Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. В. Прасолов, Четыре рассказа по геометрии,
Матем. обр., 1998, выпуск 1, 34–51

https://www.mathnet.ru/mo270

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.89
18 мая 2025 г., 15:47:59

Четыре рассказа по геометрии

В. В. Прасолов

В. В. Прасолов — автор нескольких книг по геометрии, включая популярное, выпущенное массовым тиражом пособие “Задачи по планиметрии” в двух частях. Предлагаемые в настоящем выпуске заметки, кроме первой, которая публикуется впервые, вошли в его новую книгу “Рассказы о числах, многочленах и фигурах”, вышедшую в 1997 г. в московском издательстве “Фазис”. Каждый рассказ может служить темой занятия математического кружка или факультатива.

1. Векторы в геометрии

Векторы часто бывают полезны при решении геометрических задач. Кроме того, некоторые геометрические теоремы удобно формулировать на языке векторов.

При работе с векторами часто используют *скалярное произведение*

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = OA \cdot OB \cos AOB.$$

Скалярное произведение обладает следующими важными свойствами:

$(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$;

$(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$;

$(a, a) = |a|^2$ — квадрат длины вектора a.

С помощью векторов легко доказать, что *высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке*. В самом деле, пусть O — центр описанной окружности и H — такая точка, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Тогда, как легко проверить, $AH \perp BC$, $BH \perp AC$ и $CH \perp AB$, т.е. H — точка пересечения высот.

Доказать это можно разными способами. Во-первых, можно заметить, что

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH}, \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}) = \\ &= (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= |OC|^2 - |OB|^2 = 0.\end{aligned}$$

Во-вторых, можно заметить, что проекции векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ на прямую BC равны по длине и противоположны по направлению. Следовательно, проекции векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OH}$ на прямую BC совпадают. Это означает, что $AH \perp BC$.

Мы не только доказали, что высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке, но и получили для этой точки H достаточно удобное выражение: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, где O — центр описанной окружности. С помощью этого выражения можно решить, например, следующую задачу.

Задача 1. *Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — точки пересечения высот треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 совпадают.*

Указание. Если A_2 — середина отрезка A_1A, то

$$\overrightarrow{OA_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right),$$

где O — центр окружности.

Векторы, идущие из центра правильного многоугольника в его вершины, обладают следующим интересным свойством: их сумма равна нулю. Сформулируем это утверждение более точно. Пусть $A_1 \dots A_n$ — правильный n-угольник, O — его центр. Тогда

$$\overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0}. \tag{1}$$

Чтобы доказать равенство (1), рассмотрим поворот, переводящий A_1 в A_2, A_2 в $A_3, \dots, A_n$ в A_1. При таком повороте вектор $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$, с одной стороны, поворачивается на угол $2\pi/n$, а с другой стороны, этот вектор не изменяется, поскольку $\overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \dots + \overrightarrow{OA_n} + \overrightarrow{OA_1}$ Следовательно, $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

С помощью равенства (1) можно доказать, что *если точка X находится на расстоянии d от центра O правильного n-угольника $A_1 \dots A_n$, то*

$$A_1X^2 + \dots + A_nX^2 = n(R^2 + d^2),$$

где R — радиус описанной окружности n-угольника. В самом деле,

$$\begin{aligned}
\sum A_iX^2 &= \sum |\overrightarrow{A_iO} + \overrightarrow{OX}|^2 = \\
&= \sum A_iO^2 + \sum OX^2 + 2(\sum \overrightarrow{A_iO}, \overrightarrow{OX}) = \\
&= nR^2 + nd^2,
\end{aligned}$$

поскольку $\sum \overrightarrow{A_iO} = \overrightarrow{0}$.

Прежде чем приступить к последней теме этого рассказа, полезно разобрать следующую задачу.

Задача 2. *Рассмотрим выпуклый многоугольник и сопоставим каждой его стороне единичный вектор внешней нормали $\overrightarrow{n_i}$ (т.е. вектор длины 1, перпендикулярный данной стороне и направленный наружу по отношению к многоугольнику). Пусть a_i — длина i-й стороны. Докажите, что $\sum a_i \overrightarrow{n_i} = \overrightarrow{0}$.*

Указание. После поворота на 90° вектор $\sum a_i \overrightarrow{n_i}$ переходит в вектор стороны многоугольника, а сумма длин всех векторов сторон многоугольника равна нулю.

Утверждение, аналогичное задаче 2, справедливо и для многогранников. А именно, *рассмотрим выпуклый многогранник и сопоставим каждой его стороне единичный вектор внешней нормали $\overrightarrow{n_i}$. Пусть A_i — площадь i-й грани. Тогда $\sum A_i \overrightarrow{n_i} = \overrightarrow{0}$.*

Это утверждение вытекает из следующих физических соображений. Наполним многогранник газом. Сила давления газа на i-ю грань пропорциональна $A_i\overrightarrow{n_i}$, а сумма всех сил давления на грани равна нулю (иначе можно было бы сконструировать вечный двигатель).

Приведем, однако, математическое доказательство. Пусть $\sum A_i\overrightarrow{n_i} = \overrightarrow{x}$. Достаточно доказать, что проекция вектора $\overrightarrow{x}$ на любую прямую l в пространстве равна нулю. Наряду с проекцией вектора $\overrightarrow{x}$ на прямую l рассмотрим проекцию многогранника на плоскость Π, перпендикулярную прямой l. Легко проверить, что длина проекции вектора $A_i\overrightarrow{n_i}$ на прямую l равна площади проекции i-й грани на плоскость Π. В самом деле, если угол между вектором $\overrightarrow{n_i}$ и прямой l равен α, то угол между i-й гранью и плоскостью Π тоже равен α, поэтому как длина проекции вектора, так и площадь проекции грани равна $A_i \cos\alpha$. Остается заметить, что проекция многогранника на плоскость Π дважды покрыта проекциями граней — «верхними»и «нижними»гранями. При этом «верхним»и «нижним»граням соответствуют разные знаки проекций векторов.

2. Метод усреднения и геометрические неравенства

При доказательстве многих геометрических неравенств бывает полезен следующий факт:

«Пусть на плоскости даны две системы векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ и $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m$, причем для любой прямой сумма длин проекций на нее векторов первой системы больше суммы длин проекций векторов второй системы. Тогда сумма длин векторов первой системы больше суммы длин векторов второй системы.»

Чтобы доказать это утверждение, фиксируем на плоскости систему координат и рассмотрим прямую l, образующую угол φ с осью Ox. Если вектор $\vec{a}$ образует с осью Ox угол α, то длина его проекции на прямую l равна $a|\cos(\varphi - \alpha)|$, где a — длина вектора $\vec{a}$. Таким образом, среднее значение длины вектора $\vec{a}$ равно

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} a|\cos(\varphi-\alpha)|\,d\varphi = \frac{2a}{\pi}.$$

В частности, среднее значение длины проекции не зависит от угла α, т.е. не зависит от положения вектора $\vec{a}$. Если сумма длин проекций векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ на любую прямую больше суммы длин проекций векторов $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m$, то соответствующее неравенство выполняется и для средних значений сумм длин проекций, а значит,

$$a_1 + \ldots + a_n > b_1 + \ldots + b_m.$$

Приведем некоторые примеры использования доказанного выше геометрического факта. Начнем с достаточно простой теоремы, которую легко доказать и другими способами.

1. Если один выпуклый многоугольник расположен внутри другого выпуклого многоугольника, то периметр внешнего многоугольника больше периметра внутреннего.

В самом деле, пусть $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ — векторы сторон внешнего многоугольника, $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m$ — векторы сторон внутреннего многоугольника. Для выпуклого многоугольника сумма длин проекций его сторон ровно в два раза больше длины проекции самого многоугольника. Ясно также, что проекция внутреннего многоугольника расположена внутри внешнего многоугольника, поэтому ее длина меньше.

Разберем теперь более сложный пример, для которого трудно получить доказательство другими способами.

2. Выпуклые многоугольники с периметрами $P_1, \ldots, P_n$ расположены так, что не существует прямой, разделяющей данные многоугольники (т.е. не существует прямой, которая не пересекает данных многоугольников, но по обе стороны от нее лежит хотя бы один данный многоугольник). Тогда данные многоугольники можно заключить в выпуклый многоугольник периметра не более $P_1 + \ldots + P_n$.

Если прямая l не разделяет данные многоугольники, то их проекция на прямую, перпендикулярную прямой l, представляет собой один отрезок, а не несколько отрезков. Это означает, что сумма длин проекций векторов сторон данных многоугольников на любую прямую не меньше суммы длин проекций векторов сторон их выпуклой оболочки.[1] Следовательно, периметр выпуклой оболочки данных многоугольников не превосходит $P_1 + \ldots + P_n$.

В некоторых случаях бывает полезен и тот факт, что *среднее значение длины проекции вектора длиной a равно $2a/\pi$.*

3. Если длины всех сторон и диагоналей выпуклого многоугольника меньше 1, то его периметр меньше π.

Пусть периметр рассматриваемого многоугольника равен P. Тогда среднее значение суммы длин проекций его сторон равно $2P/\pi$. Из условия следует, что длина проекции многоугольника на любую прямую меньше 1, т.е. сумма длин проекций сторон меньше 2. Поэтому $2P/\pi < 2$, а значит, $P < \pi$.

Следующий пример связан с выпуклыми *фигурами постоянной ширины.* Так называют выпуклые фигуры, для которых длина проекции на все прямые одна и та же. Эту длину проекции называют в таком случае *шириной* фигуры постоянной ширины.

Очевидным примером выпуклой фигуры постоянной ширины является круг. Но

[1] Выпуклой оболочкой нескольких многоугольников называют наименьший выпуклый многоугольник, их содержащий.

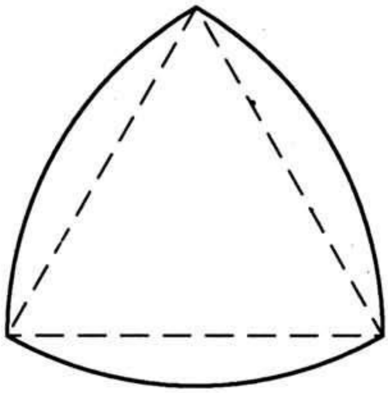

Рис. 1

есть и другие фигуры постоянной ширины. Простейший пример дает фигура, ограниченная дугами трех окружностей радиуса R с центрами в вершинах правильного треугольника со стороной R (рис. 1). Легко проверить, что длина проекции этой фигуры на любую прямую равна R.

4. Периметр любой выпуклой фигуры постоянной ширины d равен πd.

Границу данной выпуклой фигуры можно с любой точностью приблизить выпуклым многоугольником. При этом длина проекции многоугольника на любую прямую будет заключена между $\pi(d-\varepsilon)$ и $\pi(d+\varepsilon)$, где ε — сколь угодно малое положительное число. Следовательно, периметр такого выпуклого многоугольника заключен между $\pi(d-\varepsilon)$ и $\pi(d+\varepsilon)$. При $\varepsilon \to 0$ получаем, что периметр данной выпуклой фигуры равен πd.

5. Пусть на плоскости даны векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, сумма длин которых равна L. Тогда из них можно выбрать несколько векторов, длина суммы которых не меньше L/π.

Среднее значение суммы длин проекций данных векторов равно $2L/\pi$, поэтому существует прямая, для которой сумма длин проекций данных векторов не меньше $2L/\pi$. Введем на этой прямой направление. Тогда можно будет рассматривать проекции векторов со знаком, и сумма длин проекций будет равна $p-n$, где p — сумма положительных проекций, n — сумма отрицательных проекций. Так как $p-n \geq 2L/\pi$ и $p \geq 0$, $-n \geq 0$, то одно из чисел p или $-n$ не меньше L/π. Пусть для определенности $p \geq L/\pi$. Тогда длина суммы векторов, проекции которых на выбранную прямую положительны, не меньше L/π. В самом деле, сумму этих векторов можно представить в виде суммы двух ортогональных векторов, длина одного из которых равна $p \geq L/\pi$.

К вычислению среднего значения длины проекции вектора можно подойти и по-другому. Этот новый подход интересен для нас тем, что таким же способом можно будет вычислить и среднее значение длины вектора в пространстве. Пусть на плоскости каждому углу φ сопоставлено число $f(\varphi)$. Тогда среднее значение функции f равно $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi$. Геометрический смысл этого интеграла следующий. Фиксируем на плоскости точку O и сопоставим каждому углу φ конец X единичного вектора $\overrightarrow{OX}$, направление которого соответствует углу φ. В результате каждому углу φ будет соответствовать точка окружности с центром O, причем разность двух углов будет равна длине соответствующей дуги. Разобьем окружность на мелкие дуги и рассмотрим сумму $\sum_k f(\varphi_k)\Delta l_k$, где φ_k — некоторая точка k-й дуги, Δl_k — длина этой дуги. При измельчении разбиения эта сумма стремится к $\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi$. Чтобы получить среднее значение функции f, этот интеграл нужно разделить на длину окружности, т.е. на 2π.

Теперь можно аналогичным образом определить среднее значение длины проекции вектора в пространстве. Фиксируем в пространстве точку O и сопоставим каждому направлению в пространстве конец X единичного вектора $\overrightarrow{OX}$, соответствующего этому направлению. В результате получим сферу радиуса 1 с центром O. Интересующая нас функция f равна длине проекции вектора $\vec{a}$ на луч OX. Чтобы определить ее среднее значение, нужно разбить сферу на достаточно мелкие области и рассмотреть сумму $\sum_k f(X_k)\Delta S_k$, где X_k — точка k-й области, ΔS_k — площадь этой области. Затем нужно вычислить предел таких сумм при измельчении разбиения и поделить этот предел на площадь поверхности сферы, т.е. на 4π. Вместо разбиения сферы на мелкие области можно также рассматривать выпуклые многогранники, достаточно хорошо приближающие данную сферу. При этом можно считать, что для грани M_k точка X_k определяется как конец вектора $\overrightarrow{OX}_k$, перпендикулярного M_k. В таком случае $f(X_k) = a\Delta S_k|\cos\varphi_k|$, где ΔS_k — площадь грани M_k, φ_k — угол между векторами $\vec{a}$ и $\overrightarrow{OX}_k$. Легко проверить, что $\Delta S_k|\cos\varphi_k| = \Delta S'_k$, где $\Delta S'_k$ — площадь проекции грани M_k на плоскость, ортогональную вектору $\vec{a}$. Таким образом, рассматриваемая сумма $\sum_k f(X_k)\Delta S_k$ равна сумме площадей проекций граней многогранника на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{a}$. В пределе эта сумма равна удвоенной площади сечения сферы плоскостью, проходящей через центр сферы. Таким образом, среднее значение длины проекции вектора $\vec{a}$ на прямые в пространстве равно $2aS_1/S_2$, где S_1 — площадь экваториального сечения сферы, S_2 — площадь поверхности сферы. Для сферы единичного радиуса $S_1 = \pi$ и $S_2 = 4\pi$, поэтому среднее значение равно $a/2$.

С помощью среднего значения длины вектора в пространстве теми же способами, которыми мы пользовались в случае плоскости, можно доказать следующие утверждения.

6. Если один выпуклый многогранник расположен внутри другого выпуклого многогранника, то площадь поверхности внутреннего многогранника меньше площади поверхности внешнего многогранника.

В данном случае мы каждой грани сопоставляем перпендикулярный ей вектор, длина которого равна площади грани.

7. Если площадь любой проекции выпуклого многогранника не превосходит 1, то площадь его поверхности не превосходит 4.

8. Пусть в пространстве даны векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, сумма длин которых равна L. Тогда среди них можно выбрать несколько векторов, длина суммы которых не *превосходит* $L/4$.

В заключение обсудим одно утверждение, которое можно было бы сформулировать и в случае плоскости, но оно более интересно в пространстве.

9. Пусть один тетраэдр расположен внутри другого тетраэдра. Тогда отношение суммы длин ребер внутреннего тетраэдра к сумме длин ребер внешнего тетраэдра не превосходит $4/3$, *причем это отношение может быть сколь угодно близко к* $4/3$. *(В частности, сумма длин ребер внутреннего тетраэдра может быть больше суммы длин ребер внешнего тетраэдра.)*

Мы докажем сразу более общее утверждение.

10. Пусть многогранник с m *вершинами расположен внутри многогранника с* n *вершинами. Тогда отношение суммы попарных расстояний между вершинами внутреннего многогранника к сумме попарных расстояний между вершинами внешнего многогранника не превосходит* $\frac{m^2}{4(n-1)}$ *при четном* m *и* $\frac{m^2-1}{4(n-1)}$ *при нечетном* m.

Это утверждение достаточно доказать для проекций многогранников на прямую. В случае прямой требуемое утверждение очевидным образом получается из следующей леммы.

Лемма. *Пусть на отрезке длиной* d *расположено* k *точек, причем концы отрезка входят в эту систему* k *точек. Тогда минимальная сумма попарных расстояний между данными точками равна* $(k-1)d$, *а максимальная сумма расстояний между точками равна* $k^2d/4$ *при четном* k *и* $(k^2-1)d/4$ *при нечетном* k.

Доказательство. Пусть A и B — концы рассматриваемого отрезка. Для любой точки X этого отрезка выполняется равенство $AX + BX = d$, поэтому сумма попарных расстояний между данными точками равна $(k-1)d + \Sigma$, где Σ — сумма попарных расстояний для системы из $k-2$ точек, которая получается из данной системы точек после выбрасывания точек A и B. Минимальное значение Σ равно 0; оно достигается в том случае, когда все $k-2$ точки сосредоточены в одном из концов отрезка AB. Максимальное значение Σ может получиться лишь в том случае, когда в новую систему из $k-2$ точек входят обе точки A и B (мы предполагаем, что $k-2 \geq 2$). Снова выбросим точки A и B и рассмотрим систему из $k-4$ точек и т.д. В итоге получаем, что если $k = 2s$, то сумма попарных расстояний максимальна в том случае, когда s точек расположены в одном конце отрезка и s точек расположены в другом конце отрезка; эта сумма равна $s^2d = k^2d/4$. Если же $k = 2s+1$, то в одном конце отрезка должно быть расположено s точек, а в другом $s+1$ точка; в этом случае сумма равна $s(s+1)d = (k^2-1)d/4$.

3. Изогонально сопряженные точки

С каждым треугольником ABC связано весьма интересное преобразование плоскости. Это преобразование устроено следующим образом. Пусть P — некоторая точка. Отразим прямые AP, BP и CP относительно биссектрис углов A, B и C

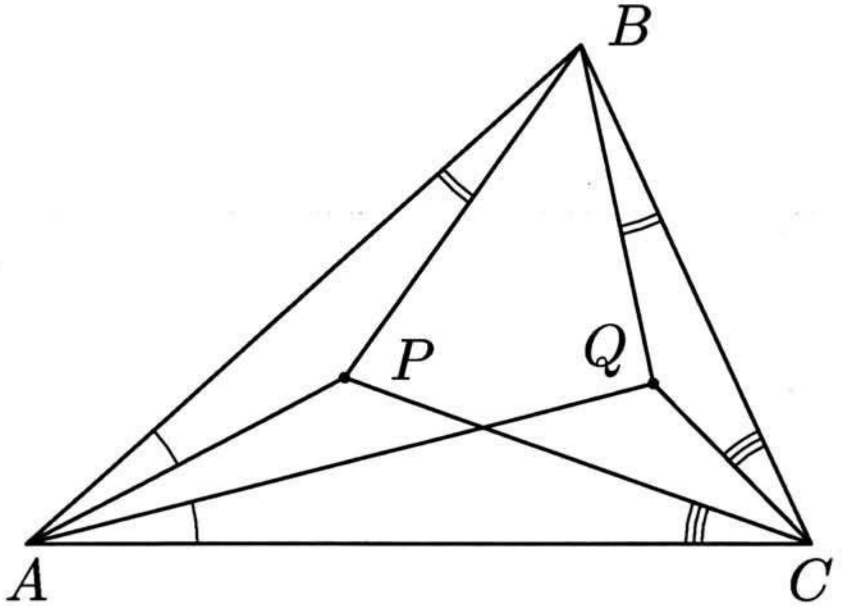

Рис. 2

соответственно. Полученные прямые пересекаются в одной точке Q (рис. 2). Для доказательства этого утверждения и для изучения свойств преобразования $P \mapsto Q$ удобно воспользоваться так называемыми трилинейными координатами, которые мы сейчас введем.

Пусть a, b, c — расстояния от точки X, лежащей внутри треугольника ABC, до сторон BC, CA, AB. Тогда набор чисел (a, b, c) называют *трилинейными координатами* точки X. При этом набор (a, b, c) рассматривается с точностью до пропорциональности, т.е. набор $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$, где $\lambda > 0$, соответствует той же самой точке, что и набор (a, b, c). В таком случае любой набор (a, b, c), где $a, b, c > 0$, однозначно задает внутреннюю точку треугольника ABC. В самом деле, множество точек с трилинейными координатами вида (a, b, x), где a и b — фиксированные числа, представляет собой отрезок CK, где K — некоторая точка стороны AB. При движении по этому отрезку величина a/x монотонно изменяется от 0 до ∞.

Трилинейные координаты можно определить не только для внутренних точек треугольника, но и для всех точек плоскости. Будем считать, что a, b, c — расстояния от точки X до прямых BC, CA, AB с учетом знака, т.е. $a > 0$, если точки X и A лежат по одну сторону от прямой BC, и $a < 0$, если точки X и A лежат по разные стороны от прямой BC; знаки чисел b и c определяются аналогично.

Множество точек с трилинейными координатами вида (a, b, x), где a и b — фиксированные числа, представляет собой прямую, проходящую через вершину C. При симметрии относительно биссектрисы угла C эта прямая переходит в прямую, состоящую из точек с трилинейными координатами вида (b, a, x) или, что то же самое, (a^{-1}, b^{-1}, y). Таким образом, если точка P имеет трилинейные координаты (a, b, c), то искомая точка Q однозначно определяется как точка с трилинейными координатами (a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}). В таком случае точки P и Q называют *изогонально сопряженными* относительно треугольника ABC.

Изогональное сопряжение имеет ровно четыре неподвижные точки (т.е. четыре точки, которые изогонально сопряжены сами с собой). Эти точки имеют трилинейные координаты $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$ и $(1,1,-1)$. Ясно, что первая из этих точек — центр вписанной окружности, а три другие точки — центры вневписанных окружностей.

Докажем теперь некоторые менее очевидные, но более интересные свойства изогонального сопряжения.

Теорема 1. *Центр описанной окружности и точка пересечения высот изогонально сопряжены.*

Доказательство. Пусть α, β, γ — углы треугольника ABC. Тогда его центр описанной окружности имеет трилинейные координаты $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Вычислим теперь трилинейные координаты точки пересечения высот H. Вычислим, например, длину отрезка HA_1, где A_1 — основание высоты, опущенной из вершины A. Ясно, что $HA_1 = BH\cos\gamma$ и $BH\sin\alpha = BC\cos\beta = 2R\sin\alpha\cos\beta$, где R — радиус описанной окружности. Поэтому $HA_1 = 2R\cos\beta\cos\gamma$. Это означает, что точка пересечения высот имеет трилинейные координаты $(1/\cos\alpha, 1/\cos\beta, 1/\cos\gamma)$.

Теорема 2. *Точка, для которой минимальна сумма квадратов расстояний до вершин, изогонально сопряжена с точкой, для которой минимальна сумма квадратов расстояний до сторон.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что точка, для которой минимальна сумма квадратов до вершин, — это точка пересечения медиан M. Доказательство этого утверждение основано на том, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$. В самом деле, из этого равенства следует, что если X — произвольная точка, то

$$\begin{gathered} XA^2 + XB^2 + XC^2 = \\ |\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MB}|^2 + |\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MC}|^2 = \\ 3XM^2 + 2(\overrightarrow{XM}, \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + MA^2 + MB^2 + MC^2 = \\ 3XM^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq MA^2 + MB^2 + MC^2. \end{gathered}$$

Легко проверить, что точка пересечения медиан имеет трилинейные координаты (a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}), где a, b, c — длины сторон треугольника. Это утверждение непосредственно следует из того, что площади треугольников AMB, BMC и CMA равны. Поэтому точка, изогонально сопряженная с точкой пересечения медиан, имеет трилинейные координаты (a, b, c).

Рассмотрим произвольную точку с трилинейными координатами (x, y, z). Расстояния от этой точки до сторон треугольника равны kx, ky, kz, где число k определяется соотношением $k(ax + by + cz) = 2S$ (S — площадь треугольника ABC). Таким образом, сумма квадратов расстояний от рассматриваемой точки до сторон равна $4S^2\frac{x^2+y^2+z^2}{(ax+by+cz)^2}$. Требуется доказать, что эта сумма минимальна в том случае, когда $(x, y, z) = (a, b, c)$, т.е.

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ax + by + cz)^2} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Доказательство последнего неравенства совсем несложно.

Теорема 3. *Описанная окружность треугольника изогонально сопряжена бесконечно удаленной прямой. Иными словами, если X — точка описанной окружности, а прямые a, b, c симметричны прямым AX, BX, CX относительно биссектрис углов A, B, C, то прямые a, b, c параллельны (рис. 3).*

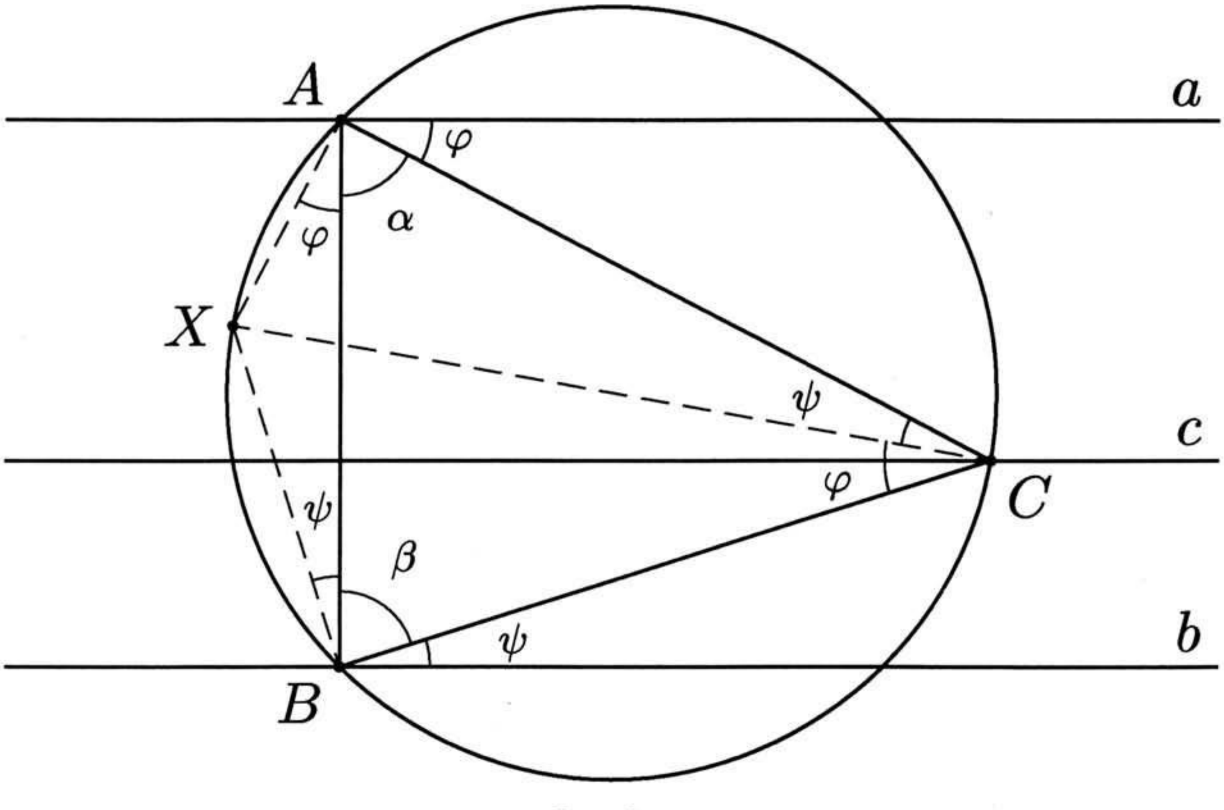

Рис. 3

Доказательство. Покажем, например, что сумма углов $\alpha+\varphi$ и $\beta+\psi$, которые отрезок AB образует с прямыми a и b, равна π. В самом деле, $\varphi+\psi = \gamma$, а $\alpha+\beta+\gamma = \pi$.

Замечание. Несложно доказать, что в трилинейных координатах бесконечно удаленная прямая и описанная окружность задаются соответственно уравнениями $ax + by + cz = 0$ и $ayz + bzx + cxy = 0$, где a, b, c — длины сторон треугольника.

Теорема 4. *Пусть все углы треугольника ABC меньше $120°$. Тогда точка, из которой все стороны треугольника ABC видны под углом $120°$ (точка Торричелли), изогонально сопряжена с точкой, проекции которой на стороны треугольника ABC образуют равносторонний треугольник.*

Доказательство. Точку Торричелли T можно построить следующим образом. Построим на сторонах треугольника ABC внешним образом правильные треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1. Тогда описанные окружности этих треугольников пересекаются в точке T. Из этого построения следует, что отрезки AC_1, C_1B, BA_1, A_1C, CB_1, B_1A видны из точки T под углом $60°$, поэтому T — точка пересечения отрезков AA_1, BB_1, CC_1. Теперь уже легко показать, что точка T имеет трилинейные координаты

$$\left(\frac{1}{\sin(60° + \alpha)}, \frac{1}{\sin(60° + \beta)}, \frac{1}{\sin(60° + \gamma)}\right).$$

В самом деле, расстояния от точки C_1 до прямых BC и CA равны $c\sin(60° + \beta)$ и $c\sin(60° + \alpha)$. Поэтому отношение расстояний от точки T до сторон BC и CA равно

$$\sin(60° + \beta) : \sin(60° + \alpha).$$

Итак, нужно доказать, что проекции на стороны треугольников ABC точки с трилинейными координатами

$$(\sin(60° + \alpha), \sin(60° + \beta), \sin(60° + \gamma))$$

образуют правильный треугольник. Для этого мы поступим следующим образом. Рассмотрим точку P, из которой стороны треугольника видны под углами $60° + \alpha$, $60° + \beta$, $60° + \gamma$, и покажем, что:

1) проекции A_1B_1, C_1 точки P на стороны треугольника ABC образуют правильный треугольник;

2) точка P имеет трилинейные координаты

$$(\sin(60° + \alpha), \sin(60° + \beta), \sin(60° + \gamma)).$$

Точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром CP. Поэтому

$$\angle PA_1B_1 = \angle PCB_1 = \angle PCA.$$

Аналогично $\angle PA_1C_1 = \angle PBA$. Поэтому

$$\angle B_1A_1C_1 = \angle PCA + \angle PBA = (\gamma - \angle PCB) + (\beta - \angle PBC) =$$

$$= \beta + \gamma + \angle BPC - 180° = 60°.$$

Аналогично доказывается, что и остальные углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны $60°$.

Чтобы вычислить трилинейные координаты точки P, заметим сначала, что

$$AP : BP : CP = \frac{1}{\sin(60° + \alpha)} : \frac{1}{\sin(60° + \beta)} : \frac{1}{\sin(60° + \gamma)}.$$

Дело в том, что по теореме синусов

$$B_1C_1 = AP \sin A_1PB_1 = AP \sin \alpha.$$

Кроме того, как мы уже убедились, $B_1C_1 = C_1A_1 = A_1B_1$. Ясно также, что $PA_1 \cdot BC = BP \cdot CP \sin(60^\circ + \alpha)$. Поэтому

$$PA_1 : PB_1 : PC_1 = \sin(60^\circ + \alpha) : \sin(60^\circ + \beta) : \sin(60^\circ + \gamma),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. [Морли]*Пусть вершины треугольника ABC расположены в комплексной плоскости на единичной окружности $|z| = 1$; пусть, далее, a, b, c — комплексные координаты этих вершин. Тогда точки p и q, изогонально сопряженные относительно треугольника ABC, связаны соотношением*

$$p + q + abc\bar{p}\bar{q} = a + b + c.$$

Доказательство. На комплексной плоскости биссектрисы внешнего и внутреннего углов между векторами z и w совпадают с биссектрисами внешнего и внутреннего углов между векторами z' и w' тогда и только тогда, когда

$$\frac{zw}{\bar{z}\bar{w}} = \frac{z'w'}{\bar{z}'\bar{w}'}.$$

Поэтому если лучи AP и AQ симметричны относительно биссектрисы угла A, то

$$\frac{(p-a)(q-a)}{(\bar{p}-\bar{a})(\bar{q}-\bar{a})} = \frac{(b-a)(c-a)}{(\bar{b}-\bar{a})(\bar{c}-\bar{a})}.$$

Выражение в правой части равенства равно a^2bc, так как $ab(\bar{b} - \bar{a}) = a - b$ и $ac(\bar{c} - \bar{a}) = a - c$. Следовательно,

$$pq - a(p+q) + a^2 = a^2bc\bar{p}\bar{q} - abc(\bar{p} + \bar{q}) + bc.$$

Аналогично получаем

$$pq - b(p+q) + b^2 = b^2ac\bar{p}\bar{q} - abc(\bar{p} + \bar{q}) + ac.$$

Рассмотрим разность этих двух равенств и сократим обе части на $a - b$. В результате получим требуемое равенство.

Теорема 6. *Пусть точки P_1 и P_2 изогонально сопряжены. Опустим из точки P_i перпендикуляры P_iA_i, P_iB_i, P_iC_i на стороны BC, CA, AB соответственно. Тогда описанные окружности треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ совпадают.*

Доказательство. Докажем, что точки B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности. В самом деле, $\angle P_1B_1C_1 = \angle P_1AC_1 = \angle P_2AB_2 = \angle P_2C_2B_2$, а так как $\angle P_1B_1A = \angle P_2C_2A$, то $\angle C_1B_1A = \angle B_2C_2A$. Центр окружности, на которой лежат указанные точки, является точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам B_1B_2 и C_1C_2, а оба эти перпендикуляра проходят через середину O отрезка P_1P_2, т.е. O — центр этой окружности. В частности, точки B_1 и C_1 равноудалены от точки O. Аналогично точки A_1 и B_1 равноудалены от точки O, т.е. O — центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, $OB_1 = OB_2$.

В том случае, когда P_1 — точка пересечения высот, а P_2 — центр описанной окружности, совпадение двух описанных окружностей означает, что основания высот треугольника и середины его сторон лежат на одной окружности (*окружность Эйлера*).

Более интересное утверждение получается в том случае, когда точка P_1 лежит на описанной окружности треугольника. В этом случае точка P_2 будет бесконечно удаленной. Это означает, что основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника из произвольной точки описанной окружности, лежат на окружности бесконечного радиуса, т.е. они лежат на одной прямой (эту прямую часто называют *прямой Симсона*, но более правильное название — *прямая Уоллеса*). Прямая Уоллеса для точки P_1 перпендикулярна направлению бесконечно удаленной точки P_2, т.е. она перпендикулярна тем прямым, которые получаются из прямых AP_1, BP_1, CP_1 при симметрии относительно биссектрис углов A, B, C. (Это утверждение эквивалентно тому, что окружность в каждой точке перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку; правда, в данном случае мы имеем дело с окружностью бесконечного радиуса.)

Приведем в заключение без доказательства еще одно свойство геометрических фигур, связанное с изогонально сопряженными точками.

Теорема 7. *Фокусы любого эллипса, вписанного в треугольник, изогонально сопряжены.*

4. Кубические кривые, связанные с треугольником

Каждому треугольнику можно многими разными способами сопоставить кубическую кривую, т.е. кривую, заданную уравнением вида

$$\sum_{i+j\leq 3} a_{ij}x^iy^j = 0.$$

Некоторые из таких кубических кривых обладают интересными геометрическими свойствами. Эти кубические кривые, или *кубики*, обычно называют по именам геометров, впервые их исследовавших: кубика Дарбу, кубика Томсона, кубика Нейберга, кубика Мак-Кэя.

Наиболее интересные свойства кубик, связанных с треугольником, так или иначе используют изогональное сопряжение относительно этого треугольника. Поэтому наше изложение будет опираться на свойства изогонального сопряжения, о которых шла речь в предыдущем рассказе. Мы будем также пользоваться введенными там трилинейными координатами. Несложно понять, что в трилинейных координатах (x, y, z) кубическая кривая задается уравнением вида

$$\sum_{i+j+k=3} c_{ijk}x^iy^jz^k = 0.$$

Первоначально кубики, связанные с треугольником, определялись посредством разнообразных геометрических конструкций. Но наиболее известные из этих кубик можно получить единой конструкцией.[2] Эта конструкция основывается на следующем утверждении.

Теорема. *Пусть на плоскости задана точка F. Для данного треугольника ABC рассмотрим всевозможные пары изогонально сопряженных точек P и Q, для которых прямая PQ проходит через точку F. Тогда точки P и Q заметают кубическую кривую, которая проходит через вершины треугольника, через центры вписанной и трех вневписанных окружностей, а также через саму точку F.*

Доказательство. Пусть точка F имеет трилинейные координаты (f_1, f_2, f_3). Если точка P имеет трилинейные координаты (x, y, z), то точка Q, изогонально сопряженная с ней, имеет трилинейные координаты (x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}), т.е. (yz, zx, xy). Поэтому условие, что точки P, Q, F лежат на одной прямой, запишется в виде

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = 0,$$

т.е.

$$f_1x(y^2 - z^2) + f_2y(z^2 - x^2) + f_3z(x^2 - y^2) = 0. \tag{1}$$

Легко проверить, что точка $F = (f_1, f_2, f_3)$, точки $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$ и точки $I = (1,1,1)$, $I_a = (-1,1,1)$, $I_b = (1,-1,1)$, $I_c = (1,1,-1)$ лежат на кривой, заданной уравнением (1), т.е. координаты указанных точек удовлетворяют этому уравнению.

Непосредственно из геометрического определения кривой (1) видно, что она переходит сама в себя при изогональном сопряжении. В самом деле, если точка P лежит на кривой (1), то изогонально сопряженная с ней точка Q тоже лежит на кривой (1).

Точку F, с помощью которой строится кубическая кривая (1), будем называть *центром вращения* для этой кривой.

Кубика Дарбу

Центром вращения для этой кривой служит точка $\tilde{H}$, симметричная точке пересечения высот H относительно центра описанной окружности O. Легко проверить, что точка $\tilde{H}$ имеет трилинейные координаты

$$(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma, \cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha, \cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta),$$

где α, β, γ — углы треугольника.

В трилинейных координатах кубика Дарбу задается уравнением

$$(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)x(y^2 - z^2) + \ldots = 0.$$

[2]H. M. Cundy, C. F. Parry. Some cubic curves associated with a triangle, **Journal of Geometry.** — 1995 — V. 53 — P. 41–66.

(Мы написали только коэффициент при $x(y^2 - z^2)$; коэффициенты при $y(z^2 - x^2)$ и при $z(x^2 - y^2)$ записываются очевидным образом.)

Кубика Дарбу проходит через следующие точки: ортоцентр и центр описанной окружности.

Кубика Дарбу допускает следующее геометрическое описание.

Теорема 1. *Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции точки D на прямые BC, CA, AB. Точка D лежит на кубике Дарбу тогда и только тогда, когда прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Согласно теореме Чевы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A,$$

где AC_1 и т.д. — ориентированные длины отрезков (т.е. числа AC_1 и C_1B имеют один и тот же знак, если точка C_1 лежит на отрезке AB, а если точка C_1 лежит вне отрезка AB, то эти числа имеют противоположные знаки).

Пусть (x, y, z) — нормированные трилинейные координаты точки D, т.е. x, y, z — расстояния от точки D до прямых BC, CA, AB с учетом знака. Легко проверить, что $AC_1 = \frac{z\cos\alpha + y}{\sin\alpha}$ и т.д. Поэтому прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$(z\cos\alpha + y)(y\cos\gamma + x)(x\cos\beta + z) =$$

$$= (z\cos\beta + x)(x\cos\gamma + y)(y\cos\alpha + z).$$

Полученное уравнение легко преобразуется в уравнение кубики Дарбу.

Замечание 1. Если равенство

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A$$

выполняется для некоторой точки D, то такое же равенство выполняется и для точки D', симметричной точке D относительно центра описанной окружности. Поэтому кубика Дарбу симметрична относительно центра описанной окружности.

Замечание 2. Несложно доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда существует кривая второго порядка, касающаяся сторон треугольника (или их продолжений) в точках A_1, B_1, C_1.

Кубика Томсона

Центром вращения для этой кривой служит центр масс M. Напомним, что центр масс треугольника имеет трилинейные координаты (bc, ca, ab).

В трилинейных координатах кубика Томсона задается уравнением

$$bcx(y^2 - z^2) + cay(z^2 - x^2) + abz(x^2 - y^2) = 0.$$

По-другому это уравнение можно записать в виде

$$(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)x(y^2 - z^2) + \ldots = 0.$$

Кубика Томсона проходит через следующие точки: ортоцентр и центр описанной окружности, середины сторон, середины высот.

Из замечания 2 к теореме 1 видно, что кубика Дарбу допускает следующее геометрическое описание. Рассмотрим всевозможные кривые второго порядка, касающиеся сторон данного треугольника или их продолжений. Выделим среди них те кривые второго порядка, для которых перпендикуляры к сторонам треугольника в точках касания пересекаются в одной точке. Тогда точки пересечения этих перпендикуляров заметают кубику Дарбу. Можно доказать, что центры выделенных таким образом кривых второго порядка заметают кубику Томсона.

Кубика Мак-Кэя

Центром вращения для этой кривой служит центр описанной окружности O. Напомним, что центр описанной окружности имеет трилинейные координаты $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

В трилинейных координатах кубика Мак-Кэя задается уравнением

$$\cos\alpha x(y^2 - z^2) + \cos\beta y(z^2 - x^2) + \cos\gamma z(x^2 - y^2) = 0.$$

Кубика Мак-Кэя проходит через следующие точки: ортоцентр и центр описанной окружности.

Теорема 2. *Пусть вершины треугольника расположены в точках a, b, c единичной окружности на комплексной плоскости. Точка, соответствующая комплексному числу z, лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$(z - a)(z - b)(z - c) = abc(a\bar{z} - 1)(b\bar{z} - 1)(c\bar{z} - 1).$$

Доказательство. Пусть точки z и w изогонально сопряжены относительно данного треугольника. Тогда согласно теореме Морли (теорема 5 из предыдущего рассказа) точки z и w связаны соотношением

$$z + w + abc\bar{z}\bar{w} = a + b + c. \tag{2}$$

Следовательно,

$$\bar{z} + \bar{w} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}zw = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}. \tag{3}$$

Умножим обе части соотношения (3) на $abc\bar{z}$ и вычтем из полученного выражение соотношение (2). В результате получим

$$w = \frac{a + b + c - z - (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - \bar{z})abc\bar{z}}{1 - |abcz|^2}. \tag{4}$$

По определению кубики Мак-Кэя прямая zw проходит через центр описанной окружности, т.е. через начало координат. Это означает, что $w/\bar{w} = z/\bar{z}$. Выразив $w/\bar{w}$ с помощью соотношения (4), после несложных преобразований получим требуемое уравнение.

Следствие. *Кубика Мак-Кэя пересекает описанную окружность треугольника в трех точках, являющихся вершинами правильного треугольника.* (Мы учитываем только точки пересечения, отличные от вершин исходного треугольника.)

Доказательство. Будем считать, что вершины треугольника расположены в точках единичной окружности на комплексной плоскости. Тогда для точки z, лежащей на описанной окружности треугольника, выполняется равенство $\bar{z} = z^{-1}$. Поэтому точки пересечения кубики Мак-Кэя с описанной окружностью удовлетворяют уравнению

$$(z-a)(z-b)(z-c) = -z^{-3}abc(z-a)(z-b)(z-c).$$

Если исключить вершины треугольника, то останутся точки, удовлетворяющие соотношению $z^3 = -abc$. Эти точки образуют правильный треугольник.

Будем считать, что $\angle PQR$ — величина угла, на который нужно повернуть против часовой стрелки вектор $\overrightarrow{QP}$ так, чтобы он стал сонаправлен с вектором $\overrightarrow{QR}$.

Теорема 4. *Точка M лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда*

$$\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Доказательство. Снова будем считать, что вершины треугольника расположены на единичной окружности на комплексной плоскости. Положим $\alpha = \angle MAB$, $\beta = \angle MBC$, $\gamma = \angle MCA$. Пусть z — комплексное число, соответствующее точке M. Тогда

$$\frac{b-a}{z-a}\cdot\frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}} = e^{2i\alpha}, \quad \text{т.е.} \quad e^{2i\alpha} = -b\frac{a\bar{z}-1}{z-a}.$$

Поэтому

$$e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)} = -abc\frac{(a\bar{z}-1)(b\bar{z}-1)(c\bar{z}-1)}{(z-a)(z-b)(z-c)}.$$

Таким образом, точка z лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда $e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)} = -1$, т.е. $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Легко проверить, что

$$\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA + \angle MAC + \angle MCB + \angle MBA =$$

$$= (2n+1)\pi.$$

Поэтому точка M лежит на кубике Мак-Кэя тогда и только тогда, когда

$$\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA = \angle MAC + \angle MCB + \angle MBA + 2l\pi.$$

Кубика Нейберга

Центром вращения для этой кривой служит бесконечно удаленная точка прямой OH. Иными словами, кубика Нейберга состоит из таких пар изогонально сопряженных точек P и Q, что прямая PQ параллельна прямой OH.

В трилинейных координатах кубика Нейберга задается уравнением

$$(\cos\alpha - 2\cos\beta\cos\gamma)x(y^2 - z^2) + \ldots = 0.$$

Кубика Нейберга является бесспорным лидером по количеству замечательных точек треугольника, через которые она проходит. Действительно, эта кривая проходит через следующие точки: центр описанной окружности; ортоцентр; вершины правильных треугольников, построенных на сторонах треугольника ABC (как внешним, так и внутренним образом); точки, симметричные вершинам треугольника ABC относительно его сторон; две точки, из которых стороны треугольника ABC видны под углом 60° или 120° (изогональные центры треугольника); две точки, для которых выполняется соотношение $AX \cdot BC = BX \cdot CA = CX \cdot AB$ (изодинамические центры треугольника).

Издательство “Фазис” активно выпускает математическую литературу для школьников, учителей, студентов и преподавателей ВУЗов. Адрес для корреспонденции: 123557 Москва, Пресненский вал, 42-44.

E-mail: phasis@aha.ru