K] = p^r$. Найденный выше центральный элемент $z \notin K$, т. к. иначе имелась бы зависимость над K между элементами (9). Но $z \in \mathfrak{B}_{(K)}$, поэтому $r \geqslant 1$. С другой стороны, линейное пространство $\mathfrak{U}_{(L)}$ над полем $L = \mathfrak{B}_{(K)}$, полученное расширением кольца операторов левого $\mathfrak{B}$-модуля $\mathfrak{U}$ до L, имеет размерность p^{q+1-r} и может рассматриваться как правый $\mathfrak{U}$-модуль. Его неприводимый $\mathfrak{U}$-подмодуль имеет последний инвариант Чанга (см. [1]) $\varepsilon_{p-2} = x_{p-2} \neq 0$ и потому имеет размерность p^q. Отсюда $r \leqslant 1$. Таким образом, $r = 1$ и $\mathfrak{B}_{(K)} = K(z)$, причем z имеет над K степень p.

Покажем, что не существует центрального элемента z_0 алгебры $\mathfrak{U}$, который бы лежал в $\mathfrak{A}$, но не лежал в R. Для того чтобы z_0 был таким элементом, необходимо и достаточно, чтобы $z_0 D_{-1} = 0$ ($z_0 D_{p-2} = 0$, так как $z_0 \in \mathfrak{A}$). Положим $\mathfrak{A}_i = R[e_{q+i}, \ldots, e_{p-2}]$, $i = \overline{0, p-2-q}$, $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$. Индукцией по j доказываются равенства

$$e_q^j D_{-1} = (q+1) j e_q^{j-1} e_{q-1} - (q+1) \binom{j}{2} e_q^{j-2} e_{p-2},$$

$$e_{q+i}^j D_{-1} = (q+i+1) j e_{q+i-1} e_{q+i}^{j-1}, \quad i > 0.$$

Пусть $z_0 = \sum_{j=0}^{p-1} b_j e_q^j$, где $b_j \in \mathfrak{A}_1$. Тогда $z_0 D_{-1} = 0$ влечёт

$$\sum_{j=0}^{p-1} \left[b_j' e_q^j - (q+1) \binom{j}{2} b_j e_q^{j-2} e_{p-2} \right] + \left[\sum_{j=0}^{p-1} (q+1) j b_j e_q^{j-1} \right] e_{q-1} = 0,$$

где $b_j' = b_j D_{-1} \in \mathfrak{A}_0$. Откуда имеем $b_j = 0$ для $j = \overline{1, p-1}$, т. е. $z_0 \in \mathfrak{A}_1$. Пусть $z_0 \in \mathfrak{A}_i$ и $z_0 = \sum_{j=0}^{p-1} c_j e_{q+i}^j$, где $c_j \in \mathfrak{A}_{i+1}$, $i \geqslant 1$. Точно так же $z_0 D_{-1} = 0$ влечёт

$$\sum_{j=0}^{p-1} c_j' e_{q+i}^j + (q+i+1) \sum_{j=0}^{p-1} j c_j e_{q+i-1} e_{q+i}^{j-1} = 0,$$

где $c_j' = c_j D_{-1}$ и откуда $c_j = 0$ при $j = \overline{1, p-1}$, т. е. $z_0 \in \mathfrak{A}_{i+1}$. При $i = p-2-q$ получим $z_0 \in R$.

Пусть заданы произвольные элементы ε_i, $i = -\overline{1, p-2}$, из поля P (или какого-то его расширения). Существует неприводимый над $\mathfrak{U}$ модуль $\mathfrak{M}$, такой, что для всякого $a \in \mathfrak{M}$, $ax_i = \varepsilon_i a$, $i = -\overline{1, p-2}$ (см. [1]). Поскольку z принадлежит центру $\mathfrak{U}$, а $\mathfrak{M}$ неприводим над $\mathfrak{U}$, то и $az = \gamma a$. Это означает, что всякая финитная на R точка финитна и на z, т. е. z — целый над R.

Пусть $z^p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i z^i$, где $a_i \in \mathfrak{A}$. Применяя к этому равенству D_{-1}, получим $\sum_{i=0}^{p-1} a_i' z^i = 0$; если не все $a_i' = a_i D_{-1}$ равны нулю, то мы имеем многочлен над $\mathfrak{A}$ степени $< p$, корнем которого является z. Этого не может быть. Следовательно, $a_i' = 0$ и, как замечено выше, $a_i \in \mathfrak{Z}$. По доказанному $a_i \in R$, $i = \overline{0, p-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chang Ho-Jui. Uber Wittsche Lie-Ringe. Hamhurg Abhandl. 14, 1941, S. 151—184.

г. Казань

Поступила
15 II 1972