Рукопись представлена Казанск. ун-том. Деп. в ВИНИТИ 22 декабря 1978 г., № 3889 - 78.

10. Т у м а ш е в Г.Г., Н у ж и н М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения.- Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1965. - 333 с.

11. Г а х о в Ф.Д. Краевые задачи.- М.: Наука, 1977. - 640 с.

12. Г р а д ш т е й н И.С., Р ы ж и к И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.- М.: Физматгиз: 1963,- 1100 с.

13. Paatero V. Über die konforme Abbildung von Gebieten, deren Ränder von beschränkter Drehung sind.- Acad. Abh. Helsinki, 1931.

14. Kaplan W. Close-to-convex schlicht functions.— Michigan Math. J., 1952, v. 1, N2, p. 169 - 185.

15. А к с е н т ь е в Л.А. Об условиях разрешимости и условиях однолистности.- В сб.: Тр. семинара по обратным краевым задачам, вып.2. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1964, с. 12 - 20.

16. Н е ж м е т д и н о в И.Р. Геометрические свойства решений обратных краевых задач: Автореф. дис. ...канд.физ-мат. наук. Казань, 1979.- 14 с.

17. М и к к а В. П. Два достаточных условия однолистности аналитических функций.- Мат.заметки, 1976, т.19, вып.3, с. 331 - 346.

И.Р.Нежметдинов

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ В КРУГЕ

Пусть функция $g(z)=g(re^{i\theta})=p(r,\theta)+i\,q(r,\theta)$ регулярна в круге $|z|<1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$, $g(0)=0$. Обозначим через $p(\theta)$ и $q(\theta)$ граничные значения функций $p(r,\theta)$ и $q(r,\theta)$ соответственно. В статье Н.П.Корнейчука [1] были получены точные оценки нормы $\|p\|_C = \sup\limits_{\theta}|p(\theta)|$ при условии, что модуль непрерывности $p(\theta)$ —

$-\omega(\rho;\tau)=\sup_{|\theta_1-\theta_2|\le\tau}|\rho(\theta_1)-\rho(\theta_2)|$ не превосходит заданной функции $\omega(\tau)$. При тех же предположениях точную оценку $\|q\|_C$ нашли независимо друг от друга Ф.Г.Авхадиев [2] и В.Ф.Бабенко [3]. Далее будут получены обобщения этих результатов, позволяющие учесть возможную асимметрию в изменении функции $\rho(\theta)$.

Определим односторонние модули непрерывности функции $\rho(\theta)$ как

$$\omega^{\pm}(\rho;\tau)=\sup_{0\le\theta_1-\theta_2\le\tau}\{\pm[\rho(\theta_1)-\rho(\theta_2)]\}. \qquad (1)$$

Если $\rho(\theta)$ – непрерывная 2π – периодическая функция, то функции $\omega^{\pm}(\rho;\tau)$ определены при всех $\tau\ge 0$ и обладают следующими свойствами:

1) $\omega^{\pm}(\rho;\tau)$ не убывают по τ, $\omega^{\pm}(\rho;0)=0$,

2) $\omega^{\pm}(\rho;\tau)$ равномерно непрерывны на $0\le\tau<+\infty$,

3) для всех $\tau\ge 2\pi$ имеем $\omega^{\pm}(\rho;\tau)=\omega^{\pm}(\rho;2\pi)$,

4) для всех $\tau_1,\tau_2\ge 0$ $\omega^{\pm}(\rho;\tau_1+\tau_2)\le\omega^{\pm}(\rho;\tau_1)+\omega^{\pm}(\rho;\tau_2)$.

Эти свойства можно доказать аналогично свойствам модуля непрерывности (см., например, [4, с.108, 109]). Так же, как и в [4], можно заметить, что для любых функций $\omega^+(\tau),\omega^-(\tau)$, обладающих свойствами 1), 2) и 4), найдутся функции $\rho^+(\theta),\rho^-(\theta)$ такие, что $\omega^{\pm}(\rho^{\pm};\tau)=\omega^{\pm}(\tau)$, $0\le\tau\le 2\pi$. При этом функции $\rho^+(\theta)$ и $\rho^-(\theta)$ совпадают только тогда, когда $\omega^+(\tau)=\omega^-(\tau)$.

Обозначим через $\overset{\circ}{H}_{\omega^+,\omega^-}$ класс 2π – периодических функций $\rho(\theta)$ таких, что $\int_{-\pi}^{\pi}\rho(\theta)d\theta=0$ и $\omega^{\pm}(\rho;\tau)\le\omega^{\pm}(\tau)$, где $\omega^{\pm}(\tau)$ – заданные функции, удовлетворяющие условиям 1)–4). Установим точную оценку нормы $\|\rho\|_C$ на классе $\overset{\circ}{H}_{\omega^+,\omega^-}$.

Т е о р е м а I. Пусть $\rho(\theta)\in\overset{\circ}{H}_{\omega^+,\omega^-}$. Тогда справедлива точная оценка

$$|\rho(\varphi)|\le A(\omega^+,\omega^-)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\varkappa_0}\omega^-(\tau)d\tau+\int_0^{2\pi-2\varkappa_0}\omega^+(\tau)d\tau\right],$$

где $\varkappa_0$, $0\le\varkappa_0\le\pi$ – корень уравнения

$$\omega^-(2\varkappa_0)=\omega^+(2\pi-2\varkappa_0). \qquad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Шварца [5, с.153]

$$g(re^{i\varphi})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho(\theta)(e^{i\theta}+z)(e^{i\theta}-z)^{-1}d\theta\,,\quad z=re^{i\varphi}\,, \tag{4}$$

откуда с учетом (2) и после замены $\tau=\theta-\varphi$ получим, что

$$\rho(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho(\varphi+\tau)\,a_0(r,\tau)\,d\tau\,, \tag{5}$$

где
$$a_m(r,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-m}r^{n}\cos n\tau\,,\quad a_0(r,\tau)=(r\cos\tau-r^2)(1-2r\cos\tau+r^2)^{-1}.$$

Используя 2π –периодичность подынтегральной функции, формулу (5) можно записать так:

$$\rho(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\gamma}^{2\pi-\gamma}\rho(\varphi+\tau)\,a_0(r,\tau)\,d\tau\,,\quad \text{где}\quad \gamma=\arccos r\,.$$

Заметим, что на интервале $(-\gamma,2\pi-\gamma)$ функция $a_0(r,\tau)$ имеет лишь единственный нуль $\tau=\gamma$, причем

$$a_0(r,\tau)\begin{cases}>0 & \text{при}\quad -\gamma<\tau<\gamma\,,\\ <0 & \text{при}\quad \gamma<\tau<2\pi-\gamma\,.\end{cases}$$

Рассуждая, как при доказательстве леммы 1 из статьи [1], получим следующее представление:

$$\rho(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\gamma}^{\gamma}\left[\rho(\varphi+\tau)-\rho(\varphi+\eta(\tau))\right]a_0(r,\tau)\,d\tau\,, \tag{6}$$

в котором функция $\eta(\tau)$ определяется из уравнения

$$\int_{\tau}^{\eta(\tau)}a_0(r,\tau)\,d\tau=0\,,\quad -\gamma\le\tau\le\gamma\,,\quad \gamma\le\eta(\tau)\le 2\pi-\gamma\,. \tag{7}$$

Подставляя выражение $\int a_0(r,\tau)\,d\tau=\operatorname{arctg}\frac{r\sin\tau}{1-r\cos\tau}+C$ в (7), находим

$$\eta(\tau)=\begin{cases}2\operatorname{arctg}\left[(1-r)(1+r)^{-1}\operatorname{ctg}(\tau/2)\right] & \text{при}\quad 0\le\tau\le\gamma\,,\\ 2\pi-\eta(-\tau) & \text{при}\quad -\gamma\le\tau\le 0\,.\end{cases}$$

Очевидно, $\tau\le\eta(\tau)\le\tau+2\pi$, и по определению (1) будем иметь

$$\rho(\varphi+\tau)-\rho(\varphi+\eta(\tau))\le\omega^{-}[\eta(\tau)-\tau]\,, \tag{8}$$

$$\rho(\varphi+\tau)-\rho(\varphi+\eta(\tau))=\rho(\varphi+\tau+2\pi)-\rho(\varphi+\eta(\tau))\le\omega^{+}[2\pi-\eta(\tau)+\tau]\,. \tag{9}$$

Используя представление (6), с учетом оценок (8) и (9) получим

$$\rho(r,\varphi) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\gamma}^{\gamma} \min\left[\omega^-(2\varkappa(\tau));\,\omega^+(2\pi-2\varkappa(\tau))\right] a_0(r,\tau)\,d\tau\,, \qquad (10)$$

где $\varkappa(\tau) = \frac{1}{2}\left[t(\tau)-\tau\right] = \operatorname{arctg}\left[(\cos\tau - r)/\sin\tau\right]$ при $0 \le \tau \le \gamma$,

$\varkappa(\tau) = \pi - \varkappa(-\tau)$ при $-\gamma \le \tau \le 0$.

Поскольку $\varkappa'(\tau) = -1 - a_0(r,\tau) < 0\,,\ -\gamma \le \tau \le \gamma\,,$ (11) $\varkappa(\tau)$ монотонно убывает на отрезке $-\gamma \le \tau \le \gamma$, причём $\varkappa(-\gamma) = \pi$ и $\varkappa(\gamma) = 0$. Отсюда

$$\min\left[\omega^-(2\varkappa(\tau));\,\omega^+(2\pi-2\varkappa(\tau))\right] = \begin{cases} \omega^-(2\varkappa(\tau))\,, & \text{если } \sigma \le \tau \le \gamma\,,\\ \omega^+(2\pi-2\varkappa(\tau))\,, & \text{если } -\gamma \le \tau \le \sigma\,,\end{cases}$$

где σ – корень уравнения $\varkappa(\sigma) = \varkappa_0$. С учетом равенства (11) правую часть в оценке (10) можно преобразовать так:

$$\rho(r,\varphi) \le \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\gamma}^{\sigma} \omega^+[2\pi-2\varkappa(\tau)]\,(-1-\varkappa'(\tau))\,d\tau\ + \right.$$

$$+\left.\int_{\sigma}^{\gamma}\omega^-[2\varkappa(\tau)]\,(-1-\varkappa'(\tau))\,d\tau\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi-2\varkappa_0}\omega^+(\tau)\,d\tau\ + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^{2\varkappa_0}\omega^-(\tau)\,d\tau - \int_{-\gamma}^{\sigma}\omega^+[2\pi-2\varkappa(\tau)]\,d\tau - \int_{\sigma}^{\gamma}\omega^-[2\varkappa(\tau)]\,d\tau\right\}.$$

Так как при $r \to 1$ $\gamma = \arccos r \to 0$, то и $\sigma \to 0$, откуда в пределе получим

$$\rho(\varphi) \le \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi-2\varkappa_0}\omega^+(\tau)\,d\tau + \int_0^{2\varkappa_0}\omega^-(\tau)\,d\tau\right].$$

Оценка $\rho(\varphi)$ снизу доказывается аналогично.

Полагая в теореме 1 $\omega^+(\tau) = \min\,(L\tau\,,\,M)$, $\omega^-(\tau) = \min(K\tau, M)$, получаем

С л е д с т в и е 1. Если 2π-периодическая функция $\rho(\theta)$ дифференцируема, удовлетворяет условию (2), $-K \le \rho'(\theta) \le L$ при всех θ и $|\rho(\theta_1) - \rho(\theta_2)| \le M$ при всех θ_1, θ_2, то справедлива точная оценка:

$$|\rho(\varphi)| \le \begin{cases} \pi KL/(K+L) & \text{, если } M \ge 2\pi KL/(K+L),\\ M[1-M(K+L)/4KL & \text{, если } M < 2\pi KL/(K+L).\end{cases}$$

Отсюда при $K=L,\ M \geqslant \pi K$ получается результат Ф.Г.Авхадиева [6]: $|p(\varphi)| \leqslant \pi K/2$, а при $L \to +\infty$, $M \geqslant 2\pi K$ следует, что $|p(\varphi)| \leqslant \pi K$, что улучшает оценку из статьи автора [7] (неограниченную при $r \to 1$).

Теперь установим точные оценки для производных $p'_\varphi(r,\varphi)$ и $q'_\varphi(r,\varphi)$.

Т е о р е м а 2. Пусть функция $p(\theta) \in \overset{\circ}{H}_{\omega^+,\omega^-}$. Тогда справедливы точные оценки

$$-A^-(1,\omega^+,\omega^-;r) \leqslant p'_\varphi(r,\varphi) \leqslant A^+(1,\omega^+,\omega^-;r), \tag{12}$$

$$|q'_\varphi(r,\varphi)| \leqslant B(1,\omega^+,\omega^-;r), \tag{13}$$

в которых постоянные равны

$$A^+(1,\omega^+,\omega^-;r) = \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi-\varkappa_0} \omega^+(2\tau)\, b_{-1}(r,\tau)\,d\tau + \int_0^{\varkappa_0} \omega^-(2\tau)\, b_{-1}(r,\pi-\tau)\,d\tau\Big],$$

$$A^-(1,\omega^+,\omega^-;r) = A^+(1,\omega^-,\omega^+;r),$$

$$B(1,\omega^+,\omega^-;r) = \frac{1}{\pi}\Big\{\int_{\sigma_1}^{\gamma_1} \omega^-[2\varkappa_1(\tau)]\, a_{-1}(r,\tau)\,d\tau + \int_{-\sigma_1}^{\gamma_1} \omega^+[2\varkappa_1(\tau)]\, a_{-1}(r,\tau)\,d\tau\Big\}.$$

Здесь $a_{-1}(r,\tau) = r[(1+r^2)\cos\tau - 2r](1-2r\cos\tau + r^2)^{-2}$,

$$b_{-1}(r,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} n r^n \sin n\tau = r(1-r^2)\sin\tau\,(1-2r\cos\tau + r^2)^{-2},$$

$\gamma_1 = \arccos[2r(1+r^2)^{-1}]$, а величина σ_1 определяется из уравнения $\varkappa_1(\sigma_1) = \varkappa_0$ ($\varkappa_0$ – корень уравнения (3)), в котором $\varkappa_1(\tau) = \operatorname{arctg}\{[(1+r^2)\cos\tau - 2r]/(1+r^2)\sin\tau\}$ при $0 \leqslant \tau \leqslant \gamma_1$, и $\varkappa_1(\tau) = \pi - \varkappa_1(-\tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя по φ в формуле (4), получим следующее представление:

$$p'_\varphi(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(\theta)\, \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}[in r^n e^{in(\varphi-\theta)}]\,d\theta.$$

Применяя методику их доказательства леммы I статьи [8] (замены $\tau = \theta - \varphi$ и $\tau = -\tau$), можно привести его к виду

$$p'_\varphi(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[p(\varphi+\tau) - p(\varphi-\tau)]\, b_{-1}(r,\tau)\,d\tau.$$

Поскольку $b_{-1}(r,\tau) \geqslant 0$ при $0 \leqslant \tau \leqslant \pi$, отсюда и получаем оценки (12).

Для функции $q'_\varphi(r,\varphi)$ по аналогии с доказательством теоремы I получаем представление

$$q'_\varphi(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho(\theta)\,\mathrm{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\left[inr^n e^{in(\varphi-\theta)}\right]d\theta=\frac{1}{\pi}\int_{-\gamma_1}^{2\pi-\gamma_1}\rho(\varphi+\tau)\,a_{-1}(r,\tau)\,d\tau=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\gamma_1}^{\gamma_1}\left[\rho(\varphi+\tau)-\rho(\varphi+\eta_1(\tau))\right]a_{-1}(r,\tau)\,d\tau, \tag{14}$$

в котором функция $\eta_1(\tau)$ определяется из уравнения

$$\int_{\tau}^{\eta_1(\tau)}a_{-1}(r,\tau)\,d\tau=0\quad,\quad -\gamma_1\le\tau\le\gamma_1\ ,\ \gamma_1\le\eta_1(\tau)\le 2\pi-\gamma_1 .$$

Решая это уравнение, получим

$$\eta_1(\tau)=\begin{cases}2\,\mathrm{arctg}\left[(1-r)^2(1+r)^{-2}\,\mathrm{ctg}(\tau/2)\right] & \text{при}\quad 0\le\tau\le\gamma_1,\\ 2\pi-\eta_1(-\tau) & \text{при}\quad -\gamma_1\le\tau\le 0 .\end{cases}$$

На промежутке $-\gamma_1\le\tau\le\gamma_1$ $\quad a_{-1}(r,\tau)\ge 0$, откуда с учетом условия $\rho\in \overset{\circ}{H}_{\omega^+,\omega^-}$ из формулы (14) следует оценка

$$|q'_\varphi(r,\varphi)|\le\frac{1}{\pi}\int_{-\gamma_1}^{\gamma_1}\min\left\{\omega^-[2\varkappa_1(\tau)],\ \omega^+[2\varkappa_1(-\tau)]\right\}a_{-1}(r,\tau)\,d\tau ,$$

где $\varkappa_1(\tau)=\frac{1}{2}[\eta_1(\tau)-\tau]$ – убывающая функция, $\varkappa_1(-\gamma_1)=\pi$, $\varkappa_1(\gamma_1)=0$. В силу монотонности $\omega^\pm(\tau)$

$$\min\left\{\omega^-[2\varkappa_1(\tau)],\omega^+[2\varkappa_1(-\tau)]\right\}=\begin{cases}\omega^-[2\varkappa_1(\tau)] & ,\text{если}\quad \sigma_1\le\tau\le\gamma_1,\\ \omega^+[2\varkappa_1(-\tau)] & ,\text{если}\quad -\gamma_1\le\tau\le\sigma_1,\end{cases}$$

следовательно,

$$|q'_\varphi(r,\varphi)|\le\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\gamma_1}^{\sigma_1}\omega^+[2\varkappa_1(-\tau)]\,a_{-1}(r,\tau)\,d\tau+\int_{\sigma_1}^{\gamma_1}\omega^-[2\varkappa_1(\tau)]\,a_{-1}(r,\tau)\,d\tau\right\},$$

откуда после замены $\tau'=-\tau$ в первом интеграле и получаем оценку (13).

З а м е ч а н и е. Оценки (12) и (13) обе точные, однако если $\omega^+(\tau)\not\equiv\omega^-(\tau)$, то, вообще говоря, не существует такой функции $\rho_0(\theta)$, для которой достигались бы обе оценки в (12). Исключение представляет случай, когда $\omega^+(\tau)$ или $\omega^-(\tau)$ обращается в ∞ . Для оценок (13) экстремальная функция всегда существует.

С л е д с т в и е 2. В предположениях следствия 1 справедливы оценки (12) и (13) с постоянными

$$A_M^+(1, L\tau, K\tau; r) = \frac{2}{\pi}(K+L)\operatorname{arctg}\{(1+r)(1-r)^{-1}\operatorname{ctg}[\pi L/2(K+L)]\}-K,$$

$$B_M(1, L\tau, K\tau; r) = \frac{1}{\pi}(K+L)\Lambda(\pi K/(K+L); r), \text{ если } M \geq 2\pi KL/(K+L),$$

и

$$A_M^+(1, L\tau, K\tau; r) = \frac{2L}{\pi}\operatorname{arctg}[(1+r)(1-r)^{-1}\operatorname{tg}(M/4L)] - \frac{2K}{\pi}\operatorname{arctg}[(1-r)(1+r)^{-1}\operatorname{tg}(M/4K)],$$

$$B_M(1, L\tau, K\tau; r) = \frac{K}{\pi}\Lambda(M/2K; r) + \frac{L}{\pi}\Lambda(M/2L; r), \text{ если } M < 2\pi KL/(K+L),$$

где $\Lambda(\alpha; r) = \ln\{(1-r^2)[\sqrt{(1-r^2)^2+4r^2\sin^2\alpha} - 2r\sin\alpha]^{-1}\}$.

Отсюда при $K=L$, $M \geq \pi K$ получается результат Ф.Г.Авхадиева [6] для случая $n=1$, а при $L \to +\infty$, $M \geq 2\pi K$ – результат автора из статьи [7].

В случае производных высших порядков применяемая здесь методика может давать оценки, справедливые лишь в некотором круге радиуса меньше 1. Так, например, $\ell_{-2}(r,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^n \sin n\tau =$

$$= r\sin\tau\,[1-6r^2+r^4+2r(1+r^2)\cos\tau]\,(1-2r\cos\tau+r^2)^{-3}$$

сохраняет знак на промежутке $0 \leq \tau \leq \pi$ лишь при условии, что $r \leq 2-\sqrt{3}$. Поэтому справедлива следующая

Т е о р е м а 3. Пусть $p(\theta) \in \overset{\circ}{H}_{\omega^+,\omega^-}$ – граничное значение функции $p(r,\varphi)$, гармонической в круге $|z|<1$. Если $q(r,\varphi)$ – сопряженная к p гармоническая функция, то

$$-B^-(2, \omega^+, \omega^-; r) \leq q''_{\varphi\varphi}(r,\varphi) \leq B^+(2, \omega^+, \omega^-; r),$$

где $r \leq 2-\sqrt{3}$, а постоянные равны

$$B^+(2, \omega^+, \omega^-; r) = \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{\pi-\varkappa_0}\omega^+(2\tau)\,\ell_{-2}(r,\tau)\,d\tau + \int_0^{\varkappa_0}\omega^-(2\tau)\,\ell_{-2}(r,\pi-\tau)\,d\tau\Big],$$

$$B^-(2, \omega^+, \omega^-; r) = B^+(2, \omega^-, \omega^+; r).$$

В предположениях следствий 1 и 2 эти постоянные можно вычислить:

$$B_M^+(2, L\tau, K\tau; r) = \frac{2r(K+L)}{\pi}\,\frac{\sin[\pi K/(K+L)]}{1-2r\cos[\pi K/(K+L)]+r^2},$$

если $M \geq 2\pi KL/(K+L)$ и $B_M^+(2, L\tau, K\tau; r) =$

$$= \frac{2r}{\pi}\Big[\frac{K\sin(M/2K)}{1+2r\cos(M/2K)+r^2} + \frac{L\sin(M/2L)}{1-2r\cos(M/2L)+r^2}\Big],$$

если $M < 2\pi KL/(K+L)$.

Полученные выше результаты могут быть применены к проблеме однолистной разрешимости обратных краевых задач (ОКЗ). Решение внутренней основной ОКЗ имеет вид [9, с. 31,32]

$$f(z)=\int_0^z \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\rho(\theta)(e^{i\theta}+z')(e^{i\theta}-z')^{-1}d\theta\right]dz' . \qquad (16)$$

Т е о р е м а 4. Пусть $\rho(\theta)\in \overset{\circ}{H}_{\omega^+,\omega^-}$, причем $A(\omega^+,\omega^-)<\pi/2$. Тогда решение ОКЗ, представляемое формулой (16), будет однолистно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из представления (16) следует, что $\rho(\theta)=\operatorname{Re}\ln f'(e^{i\theta})$, и в силу теоремы 1 имеем

$$|\operatorname{Re}\ln f'(e^{i\theta})|\le A(\omega^+,\omega^-)<\pi/2 .$$

Отсюда по теореме 34 из обзора [10] функция $f(z)$ однолистна.

Т е о р е м а 5. Если $\rho(\theta)$ дифференцируема, $\rho'(\theta)\in \overset{\circ}{H}_{\omega_1^+,\omega_1^-}$, причем $A(\omega_1^+,\omega_1^-)<2,42$ (постоянная $\widetilde{N}(1)$ из статьи В.И.Гайдука [11]), то $f(z)$, представляемая формулрй (16), будет однолистна и почти выпукла в круге $|z|\le 1$.

Доказывается аналогично с использованием условия почти выпуклости из статьи [11].

Л и т е р а т у р а

1. К о р н е й ч у к Н.П. Об экстремальных свойствах периодических функций.– Доклады АН УССР, 1962, № 8, с. 993 – – 998.

2. А в х а д и е в Ф.Г. К слабой и сильной проблемам однолистности в обратных краевых задачах.– Тр.семинара по краевым задачам, вып.10.– Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1973, с.3 – 10.

3. Б а б е н к о В.Ф. Точные оценки для норм функций из сопряженных классов в метриках C и L.– В сб.: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям, вып.4.– Днепропетровск: Изд-во Днепропетровского ун-та, 1972, с.3 – 5.

4. Т и м а н А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного.– М.: Физматгиз, 1960.– 624 с.

5. М а р к у ш е в и ч А.И. Теория аналитических функций, т.2.- М.: Наука, 1968.- 624 с.

6. А в х а д и е в Ф.Г. Радиусы выпуклости и почти выпуклости некоторых интегральных представлений.- Матем. заметки, 1970, т.7, № 5, с. 581 - 592.

7. Н е ж м е т д и н о в И.Р. Геометрические свойства решений основных обратных краевых задач.- Казань, 1978.- 18с.- Рукопись представлена Казанским университетом. Деп. в ВИНИТИ 22 декабря 1978 г., № 3889 - 78.

8. А к с е н т ь е в Л.А. Точные оценки для гармонических в круге функций.- Изв.вузов. Матем., 1968, № 3, с.3 - 8.

9. Т у м а ш е в Г.Г., Н у ж и н М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения.- Казань: Изд-во Казанского ун-та,1965.- 333 с.

10. А в х а д и е в Ф.Г., А к с е н т ь е в Л.А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности.- УМН,1975, т.30, вып. 4, с.3 - 60.

11. Г а й д у к В.Н. Об однолистности решений обратных краевых задач.- Тр.семинара по краевым задачам, вып.9.- Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1972, с. 39 - 48.

Н.В.Трунов

ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫЕ ВЕСА НА АЛГЕБРАХ НЕЙМАНА И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

В работе продолжается изучение одного специального класса нормальных весов на алгебрах Неймана, введенного автором в [3] в связи с задачами некоммутативного интегрирования.В схеме интегрирования в духе [2] относительно весов этого класса, названных в [3] локально конечными, удалось получить эффективные теоремы типа Радона-Никодима [3, 5] , причем условие локальной конечности оказывается для этого фактически необходимым.

Работа состоит их трех параграфов. В § 1 собраны необходимые предварительные сведения. В § 2 получен новый критерий