М. Ш. Бирман, Дискретный спектр в лакунах возмущенного периодического оператора Шредингера. II. Нерегулярные возмущения,
Алгебра и анализ, 1997, том 9, выпуск 6, 62–89

https://www.mathnet.ru/aa885

Алгебра и анализ
Том 9 (1997), вып. 6

Памяти дорогого
Марка Григорьевича Крейна

ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР В ЛАКУНАХ ВОЗМУЩЕННОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА. II. НЕРЕГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

© М. Ш. Бирман

Введение

Изучается дискретный спектр в спектральных лакунах возмущенного $\mathbb{Z}^d$-периодического эллиптического оператора второго порядка

$$A = -\operatorname{div} g(x) \operatorname{grad} + p(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{0.1}$$

Случай постоянной матрицы g отвечает оператору Шредингера. Возмущенное семейство операторов имеет вид

$$A_\pm(\alpha) = A \mp \alpha V(x), \quad V(x) \geqslant 0, \ \alpha > 0. \tag{0.2}$$

Потенциал $V(x)$ стремится (в подходящем смысле) к нулю при $|x| \to \infty$.

Пусть $\Lambda = (\lambda_-, \lambda_+)$ — лакуна в спектре A. Предметом нашего внимания является асимптотика при $\alpha \to \infty$ величины $N(\lambda_\pm, \alpha)$ — числа собственных значений семейства (0.2), „родившихся“ в точке $\lambda_\pm$ при росте константы связи от нуля до заданного значения α. В предшествующей публикации автора [B3] рассматривались *регулярные* (терминология заимствована из [BS1]) возмущения V. Такие возмущения обеспечивают для $N(\lambda_+, \alpha)$ асимптотику *вейлевского* типа:

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha^{-d/2} N(\lambda_+, \alpha) = (2\pi)^{-d} \omega_d \int V^{d/2} (\det g)^{-1/2} dx, \tag{0.3}$$

$$\omega_d := \operatorname{vol}\{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}. \tag{0.4}$$

Ключевые слова: оператор Шредингера, периодический оператор, нерегулярные возмущения, лакуны, дискретный спектр.

Работа выполнена в рамках проекта INTAS-RFBR-95-414.

При $d \geqslant 3$ регулярность возмущения равносильна условию

$$V \in D_{d/2}(\mathbb{R}^d), \quad d \geqslant 3. \tag{0.5}$$

При $d = 2$ известны лишь отдельно достаточные и отдельно необходимые условия регулярности (см. [ВЗ]).

В настоящей статье мы рассматриваем *нерегулярные* возмущения, когда асимптотика (0.3) заведомо нарушается. Мы считаем, что $d \geqslant 3$; случай $d = 2$ сложнее и он будет рассмотрен в другом месте. Таким образом, условие (0.5) предполагается нарушенным, а тогда и асимптотика (0.3) не имеет места. Условия на V ниже ставятся в терминах *эталонного оператора* $-\Delta - \alpha V(x)$: предполагается, что для него при некотором $q > d/2$ выполнено $N(0, \alpha) = O(\alpha^q)$. Ответы также формулируются в терминах более простых (по сравнению с (0.1)) *модельных* операторов. Таких моделей используется две (см. их определение в §3). Первая из них — более сложная, но может быть использована в общей ситуации. Вторая проще и отвечает принятой в теории твердого тела концепции эффективных масс; фактически здесь и дается обоснование этой концепции. Однако вторая модель может быть использована лишь при дополнительных ограничениях на поведение $V(x)$ при больших значениях $|x|$. Подробности см. в §3.

Изложение в настоящей работе независимо от статьи [ВЗ]. Впрочем, знакомство с последней удобно при сравнении регулярных и нерегулярных ситуаций. Для той же цели может быть полезен обзор [Б2]. Здесь мы ограничимся немногими замечаниями. В регулярном случае асимптотика относится лишь к случаю знака „+“ в (0.2). Она не зависит от многих данных задачи. В нерегулярном случае асимптотика гораздо чувствительнее к свойствам исходного оператора (0.1). В то же время ответы теперь симметричны относительно знаков „$\pm$“ в (0.2). Далее, в определенном смысле можно говорить, что в регулярном случае асимптотики имеют *высокоэнергетическое* происхождение, а в нерегулярном — *пороговое*. Точный смысл сказанного пояснен в [Б2], §2; мы не станем здесь повторяться.

Как и в [ВЗ], мы рассматриваем сейчас лишь знакоопределенные возмущения V. В связи с этим отметим, что в недавней работе [С] результаты статьи [ВЗ] в определенном смысле распространены на знакопеременные V. Нерегулярный случай для знакопеременных V не рассматривался.

В обзоре [Б2] можно найти описание работ по близкой тематике. В большинстве из них изучается асимптотика числа $N_{\pm}(\lambda, \alpha)$, $\lambda \in \Lambda$, собственных значений семейства $A_{\pm}(t)$, прошедших через точку λ при росте t от нуля до α. Случай внутренней для Λ „точки наблюдения“ λ во многих отношениях проще, чем рассмотренный здесь (а также в [ВЗ, С]) случай краев $\lambda = \lambda_{\pm}$ лакуны.

Предварительные сообщения о результатах настоящей работы опубликованы в [Б1, В2].

В статье пять параграфов. В §1, 2 собраны предварительные сведения по гильбертовой теории и о периодических операторах (0.1), (0.2). В §3 построены модельные операторы и сформулированы основные результаты работы — теоремы 3.1 и 3.6. Первая из них доказана в §4, а вторая — в §5.

Многие утверждения и формулы статьи содержат двойные индексы „$\pm$“. *Если нет специальных оговорок, они при каждом из двух индексов должны читаться независимо.* Если нужно выделить один из индексов, он при ссылках указывается явно. Параграфы разбиты на пункты; при ссылках на пункты из других параграфов используется двойная нумерация.

Ниже C, c (с индексами или без них) — различные оценочные постоянные. Символ $\int$ предполагает интегрирование по $\mathbb{R}^d$. Используется обозначение (0.4). Через $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $|\cdot|$ обозначаются стандартные скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}^d$. Символ $\asymp$ означает двустороннюю оценку. Далее, $\nabla := \mathrm{grad}_x$; $\Omega := (0,1)^d$ — единичный куб в $\mathbb{R}^d$; Φ — оператор Фурье в $\mathbb{R}^d$. Через H^μ обозначаются классы Соболева; через $\widetilde{H}^\mu(\Omega)$ — подпространство всех функций из $H^\mu(\Omega)$, периодическое продолжение которых принадлежит $H^\mu_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Автор работал над текстом этой статьи в мае–июне 97 г. во время пребывания в Техническом университете Брауншвейга, ФРГ. Автор благодарит Институт математики Технического университета и особенно проф. Р. Хемпеля за гостеприимство.

§1. Предварительные сведения

Здесь приводятся необходимые элементарные сведения из гильбертовой теории.

1. Основные обозначения. Ниже $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ — сепарабельные гильбертовы пространства; $\mathfrak{H}$ — „основное“, $\mathfrak{G}$ — „дополнительное“. Скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ и норма $\|\cdot\|$ в $\mathfrak{H}$ и в $\mathfrak{G}$ обозначаются одинаково, что не ведет к смешениям. Для линейного оператора M через $\mathfrak{D}(M)$, M^*, $\rho(M)$, $\sigma(M)$ обозначаются соответственно его область определения, сопряженный оператор, резольвентное множество и спектр. Пространство непрерывных линейных отображений обозначается через $\mathfrak{R}$, компактных — через $\mathfrak{S}_\infty$. Если нужно, используются более подробные обозначения: например, $\mathfrak{R}(\mathfrak{H})$, $\mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H},\mathfrak{G})$ и т.п. Пусть $T\in\mathfrak{S}_\infty$ и $s_k(T)$ — сингулярные числа, т.е. последовательные собственные значения (с учетом кратностей) оператора $(T^*T)^{1/2}$. Обозначим

$$n(s,T) = \mathrm{card}\{k : s_k(T) > s\}, \quad s>0.$$

Для $T=T^*$ полагаем $2T_\pm = |T| \pm T$ и

$$n_\pm(s,T) := n(s,T_\pm), \quad s>0.$$

Ясно, что $n_+(\cdot,T)$ — функция распределения для последовательности $\{\lambda_k^{(+)}(T)\}$ положительных собственных значений оператора T. Аналогично $n_-(\cdot,T)$ —

функция распределения для последовательности $\{\lambda_k^{(-)}(T)\}$, где $(-\lambda_k^{(-)}(T))$ — отрицательные собственные значения T. При этом

$$n(s,T) = n_+(s,T) + n_-(s,T), \quad s > 0.$$

Через Σ_p, $0 < p < \infty$, обозначается класс (идеал) компактных операторов, удовлетворяющих условию

$$|T|_p^p := \sup_{s>0} s^p n(s,T) < \infty, \quad p > 0.$$

Пространство Σ_p полно относительно квазинормы $|\cdot|_p$. Оно несепарабельно. В нем выделяется сепарабельное подпространство

$$\Sigma_p^0 := \{T \in \Sigma_p : n(s,T) = o(s^{-p}), s \to 0\},$$

в котором плотно множество всех операторов конечного ранга. Пространства Σ_p нормируемы при $p > 1$. Как обычно,

$$\mathfrak{S}_p := \{T \in \mathfrak{S}_\infty : \sum_k s_k^p(T) < \infty\}, \quad 0 < p < \infty.$$

Отметим, что $\mathfrak{S}_p \subset \Sigma_p^0$. Класс $\mathfrak{S}_2$ образуют операторы Гильберта-Шмидта, класс $\mathfrak{S}_1$ — ядерные операторы.

На пространстве Σ_p определяются функционалы

$$\Delta_p(T) := \limsup_{s\to 0} s^p n(s,T), \tag{1.1}$$

$$\delta_p(T) := \liminf_{s\to 0} s^p n(s,T). \tag{1.2}$$

Для $T = T^* \in \Sigma_p$ полагаем

$$\Delta_p^{(\pm)}(T) := \Delta_p(T_\pm), \quad \delta_p^{(\pm)}(T) := \delta_p(T_\pm). \tag{1.3}$$

Предложение 1.1. *Все шесть функционалов* (1.1)–(1.3) *непрерывны в* Σ_p. *Они не меняются при добавлении к* T *слагаемого класса* Σ_p^0. *Иначе говоря, эти функционалы определены на фактор-пространстве* Σ_p/Σ_p^0. *Они непрерывны относительно фактор-квазинормы* $(\Delta_p(\cdot))^{1/p}$ *на* Σ_p/Σ_p^0.

2. Теперь мы обсудим нужный нам вариант известного приема, позволяющего сводить изучение дискретного спектра в лакуне к исследованию спектра некоторого компактного оператора. Определенная специфика связана с тем, что мы рассматриваем не только точки внутри лакуны, но и ее концы. Часть нужного нам материала заимствована из §1 статьи [B1].

Пусть $a[\cdot,\cdot]$ — полуторалинейная форма в $\mathfrak{H}$, полуограниченная снизу и замкнутая. Ее область определения $d[a]$ предполагается плотной в $\mathfrak{H}$. Форма a порождает самосопряженный оператор A в $\mathfrak{H}$. Выберем $\gamma \in \mathbb{R}$ так, чтобы было

$$a_\gamma[x,x] := a[x,x] + \gamma(x,x) \geqslant (x,x), \quad x \in d[a]. \tag{1.4}$$

Метрическая форма

$$a_\gamma[x,x] = \|(A+\gamma I)^{1/2}x\|^2, \quad x \in d[a],$$

задает на $d[a]$ гильбертову структуру. Соответствующее (полное) гильбертово пространство обозначим через $H_\gamma(a)$. При всех значениях γ, для которых выполнено (1.4), пространства $H_\gamma(a)$ поэлементно совпадают.

Рассмотрим замыкаемый линейный оператор $W : \mathfrak{H} \to \mathfrak{G}$, $\mathfrak{D}(W) \supset d[a]$. Очевидно,

$$G_\gamma := W(A+\gamma I)^{-1/2} \in \mathfrak{R}(\mathfrak{H},\mathfrak{G}). \tag{1.5}$$

Для $\lambda = \overline{\lambda} \in \rho(A)$ введем оператор

$$\begin{aligned} X(\lambda) &:= G_\gamma(A+\gamma I)(A-\lambda I)^{-1}G_\gamma^* \\ &= W|A-\lambda I|^{-1/2}\operatorname{sign}(A-\lambda I)(W|A-\lambda I|^{-1/2})^*. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Оператор $X(\lambda)$ непрерывен и самосопряжен в $\mathfrak{G}$. Равенство (1.6) можно заменить соотношением

$$X(\lambda)g = W(A-\lambda I)^{-1}W^*g, \quad g \in \mathfrak{D}(W^*). \tag{1.7}$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено более сильное, нежели (1.5), условие

$$G_\gamma = W(A+\gamma I)^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H},\mathfrak{G}), \tag{1.8}$$

из которого, разумеется, следует, что

$$X(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{G}).$$

Пусть теперь неотрицательная форма v определена равенством

$$v[x,y] = (Wx, Wy), \quad x,y \in \mathfrak{D}(W). \tag{1.9}$$

Условие (1.8) равносильно компактности формы v в пространстве $H_\gamma(a)$. Отсюда следует, что при всех $\alpha > 0$ каждая из двух форм

$$a_\pm(\alpha) = a \mp \alpha v, \quad \alpha > 0, \ d[a_\pm(\alpha)] = d[a], \tag{1.10}$$

полуограничена снизу и замкнута. Далее, пусть $A_\pm(\alpha)$ — самосопряженный в $\mathfrak{H}$ оператор, порожденный формой (1.10). Пусть $\Lambda = (\lambda_-, \lambda_+)$ — лакуна в $\sigma(A)$, т.е. $\Lambda \subset \rho(A)$, $\lambda_\pm \in \sigma(A)$. (Если $\lambda_+ = \inf \sigma(A)$, то полагаем $\lambda_- = -\infty$). Фиксируем точку λ,

$$\lambda_- < \lambda < \lambda_+.$$

Справедливы (см. [B1, §1]) два нижеследующие предложения.

Предложение 1.2. *Пусть выполнено* (1.8) *и* $a_\pm(\alpha)$ — *форма, определенная в* (1.10). *Тогда при любом* $\alpha > 0$ *спектр* $A_\pm(\alpha)$ *в* Λ *дискретен и не накапливается к точке* $\lambda_\mp$.

С ростом α все собственные значения оператора $A_+(\alpha)$ убывают, а оператора $A_-(\alpha)$ — возрастают.

Обозначим через $N_\pm(\lambda; A, W; \alpha)$ *число собственных значений оператора* $A_\pm(t)$, *прошедших через точку* λ *при возрастании „константы связи“* t *от нуля до* α.

Предложение 1.3. *В условиях предложения* 1.2 *выполнено*

$$N_\pm(\lambda; A, W; \alpha) = n_\pm(s, X(\lambda)), \quad \alpha s = 1, \ \lambda \in \Lambda. \tag{1.11}$$

3. Обсудим, следуя [B1], возможность перенесения (1.11) на крайние точки $\lambda_\pm$ лакуны Λ.

Оператор-функция $X(\lambda)$ возрастает вместе с $\lambda \in \Lambda$. Если при этом она ограничена сверху при $\lambda \to \lambda_+$, то существует сильный предел

$$X(\lambda_+) := \operatorname*{s-lim}_{\lambda \to \lambda_+} X(\lambda). \tag{1.12+}$$

Аналогично при ограниченности снизу существует предел

$$X(\lambda_-) := \operatorname*{s-lim}_{\lambda \to \lambda_-} X(\lambda). \tag{1.12-}$$

Если при этом

$$X(\lambda_\pm) \in \mathfrak{S}_\infty, \tag{1.13}$$

то сходимость в (1.12) на самом деле является сходимостью *по операторной норме*:

$$X(\lambda_\pm) = \operatorname*{u-lim}_{\lambda \to \lambda_\pm} X(\lambda).$$

Это влечет за собой сходимость функций распределения. Именно,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_+} n_\pm(s, X(\lambda)) = n_\pm(s \pm 0, X(\lambda_+)), \tag{1.14}$$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_-} n_\pm(s, X(\lambda)) = n_\pm(s \mp 0, X(\lambda_-)). \tag{1.15}$$

(В связи с (1.14), (1.15) заметим, что функции $n_\pm$ непрерывны справа). Из (1.14), (1.15) следует, что в (1.11) существует также предел левой части. Величины $N_\pm(\lambda; A, W, \alpha)$ при этом постоянны вблизи λ_+ (вблизи λ_-). *Положим по определению*

$$N_\pm(\lambda_+; A, W; \alpha) = \lim_{\lambda \to \lambda_+} N_\pm(\lambda; A, W, \alpha), \tag{1.16}$$

$$N_\pm(\lambda_-; A, W; \alpha) = \lim_{\lambda \to \lambda_-} N_\pm(\lambda; A, W, \alpha). \tag{1.17}$$

Величину $N_+(\lambda_+; A, W; \alpha)$ *(величину* $N_+(\lambda_-; A, W; \alpha)$*) естественно интерпретировать как количество собственных значений оператора* $A_+(t)$, *„родившихся" на правом конце* λ_+ *(„исчезнувших" на левом конце* λ_-*) лакуны* Λ *при росте константы связи* t *от нуля до* $\alpha > 0$. *Аналогично величина* $N_-(\lambda_-; A, W; \alpha)$ *связана с „рождением" собственных значений оператора* $A_-(t)$ *в точке* λ_-, *а величина* $N_-(\lambda_+; A, W; \alpha)$ *— с их „исчезновением" в точке* λ_+.

С учетом (1.11) и (1.14)-(1.17) получаем

Предложение 1.4. *Пусть выполнены условия* (1.12+), (1.13+). *Тогда при любом* $\alpha > 0$ *полное количество собственных значений оператора* $A_+(\alpha)$ *в лакуне* Λ *конечно. Существуют оба предела* (1.16) *и выполнены оба равенства*

$$N_\pm(\lambda_+; A, W; \alpha) = n_\pm(s \pm 0; X(\lambda_+)), \quad \alpha s = 1. \tag{1.18}$$

Аналогично при условиях (1.12-), (1.13-) *полное количество собственных значений оператора* $A_-(\alpha)$ *в лакуне* Λ *конечно при любом* $\alpha > 0$. *Существуют оба предела* (1.17) *и выполнены оба равенства*

$$N_\pm(\lambda_-; A, W; \alpha) = n_\pm(s \mp 0; X(\lambda_-)), \quad \alpha s = 1. \tag{1.19}$$

4. Остановимся на случае полубесконечной лакуны. Не уменьшая общности, будем считать, что $\lambda_+ = 0$, т.е. $\Lambda = (-\infty, 0)$. *Величина*

$$N_\lambda(A, W; \alpha) := N_+(\lambda; A, W; \alpha), \quad \lambda < 0, \tag{1.20}$$

сейчас совпадает с числом собственных значений оператора $A_+(\alpha)$, *лежащих левее точки* λ. Соответствующий оператор (1.6) положителен и может быть представлен в виде

$$X(\lambda) = G(\lambda)G(\lambda)^*, \quad \lambda < 0,$$

где

$$G(\lambda) = W(A - \lambda I)^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}).$$

При этом оператор (1.8) есть $G(-\gamma)$ при $\gamma > 0$. Пределы (1.12+) и

$$G_0 = \operatorname*{s-lim}_{\lambda \to -0} G(\lambda)$$

существуют одновременно, причем

$$X(0) = G_0 G_0^*. \tag{1.21}$$

Включения (1.13+) и

$$G_0 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}, \mathfrak{G})$$

равносильны. *Соотношение* (1.18+) *принимает вид*

$$N_0(A, W; \alpha) = n(s, X(0)) = n(s^{1/2}, G_0), \quad \alpha s = 1, \tag{1.22}$$

причем N_0 *есть полное число отрицательных собственных значений оператора* $A_+(\alpha)$.

5. Вернемся к обсуждению общей ситуации. Существование предела (1.12) и включение (1.13) представляют собой содержательные ограничения. Фактически дело сводится к возможности корректно определить оператор

$$W(A - \lambda_\pm I)^{-1} W^*.$$

Предположим, что $\lambda_\pm$ не является для A собственным значением. Далее, пусть на каких-либо плотных в $\mathfrak{G}$ множествах определена полуторалинейная форма

$$((A - \lambda_\pm I)^{-1} W^* x, W^* y). \tag{1.23}$$

Если эта форма непрерывна в $\mathfrak{G}$, то порождаемый ею оператор совпадает с пределом (1.12). В этом смысле будем понимать обозначение

$$X(\lambda_\pm) = W(A - \lambda_\pm I)^{-1} W^*. \tag{1.24}$$

Если форма (1.23) компактна в $\mathfrak{G}$, то выполнено (1.13). Именно на этом пути ниже проводится проверка условий (1.12), (1.13) в конкретных случаях.

Фиксируем теперь $q > 0$ и введем следующие обозначения:

$$\Delta_q^{(\varepsilon)}(\lambda_\pm; A, W) = \limsup_{\alpha \to \infty} \alpha^{-q} N_\varepsilon(\lambda_\pm; A, W; \alpha), \quad \varepsilon = \pm; \tag{1.25}$$

$$\delta_q^{(\varepsilon)}(\lambda_\pm; A, W) = \liminf_{\alpha \to \infty} \alpha^{-q} N_\varepsilon(\lambda_\pm; A, W; \alpha), \quad \varepsilon = \pm. \tag{1.26}$$

Из сказанного выше и из (1.18), (1.19) непосредственно вытекает

Предложение 1.5. *Пусть форма* (1.23) *непрерывна и, следовательно, корректно определен оператор* (1.24). *Пусть выполнено условие*

$$X(\lambda_\pm) \in \Sigma_q(\mathfrak{G}), \quad q > 0. \tag{1.27}$$

Тогда величины (1.25), (1.26) *конечны при каждом из двух значений* $\varepsilon = \pm$, *и справедливы равенства*

$$\Delta_q^{(\varepsilon)}(\lambda_\pm; A, W) = \Delta_q^{(\varepsilon)}(X(\lambda_\pm)), \quad q > 0, \ \varepsilon = \pm, \tag{1.28}$$

$$\delta_q^{(\varepsilon)}(\lambda_\pm; A, W) = \delta_q^{(\varepsilon)}(X(\lambda_\pm)), \quad q > 0, \ \varepsilon = \pm. \tag{1.29}$$

Отметим, что в условиях п. 4 включение (1.27+) принимает вид

$$X(0) \in \Sigma_q(\mathfrak{G}), \quad q > 0,$$

что в силу (1.21) равносильно включению

$$G_0 \in \Sigma_{2q}(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}).$$

Соотношения (1.28+), (1.29+) при $\varepsilon = +$ переходят в равенства

$$\limsup_{\alpha \to \infty} \alpha^{-q} N_0(A, W; \alpha) = \Delta_q(X(0)) = \Delta_{2q}(G_0), \tag{1.30}$$

$$\liminf_{\alpha \to \infty} \alpha^{-q} N_0(A, W; \alpha) = \delta_q(X(0)) = \delta_{2q}(G_0) \tag{1.31}$$

в соответствии с (1.22).

§2. Периодические операторы второго порядка. Возмущения

1. В $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$, рассматриваются измеримые вещественные функции p и g, причем $g(x)$ — симметричная $(d \times d)$-матрица. Предполагаются выполненными следующие условия:

$$p \in L_\infty(\mathbb{R}^d), \quad g \in L_\infty(\mathbb{R}^d), \tag{2.1}$$

$$p(x+n) = p(x), \;\; g(x+n) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \;\; n \in \mathbb{Z}^d, \tag{2.2}$$

$$\langle g(x)\xi, \xi \rangle \geqslant c_0 |\xi|^2, \quad c_0 > 0, \;\; x \in \mathbb{R}^d, \;\; \xi \in \mathbb{C}^d. \tag{2.3}$$

В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим квадратичную форму

$$a[u,u] = \int (\langle g(x)\nabla u, \nabla u \rangle + p(x)|u|^2)dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{2.4}$$

Эта форма полуограничена снизу и замкнута. Действие соответствующего форме a самосопряженного в $L_2(\mathbb{R}^d)$ оператора A описывается дифференциальным выражением

$$Au = -\operatorname{div}(g\nabla u) + pu, \tag{2.5}$$

понимаемым в смысле теории распределений. В соответствии с (2.1)–(2.3), оператор A — *эллиптический и $\mathbb{Z}^d$-периодический.* Отметим, что *случай произвольной решетки периодов в $\mathbb{R}^d$ приводится к случаю $\mathbb{Z}^d$* линейной заменой координат; при этом форма (2.4) и выражение (2.5) сохраняют свой вид, но матрица g пересчитывается. *Через Ω ниже обозначается единичный куб в $\mathbb{R}^d$, т.е. стандартная ячейка $\mathbb{Z}^d$-решетки.*

2. Нам потребуется описание спектрального разложения оператора A (подробности см., например, в [РС] или [Ск]). В $L_2(\Omega)$ рассматривается семейство самосопряженных операторов $A(k)$, $k \in \mathbb{R}^d$, порожденных дифференциальным выражением (2.5) и (k)-квазипериодическими граничными условиями. Более точно, $A(k)$ порождается в $L_2(\Omega)$ замкнутой полуограниченной формой

$$a_k[u,u] = \int\limits_\Omega (\langle g\nabla u, \nabla u\rangle + p|u|^2)dx, \quad u \in d[a_k], \ k \in \mathbb{R}^d, \tag{2.6}$$

$$d[a_k] = \{u \in H^1(\Omega) : e^{-ikx}u(x) \in \widetilde{H}^1(\Omega)\}. \tag{2.7}$$

Из (2.7) непосредственно следует, что форма (2.6) не меняется при замене k на $k + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}^d$. Поэтому фактически операторы $A(k)$ определены для $k \in \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$. Параметр k обычно называют *квазиимпульсом*.

Операторы $A(k)$ имеют дискретный спектр. Пусть

$$E_1(k) \leqslant E_2(k) \leqslant \dots \leqslant E_s(k) \leqslant \dots, \quad k \in \mathbb{T}^d, \tag{2.8}$$

— последовательные *собственные значения* оператора $A(k)$, и $\psi_s(x,k)$ — соответствующие ортонормированные *собственные функции*; последние также можно выбрать $(2\pi\mathbb{Z})^d$-периодическими относительно k. Спектр $\sigma(A)$ есть объединение отрезков (*зон*), которые являются образами (непрерывных) отображений $\mathbb{T}^d \ni k \mapsto E_s(k) \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}$. Зоны могут перекрываться. Пока не установлено, нет ли среди зон вырожденных, т.е. точек, являющихся для A бесконечнократными собственными значениями. Такие точки отвечали бы постоянным на $\mathbb{T}^d$ функциям E_s. Отсутствие среди функций (2.8) постоянных установлено (см. [РС]) для случая, когда матрица g постоянна (случай оператора Шредингера). Можно также показать, что вырожденных зон нет в случае, когда матрица-функция $g(x)$ — гладкая и кратна постоянной. Если вырожденных зон нет, то спектр оператора A абсолютно непрерывен.

Пусть теперь Ψ_s — операторы, определяемые равенствами

$$(\Psi_s u)(k) = (2\pi)^{-d/2} \int \overline{\psi_s(x,k)}u(x)dx, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Тогда отображения

$$\Psi_s : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{T}^d)$$

— *частично изометрические отображения „на“*. Операторы

$$P_s := \Psi_s^*\Psi_s, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{2.10}$$

суть ортопроекторы в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Они попарно ортогональны и

$$\sum_{s\in\mathbb{N}} P_s = I.$$

Наконец,

$$A = \sum_{s\in\mathbb{N}} \Psi_s^*[E_s]\Psi_s, \tag{2.11}$$

где $[E_s]$ — оператор умножения на функцию $E_s(\cdot)$ в $L_2(\mathbb{T}^d)$. В силу (2.10), (2.11) операторы P_s перестановочны с A. Если зона с номером s не перекрывается с другими зонами, то P_s — спектральный проектор для A, отвечающий этой зоне.

3. Спектр A может содержать лакуны помимо полубесконечной. Пусть $\Lambda = (\lambda_-, \lambda_+)$ — лакуна; считаем, что $\lambda_+ \in \sigma(A)$ и (если $\lambda_- \neq -\infty$) $\lambda_- \in \sigma(A)$. Ясно, что для некоторого номера l

$$\lambda_+ = \min_k E_l(k), \quad k \in \mathbb{T}^d, \tag{2.12+}$$

$$\lambda_- = \max_k E_{l-1}(k), \quad k \in \mathbb{T}^d, \tag{2.12-}$$

причем здесь мы формально полагаем $E_0(k) := -\infty$. Как правило, нам придется принимать условия, ограничивающие „устройство“ краев лакуны. Сформулируем их.

Условие 2.1(+). a) $\min E_{l+1}(k) > \lambda_+$. **b)** Равенство (2.12+) достигается лишь в конечном числе точек $k_j^{(+)} \in \mathbb{T}^d$, $j = 1, \dots, m_+$, каждая из которых есть невырожденная точка минимума для E_l. Именно, вблизи $k_j^{(+)}$

$$E_l(k) - \lambda_+ = r_j^{(+)}(k - k_j^{(+)}) + o(|k - k_j^{(+)}|^2), \quad j = 1, \dots, m_+, \tag{2.13+}$$

где $r_j^{(+)}$ — положительно определенная квадратичная форма.

Аналогичную роль для точки $\lambda_- \neq -\infty$ играет

Условие 2.1(−). a) $\max E_{l-2}(k) < \lambda_-$. **b)** Равенство (2.12-) достигается лишь в конечном числе точек $k_j^{(-)} \in \mathbb{T}^d$, $j = 1, \dots, m_-$, каждая из которых есть невырожденная точка максимума для E_{l-1}. Именно, вблизи $k_j^{(-)}$

$$\lambda_- - E_{l-1}(k) = r_j^{(-)}(k - k_j^{(-)}) + o(|k - k_j^{(-)}|^2), \quad j = 1, \dots, m_-. \tag{2.13-}$$

Через формы $r_j^{(\pm)}$ выражаются так называемые тензоры эффективных масс для точек $k_j^{(\pm)}$.

Замечание 2.2. Для полубесконечной лакуны $\Lambda = (-\infty, \lambda_+)$ условие 2.1(+) в точке $\lambda_+ = \inf \sigma(A)$ выполнено автоматически. При этом $l = 1$, $m_+ = 1$, $k_1^{(+)} = 0$.

В соответствии с (2.7) произведем в (2.6) подстановку $u = e^{ikx}z$. Тогда семейство форм a_k перейдет в семейство

$$\widetilde{a}_k[z, z] = \int_\Omega (\langle g(\nabla + ik)z, (\nabla + ik)z\rangle + p|z|^2)dx, \quad z \in \widetilde{H}^1(\Omega). \tag{2.14}$$

Отвечающие формам (2.14) операторы $\widetilde{A}(k)$ унитарно эквивалентны операторам $A(k)$ и имеют тот же спектр (2.8). Соответствующие собственные функции $\varphi_l(x,k)$ связаны с $\psi_l(x,k)$ формулой

$$\psi_l(x,k) = e^{ikx}\varphi_l(x,k), \quad k \in \mathbb{R}^d. \tag{2.15}$$

Замечание 2.3. Оба множителя в правой части (2.15) не периодичны по k. Соотношение (2.15) нам потребуется лишь для точек, фигурирующих в (2.13±). Поэтому примем, что точки $k_j^{(\pm)} \in \mathbb{T}^d$ реализованы точками полуоткрытого куба:

$$k_j^{(\pm)} \in [-\pi,\pi)^d, \quad j = 1,\dots,m_\pm. \tag{2.16}$$

Близкие к ним точки $k \in \mathbb{T}^d$ реализованы точками из $\mathbb{R}^d$-окрестностей точек (2.16). Такое соглашение придает однозначный смысл формуле (2.15). Мы увидим, что наши окончательные выводы формулируются инвариантно и не зависят от принятого соглашения.

Замечание 2.4. Формы (2.14) имеют общую область определения и аналитически зависят от k. Условие 2.1(+), п. (a), означает, что $E_l(k_j^{(+)})$, $j = 1,\dots,m_+$, является *простым собственным значением для* $\widetilde{A}(k_j^{(+)})$. Поэтому *функция* $E_l(k)$ *аналитична по* k *вблизи точек* $k_j^{(+)}$. *Собственная функция* $\varphi_l(x,k)$ *также может быть выбрана аналитической вблизи точек* $k = k_j^{(+)}$; в силу (2.15) *то же относится к функции* $\psi_l(x,k)$. Аналогичное замечание на основании условия 2.1(−), п. (a), может быть сделано для $E_{l-1}(k)$, $\varphi_{l-1}(x,k)$, $\psi_{l-1}(x,k)$ вблизи точек $k_j^{(-)}$, $j = 1,\dots,m_-$.

4. Форма возмущения v определяется функцией $V(x) \geqslant 0$, условия на которую будут наложены ниже. Положим $W = V^{1/2}$ и будем через W обозначать также соответствующий оператор умножения. Квадратичная форма вида (1.9) сейчас задается равенством

$$v[u,u] = \int |W(x)u(x)|^2 dx, \tag{2.17}$$

причем оба пространства $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}$ совпадают с $L_2(\mathbb{R}^d)$. Оператор $A_\pm(\alpha)$ определяется формой (1.10), где a и v — формы (2.4), (2.17). Формально оператор $A_\pm(\alpha)$ соответствует дифференциальному выражению $A \mp \alpha V$, $\alpha > 0$. Наша цель состоит в изучении поведения величин (1.16), (1.17) при больших значениях α. Условие (0.5) сейчас предполагается нарушенным:

$$V \overline{\in} L_{d/2}(\mathbb{R}^d). \tag{2.18}$$

Соответственно для функций $N_\varepsilon(\lambda_\pm; A, W; \alpha)$, $\varepsilon = \pm$, не могут быть справедливыми верхние оценки вейлевского порядка $\alpha^{d/2}$. В следующем пункте мы остановимся на достаточно хорошо изученном случае оператора $-\Delta - \alpha V$. Это позволит нам мотивировать условия, которые мы в дальнейшем наложим на функцию V при рассмотрении общего случая.

5. В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим операторы

$$B = -\Delta, \ B(\alpha) = -\Delta - \alpha V, \quad \alpha > 0, \ d \geqslant 3. \tag{2.19}$$

Здесь мы находимся в условиях, описанных в общем виде в п. 1.4. Как обычно, оператор $B(\alpha)$ определяется через свою квадратичную форму $b(\alpha)$. Последняя дается формулой

$$b(\alpha)[u,u] = \int |\nabla u|^2 dx - \alpha \int |Wu|^2 dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d), \ d \geqslant 3.$$

Соответствующий оператор $X(0)$ (см. (1.21)) есть интегральный оператор в $\mathbb{R}^d$ с ядром

$$c_d W(x)|x-y|^{2-d} W(y), \quad c_d^{-1} = d(d-2)\omega_d, \ d \geqslant 3. \tag{2.20}$$

Удобнее, однако, использовать представление

$$X(0) = GG^*, \tag{2.21}$$

где G — интегральный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с ядром

$$G(x,\xi) = (2\pi)^{-d/2} W(x) \exp(ix\xi)|\xi|^{-1}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^d, \ d \geqslant 3. \tag{2.22}$$

Оператор G в факторизации (2.21) несущественно (унитарным множителем Φ) отличается от оператора G_0 в (1.21).

Известен критерий того, чтобы оператор с ядром (2.22) был ограниченным оператором в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Этот критерий, как и аналогичный критерий компактности оператора G, выражается в терминах гармонической емкости. Мы не будем здесь приводить формулировок. Ограничимся более простыми (достаточными) условиями на функцию W в терминах „слабых" L_q-классов (классов $L_{q,\infty}$). Справедливы импликации

$$W \in L_{d,\infty} \Rightarrow G \in \mathfrak{R}, \quad W \in L^0_{d,\infty} \Rightarrow G \in \mathfrak{S}_\infty.$$

Далее,

$$W \in L_d \Leftrightarrow G \in \Sigma_d, \tag{2.23}$$

что равносильно известной оценке Розенблюма–Либа–Цвикеля и ее обращению. Подробности по поводу утверждений, обсуждаемых в данном абзаце, можно найти в [BS2]; там же содержатся необходимые ссылки.

Включения (2.23) равносильны тому, что $N_0(B,W;\alpha) = O(\alpha^{d/2})$, а тогда справедлива и вейлевская асимптотика

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-d/2} N_0(B,W;\alpha) = (2\pi)^{-d}\omega_d \int W^d dx. \tag{2.24}$$

Нас интересуют случаи (2.18), когда асимптотика (2.24) заведомо нарушается. Поэтому (ограничиваясь степенной шкалой) потребуем, чтобы было

$$G \in \Sigma_{2q}, \quad 2q > d, \tag{2.25}$$

или, что то же,

$$N_0(B,W;\alpha) = O(\alpha^q), \quad \alpha\to\infty, \ 2q > d \geqslant 3. \tag{2.26}$$

Довольно широкие достаточные условия справедливости (2.26) получены в [BS1]; мы не станем здесь их приводить. Отметим лишь следующий пример. Пусть

$$\left.\begin{aligned} &V_q(x) = |x|^{-2}(\log|x|)^{-1/q} \quad \text{при } |x|\geqslant 2; \\ &V_q(x) = 0 \quad \text{при } |x| < 2; \quad 2q > d \geqslant 3 \end{aligned}\right\}. \tag{2.27}$$

Тогда (2.26) выполнено при $W = W_q = V_q^{1/2}$ и, более того, справедлива (см. [BS1]) асимптотика[1] вида

$$N_0(B,W_q;\alpha) \underset{\alpha\to\infty}{\sim} c(d,q)\alpha^q, \quad 2q > d \geqslant 3. \tag{2.28}$$

Стоит отметить, что степенная шкала по α в (2.28) сжимается в логарифмическую шкалу в (2.27).

Если невейлевский порядок в оценке (2.26) был связан только с поведением V в бесконечности, то во всех рассмотренных случаях оказывалось, что для величины N_{-1} (см. (1.20)) выполнено

$$N_{-1}(B,W;\alpha) = o(\alpha^q), \quad \alpha\to\infty, \ 2q > d \geqslant 3. \tag{2.29}$$

(Напротив, если невейлевская оценка (2.26) связана с локальными особенностями V, то N_0 и N_{-1} — одного порядка; см. [BW]). Отметим, что оператор $X(-1)$ (см. (1.7)) допускает факторизацию

$$X(-1) = G_1 G_1^*,$$

где G_1 — интегральный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с ядром

$$G_1(x,\xi) = (2\pi)^{-d/2} W(x)\exp(ix\xi)(|\xi|^2+1)^{-1/2}, \quad x,\xi\in\mathbb{R}^d, \ d\geqslant 3.$$

Соотношение (2.29) очевидно равносильно включению

$$G_1 \in \Sigma^0_{2q}, \quad 2q > d. \tag{2.30}$$

Сделанные наблюдения дают основание принять оценки (2.26), (2.29) в качестве условия, накладываемого на потенциал V.

[1] В [L] асимптотика вида (2.28) получена для более сложного случая, когда V_q содержит дополнительный множитель, зависящий от $x/|x|$.

Определение 2.5. Будем относить функцию $V(x) \geqslant 0$ к классу $\mathcal{O}(q,d)$ и писать

$$V \in \mathcal{O}(q,d), \quad 2q > d \geqslant 3, \tag{2.31}$$

если для оператора $B(\alpha)$ из (2.19) выполнены оценки (2.26), (2.29) (или, что то же, включения (2.25), (2.30)).

„Неявное“ условие (2.31) оказывается достаточно удобным для дальнейшей работы.

В заключение отметим, что при $d = 2$ оператор с ядром (2.22) неограничен даже для $W \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$; в ядре (2.20) это соответствует замене при $d = 2$ степенного множителя логарифмическим. На другом языке сказанное означает, что при $d = 2$ оператор $-\Delta$ имеет в точке $\lambda = 0$ *виртуальный уровень*.

§3. Модельные операторы. Формулировки основных результатов

Условия на функцию V мы ставим в терминах *эталонного* оператора (2.19). В то же время ответы будут сформулированы в терминах других (*модельных*) операторов типа Шредингера с матричными, вообще говоря, потенциалами. Таких моделей будет две. Вторая модель проще (матричный потенциал диагонален), но ее можно использовать лишь при дополнительных предположениях о V.

1. Первая модель. Для определенности рассмотрим случай правого конца лакуны, $\lambda = \lambda_+$. *Формулы для случая $\lambda = \lambda_-$ не будут выписываться явно, но ссылки на них возможны.* Они будут помечаться знаком $(-)$ и должны читаться по аналогии с соответствующими формулами со знаком $(+)$.

В описание модели войдут квадратичные формы $r_j^{(+)}$, $j = 1, \dots, m_+$, фигурирующие в (2.13+), а также соответствующие собственные функции $\psi_l(\dots, k_j^{(+)})$. Во всем дальнейшем лакуна Λ фиксирована, и индекс l в обозначениях опускается. В частности, будем писать

$$\psi_j^{(+)}(x) = \psi_l(x, k_j^{(+)}), \quad \varphi_j^{(+)}(x) = \psi_j^{(+)}(x)\exp(-ik_j^{(+)}x), \quad j = 1, \dots, m_+. \tag{3.1+}$$

В пространстве $\mathfrak{H}_+ = L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{m_+})$ рассмотрим диагональный эллиптический оператор второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{R}(D) = \operatorname{diag}(r_1^{(+)}(D), \dots, r_{m_+}^{(+)}(D)). \tag{3.2+}$$

Выражением (3.2+) в $\mathfrak{H}_+$ порождается самосопряженный положительный оператор R_+. Для R_+ и его квадратичной формы r_+ выполнено

$$\mathfrak{D}(R_+) = H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{m_+}), \qquad d[r_+] = H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{m_+}). \tag{3.3+}$$

Введем теперь матрицу-строку и матрицу-столбец

$$\Pi_+(x) := \{\psi_j^{(+)}(x)\}_{j=1}^{m_+}, \qquad \Pi_+^*(x) := \operatorname{col}\{\overline{\psi}_i^{(+)}(x)\}_{i=1}^{m_+}. \tag{3.4+}$$

Квадратная эрмитова матрица

$$\mathcal{P}_+(x) := \Pi_+^*(x)\Pi_+(x) = \{\overline{\psi}_i^{(+)}(x)\psi_j^{(+)}(x)\}_{i,j=1}^{m_+} \tag{3.5+}$$

имеет ранг 1. Ее след совпадает с ее единственным ненулевым собственным числом:

$$\operatorname{tr}\mathcal{P}_+(x) = \Sigma_{j=1}^{m_+}|\psi_j^{(+)}(x)|^2. \tag{3.6+}$$

Для $V = W^2$ определим неотрицательный матричный потенциал

$$\mathcal{U}_+(x) := V(x)\mathcal{P}_+(x) = \mathcal{W}_+(x)^*\mathcal{W}_+(x), \tag{3.7+}$$

$$\mathcal{W}_+(x) := W(x)\Pi_+(x). \tag{3.8+}$$

Функция (3.6+) ограничена; поэтому потенциал (3.7+) поточечно оценивается через V. Соответствующий оператор умножения $\mathcal{W}_+$ действует из $\mathfrak{H}_+$ в $\mathfrak{G}_+ = L_2(\mathbb{R}^d)$.

Введем теперь модельный оператор

$$R_+(\alpha) = R_+ - \alpha\mathcal{U}_+(x), \quad \alpha > 0, \tag{3.9+}$$

в соответствии с общей схемой п. 1.4. Легко понять, что оценки (2.26), (2.29) переносятся на задачу (3.9+):

$$N_0(R_+, \mathcal{W}_+; \alpha) = O(\alpha^q), \quad 2q > d \geqslant 3,$$

$$N_{-1}(R_+, \mathcal{W}_+; \alpha) = o(\alpha^q), \quad 2q > d \geqslant 3.$$

При этом надо иметь в виду, что точное определение семейства (3.9+) дается через квадратичные формы, и учесть (3.3+).

Матрица (3.5+) определена с точностью до фазовых множителей, которые можно ввести в $\psi_j^{(+)}$. Соответствующие модели (3.9+) унитарно эквивалентны друг другу; эквивалентность дается постоянными диагональными унитарными матрицами. Такой произвол несуществен. В частности, величины $N_0(R_+, \mathcal{W}_+; \alpha)$, $N_{-1}(R_+, \mathcal{W}_+; \alpha)$ при этом не меняются.

На основе (2.13−) с помощью собственных функций $\psi_j^{(-)}(x) := \psi_{l-1}(x, k_j^{(-)})$, $j = 1, \dots, m_-$, вполне аналогично строится модельный оператор

$$R_-(\alpha) = R_- - \alpha\mathcal{U}_-(x). \tag{3.9−}$$

2. Вернемся к оператору A, введенному в п. 2.1. Пусть v есть форма (2.17). Тогда соответствующие формы (1.10) позволяют ввести операторы

$$A_\pm(\alpha) = A_\mp \alpha V, \quad \alpha > 0, \tag{3.10}$$

дискретный спектр которых в лакуне Λ и является предметом нашего интереса. В терминах моделей (3.9±) будут вычислены функционалы (1.25), (1.26); как обычно *утверждения при каждом из двух значков, верхнем и нижнем, читаются независимо*. Следующая теорема дает первый из двух основных результатов работы.

Теорема 3.1. *Пусть для оператора A выполнено условие* 2.1(±) *и потенциал V удовлетворяет условию* (2.31) *при некотором q. Пусть $R_\pm(\alpha)$ — модельные операторы* (3.9±). *Тогда справедливы асимптотические соотношения*

$$\Delta_q^{(\pm)}(\lambda_\pm; A, W) = \limsup_{\alpha\to\infty} \alpha^{-q} N_0(R_\pm, \mathcal{W}_\pm; \alpha) =: \Delta_q(R_\pm, \mathcal{W}_\pm), \tag{3.11}$$

$$\delta_q^{(\pm)}(\lambda_\pm; A, W) = \liminf_{\alpha\to\infty} \alpha^{-q} N_0(R_\pm, \mathcal{W}_\pm; \alpha) =: \delta_q(R_\pm, \mathcal{W}_\pm). \tag{3.12}$$

Напомним, что величина N_0 есть полное число отрицательных собственных значений (см. п. 1.4); в данном случае — для оператора (3.9±).

Отметим еще следующее

Предложение 3.2. *В условиях теоремы* 3.1

$$N_\pm(\lambda; A, W; \alpha) = o(\alpha^q), \quad \lambda \in [\lambda_-, \lambda_+], \ \lambda \neq \lambda_\pm. \tag{3.13}$$

Сопоставление (3.11)-(3.13) показывает, что „родившиеся" в точке $\lambda_\pm$ собственные значения оператора (3.10) „в основном" сосредоточены вблизи $\lambda_\pm$. Это позволяет говорить о *пороговом* происхождении большинства таких собственных значений.

Замечание 3.3. В отличие от случая регулярных V (удовлетворяющих (0.5)), сейчас результаты для операторов $A_+(\alpha)$ и $A_-(\alpha)$ однотипны.

Замечание 3.4. Если $m_\pm = 1$, то модельные операторы (3.9) скалярны и

$$\mathcal{U}_\pm(x) = V(x)|\psi_1^{(\pm)}(x)|^2.$$

В частности, $m_+ = 1$, если $\lambda_+ = \inf \sigma(A)$; тогда $\psi_1^{(+)}(x)$ — положительное периодическое решение уравнения $A\psi - \lambda_+\psi = 0$. Далее, пусть в этом случае $p(x)$ в (0.1) есть нуль. Тогда, очевидно, $\lambda_+ = 0$, $\psi_1^{(+)}(x) = 1$ и $\mathcal{U}_+(x) = V(x)$.

Доказательство теоремы 3.1 и предложения 3.2 содержится в §4.

3. Вторая модель. Упрощение модели возможно при дополнительном ограничении на функцию V. Сформулируем его.

Определение 3.5. *Будем относить функцию V к классу $\mathcal{O}^0_{q,d}$ и писать*

$$V \in \mathcal{O}^0_{q,d}, \quad 2q > d \geqslant 3, \tag{3.14}$$

если выполнено (2.31) и для $\widehat{V} = \Phi V$ справедливо следующее. Для любого шара $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$, отделенного от нуля,

$$\widehat{V} \in L_\infty(\mathcal{K}), \quad \text{при } q \geqslant 2, \tag{3.15}$$

$$\widehat{V} \in H^\mu(\mathcal{K}), \ 2\mu > 3, \quad \text{при } 3/2 < q < 2. \tag{3.16}$$

В связи с (3.15), (3.16) отметим, что, в силу $2q > d$, $q > 2$ при $d \geqslant 4$. Поэтому условие (3.16) нужно лишь при $d = 3$.

Вторая модель отличается от (первой) модели (3.9) потенциалом: $\mathcal{U}_\pm(x)$ заменяется на $V(x)I_{m_\pm}$; этот *потенциал диагонален и не зависит от собственных функций* (3.1). Соответствующий модельный оператор есть

$$R^0_\pm(\alpha) = R_\pm - \alpha V(x)I_{m_\pm}, \quad \alpha > 0. \tag{3.17±}$$

Следующая теорема — второй основной результат статьи.

Теорема 3.6. *Пусть для оператора A выполнено условие* 2.1(±) *и потенциал V удовлетворяет условию* (3.14) *при некотором q. Пусть $R^0_\pm(\alpha)$ — модельные операторы* (3.17±). *Тогда справедливы асимптотические соотношения*

$$\Delta^{(\pm)}_q(\lambda_\pm; A, W) = \limsup_{\alpha\to\infty} \alpha^{-q} N_0(R_\pm, WI_{m_\pm}; \alpha) =: \Delta_q(R_\pm, W), \tag{3.18}$$

$$\delta^{(\pm)}_q(\lambda_\pm; A, W) = \liminf_{\alpha\to\infty} \alpha^{-q} N_0(R_\pm, WI_{m_\pm}; \alpha) =: \delta_q(R_\pm, W). \tag{3.19}$$

Замечание 3.7. Поясним значение дополнительных условий (3.15), (3.16). Пусть $V = QV_0$, где для V_0 выполнено (3.14), а Q — непрерывная неотрицательная $\mathbb{Z}^d$-периодическая функция. Ясно, что тогда для V выполнено (2.31), но (3.14) уже не выполняется. Положим

$$q^{(\pm)}_j = \int_\Omega Q(x)|\psi^{(\pm)}_j(x)|^2\,dx, \quad j = 1, \dots, m_\pm, \tag{3.20}$$

$$\mathcal{Q}^{(\pm)} = \operatorname{diag}\{q^{(\pm)}_j\}_1^{m_\pm}. \tag{3.21}$$

Тогда справедливы аналоги соотношений (3.18), (3.19), но роль модельного оператора играет уже не (3.17), а семейство

$$\widetilde{R}_{\pm}(\alpha) = R_{\pm} - \alpha V_0(x) Q^{(\pm)}, \quad \alpha > 0. \tag{3.22}$$

Матрица $Q^{(\pm)}$ — постоянная и диагональная, а потому модели (3.17), (3.22) — одного уровня сложности. Принципиальное отличие, однако, в том, что числа (3.20) (а тогда и матрица (3.21)) зависят от собственных функций $\psi_j^{(\pm)}$.

Замечание 3.8. Есть случай, когда первая и вторая модели совпадают, и условия (3.14), (3.15) не нужны. Он описан в конце замечания 3.4.

Доказательству теоремы 3.6 посвящен §5. Там же дается обоснование сказанному в замечании 3.7.

§4. Доказательство теоремы 3.1

Доказательство разбивается на несколько шагов, что соответствует делению параграфа на пункты. Для определенности ведем рассуждения для знака „+“. Когда это не ведет к недоразумениям, этот знак опускается в обозначениях и в ссылках на формулы.

1. Ниже основной объект изучения — оператор

$$X := X(\lambda_+) = W(A - \lambda_+ I)^{-1} W. \tag{4.1}$$

Он построен для периодического оператора A, описанного в п. 2.1–2.3, и для оператора умножения $W = V^{1/2}$, введенного в п. 2.4. Оператор (4.1) корректно определен в том смысле, как это пояснено в п. 1.5 (см. (1.23), (1.24)). Этот вопрос ниже специально не обсуждается. Поясним, что по ходу доказательства будет видно, что ограниченность оператора (4.1) следует из ограниченности (эталонных) операторов (2.21), (2.22). Как уже отмечалось, критерий ограниченности этих операторов известен. Впрочем, их ограниченность заведомо перекрывается предположением (2.25).

Для упрощения обозначений считаем (без ограничения общности), что $\inf \sigma(A) = 0$.

Пусть $\omega(j,\sigma)$ есть σ-окрестность в $\mathbb{R}^d$ точки k_j. Выберем $\overline{\sigma} > 0$ так, чтобы шары $\omega(j,\overline{\sigma})$, $j = 1,\dots,m$, попарно не пересекались. В дальнейшем считаем $\sigma \in (0,\overline{\sigma}]$. Положим $\omega(\sigma) = \bigcup_{j=1}^m \omega(j,\sigma)$, $\omega^0(\sigma) = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi| < \sigma\}$. Характеристические функции множеств $\omega(j,\sigma)$, $\omega(\sigma)$, $\omega^0(\sigma)$ обозначим соответственно через $\chi_{j\sigma}$, χ_σ, χ_σ^0.

В соответствии с (2.9), (2.11) запишем

$$(A - \lambda_+ I)^{-1} = \Psi_l^*[\chi_\sigma (E_l - \lambda_+)^{-1}]\Psi_l + \Psi_l^*[(1-\chi_\sigma)(E_l - \lambda_+)^{-1}]\Psi_l$$
$$+ \sum_{s \neq l} \Psi_s^*[(E_s - \lambda_+)^{-1}]\Psi_s.$$

Квадратные скобки соответствуют операторам умножения. *В дальнейшем пишем* $E = E_l$, $\Psi = \Psi_l$ и т.п. Положим

$$\Omega_\sigma := \Psi^*[\chi_\sigma(E-\lambda_+)^{-1}]\Psi, \qquad \widehat{\Omega}_\sigma := (A-\lambda_+ I)^{-1} - \Omega_\sigma, \tag{4.2}$$

$$X_\sigma := W\Omega_\sigma W, \qquad \widehat{X}_\sigma = X - X_\sigma = W\widehat{\Omega}_\sigma W. \tag{4.3}$$

Очевидно, $\widehat{X}_\sigma = W(A+I)^{-1/2}(A+I)\widehat{\Omega}_\sigma(A+I)^{-1/2}W$. Из условия 2.1 следует, что оператор $(A+I)\widehat{\Omega}_\sigma$ ограничен. Далее, форма (2.4) и *эталонная* форма

$$b[u,u] = \int |\nabla u|^2 dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d),$$

имеют общую область определения, а потому оператор $(B+I)^{1/2}(A+I)^{-1/2}$ ограничен. Наконец, в силу (2.29), (2.30),

$$W(B+I)^{-1/2} \in \Sigma^0_{2q},$$

а следовательно, $\widehat{X}_\sigma \in \Sigma^0_q$. Таким образом, справедливо

Предложение 4.1. *Для операторов, определенных в* (4.2), (4.3), *выполнено*

$$\widehat{X}_\sigma = X - X_\sigma \in \Sigma^0_q. \tag{4.4}$$

2. Теперь надлежит исследовать оператор X_σ, который допускает представление

$$X_\sigma = Y_\sigma Y_\sigma^*, \quad Y_\sigma = \sum_{j=1}^m Y_{j\sigma}, \tag{4.5}$$

где $Y_{j\sigma}$ — интегральный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$:

$$(Y_{j\sigma}f)(x) = (2\pi)^{-d/2}W(x)\int \chi_{j\sigma}(k)\varphi(x,k)e^{ikx}(E(k)-\lambda_+)^{-1/2}f(k)dk. \tag{4.6}$$

Наряду с $Y_{j\sigma}$ рассмотрим операторы

$$(\mathcal{Y}_{j\sigma}f)(x) = (2\pi)^{-d/2}W(x)\int \chi_{j\sigma}(k)\varphi_j(x)e^{ikx}(r_j(k-k_j))^{-1/2}f(k)dk. \tag{4.7}$$

Сразу же отметим оценку в классе Σ_{2q}:

$$|\mathcal{Y}_{j\sigma}|_{2q} \leqslant C|G|_{2q}, \quad j = 1,\dots,m, \tag{4.8}$$

где G — оператор с ядром (2.22), а C не зависит от σ. Действительно, $\varphi_j \in L_\infty$ и $r_j(\xi)^{-1/2} \asymp |\xi|^{-1}$. Отсюда и из предположения (2.25) следует (4.8).

Существенную техническую роль играет следующее утверждение, доказательство которого приводится в п. 7–9.

Предложение 4.2. *Для операторов* (4.6), (4.7) *справедлива оценка*

$$|Y_{j\sigma} - \mathcal{Y}_{j\sigma}|_{2q} \leqslant C\sigma |G|_{2q}, \quad 0 < \sigma \leqslant \overline{\sigma}, \ j = 1, \dots, m. \tag{4.9}$$

Положим теперь

$$\mathcal{X}_\sigma = \mathcal{Y}_\sigma \mathcal{Y}_\sigma^*, \quad \mathcal{Y}_\sigma = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{Y}_{j\sigma}. \tag{4.10}$$

Из (4.5) и (4.8)–(4.10) непосредственно вытекает оценка

$$|X_\sigma - \mathcal{X}_\sigma|_q = O(\sigma), \quad \sigma \to 0. \tag{4.11}$$

3. Нашим следующим объектом является оператор $\mathcal{X}_\sigma$, для которого мы получим несколько иную запись. Введем обозначения

$$\rho_j(\xi) = (r_j(\xi))^{-1/2}, \quad \rho(\xi) = \operatorname{diag}\{\rho_j(\xi)\}_{j=1}^m, \tag{4.12}$$

$$h_j(\xi) = f(\xi + k_j), \quad h(\xi) = \operatorname{col}\{h_j(\xi)\}_{j=1}^m. \tag{4.13}$$

Преобразуем правую часть в (4.7), полагая $k = \xi + k_j$. Тогда для $\mathcal{Y}_\sigma f$ получим выражение

$$(\mathcal{Y}_\sigma f)(x) = (2\pi)^{-d/2} W(x)\Pi(x) \int \chi_\sigma^0(\xi) e^{ix\xi} \rho(\xi) h(\xi) d\xi, \tag{4.14}$$

где Π определено в (3.4). Введем теперь (используя обозначение (3.8)) оператор $\Gamma_\sigma : \mathfrak{H}_+ \to \mathfrak{G}_+$,

$$\Gamma_\sigma = \mathcal{W}(x)\Phi^*[\chi_\sigma^0 \rho]. \tag{4.15}$$

Тогда (4.12)–(4.15) означает, что $\mathcal{Y}_\sigma f = \Gamma_\sigma h$. Отсюда легко усмотреть, что

$$\mathcal{X}_\sigma = \Gamma_\sigma \Gamma_\sigma^*. \tag{4.16}$$

4. Обратимся теперь к модельному оператору (3.9). Оператор R положителен, и мы находимся в условиях п. 1.4. Роль оператора $X(0)$ сейчас играет оператор

$$\mathcal{X} = \mathcal{W} R^{-1} \mathcal{W}^*, \tag{4.17}$$

который может быть записан в виде

$$\mathcal{X} = \Gamma\Gamma^*, \quad \Gamma = \mathcal{W}(x)\Phi^*[\rho]. \tag{4.18}$$

Оператор Γ_σ из (4.15) отличается от Γ лишь множителем χ_σ^0. Как и при выводе предложения 4.1 для операторов (4.17), (4.18) легко устанавливаются соотношения $\Gamma - \Gamma_\sigma \in \Sigma_{2q}^0$ и

$$\mathcal{X} - \mathcal{X}_\sigma \in \Sigma_q^0. \tag{4.19}$$

В силу предложения 1.1, из (1.30), (1.31) и из (4.19) вытекает

Предложение 4.3. *Справедливы равенства*

$$\Delta_q(R, W) = \Delta_q(\mathcal{X}_\sigma), \qquad \delta_q(R, W) = \delta_q(\mathcal{X}_\sigma), \tag{4.20}$$

где функционалы в левых частях определены в (3.11+), (3.12+).

5. Доказательство теоремы 3.1 получается сопоставлением результатов п. 1–4. Действительно, равенства (1.28+), (1.29+) (при $\varepsilon = +$) сейчас означают, что

$$\partial_q^{(+)}(\lambda_+; A, W) = \partial_q^{(+)}(X), \quad \partial = \Delta, \delta. \tag{4.21}$$

Соотношение (4.4) позволяет заменить в (4.21) X на X_σ:

$$\partial_q^{(+)}(\lambda_+; A, W) = \partial_q(X_\sigma), \quad \partial = \Delta, \delta. \tag{4.22}$$

На основании предложения 1.1 из (4.11) следует, что при $\sigma \to 0$

$$\partial_q(X_\sigma) - \partial_q(\mathcal{X}_\sigma) \to 0, \quad \partial = \Delta, \delta. \tag{4.23}$$

Сопоставляя (4.23) с (4.20), (4.22), приходим к равенствам (3.11+), (3.12+). •

6. Установим теперь предложение 3.2 (для знака „ +“). Сейчас $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+)$. Так как $N_+(\lambda; A, W; \alpha)$ не убывает с ростом $\lambda \in \Lambda$, достаточно установить (3.13+) для $\lambda \in (\lambda_-, \lambda_+)$. Соответствующий оператор $X(\lambda)$ (см. (1.7)) можно записать в виде

$$X(\lambda) = W(A+I)^{-1/2}(A+I)(A-\lambda I)^{-1}(W(A+I)^{-1/2})^*.$$

В п. 1 отмечалось, что $W(A+I)^{-1/2} \in \Sigma^0_{2q}$. Очевидно $(A+I)(A-\lambda I)^{-1} \in \mathfrak{R}$. Таким образом, $X(\lambda) \in \Sigma^0_q$, что, в силу предложения 1.3, равносильно (3.13+). •

7. Осталось установить предложение 4.2. Будем пользоваться обозначениями (3.1), (4.12), (4.13). Введем оператор $\widehat{Y}_{j\sigma}$ по формуле

$$(\widehat{Y}_{j\sigma} f)(x) = (2\pi)^{-d/2} W(x) \int \chi_{j\sigma}(k)\varphi(x,k)e^{ikx}\rho_j(k-k_j)f(k)dk \tag{4.24}$$

и положим $T_{j\sigma} = Y_{j\sigma} - \widehat{Y}_{j\sigma}$. Замена $k = k_j + \xi$ в (4.6), (4.24) дает

$$(T_{j\sigma} f)(x) = (2\pi)^{-d/2} W(x) e^{ik_j x} \int \chi^0_\sigma(\xi)\widehat{\varphi}_j(x,\xi)e^{ix\xi}\theta(\xi)h_j(\xi)d\xi, \tag{4.25}$$

где $\widehat{\varphi}_j(x,\xi) := \varphi(x, k_j+\xi)$ и функция θ ограничена при $|\xi| \leqslant \overline{\sigma}$. Наряду с определенным в (4.25) оператором $T_{j\sigma}$ рассмотрим оператор $\mathcal{T}_{j\overline{\sigma}}$:

$$(\mathcal{T}_{j\overline{\sigma}} f)(x) = (2\pi)^{-d/2} W(x) \int \chi^0_{\overline{\sigma}}(\xi)\widehat{\varphi}_j(x,\xi)e^{ix\xi}|\xi|^{-1}h_j(\xi)d\xi. \tag{4.26}$$

В п. 9 мы проверим, что

$$\tau_\mu(\widehat{\varphi}_j,\overline{\sigma}) := \sup_x \|\widehat{\varphi}_j(x,\cdot)\|_{H^\mu(\omega^0(\overline{\sigma}))} < \infty, \quad \forall \mu \in \mathbb{N}. \tag{4.27}$$

Отсюда следует, что функция $\chi^0_{\overline{\sigma}}\widehat{\varphi}_j$ является *мультипликатором для интегральных ядер* во всех классах Σ_q. (По поводу мультипликаторов для интегральных ядер см., например, [БС]. Так как $q > d/2 > 1$, т.е. классы Σ_q нормируемы, то заведомо достаточно условия (4.27) при каком либо $\mu > d/2$). Сравним (2.22) с (4.26). Из (2.25) и (4.27) следует оценка

$$|\mathcal{T}_{j\overline{\sigma}}|_{2q} \leqslant C\tau_\mu(\widehat{\varphi}_j,\overline{\sigma})|G|_{2q}, \quad 2\mu > d. \tag{4.28}$$

Ядро оператора $T_{j\sigma}$ отличается от ядра для $\mathcal{T}_{j\overline{\sigma}}$ множителями e^{ik_jx} и $\chi^0_\sigma(\xi)|\xi|\theta(\xi)$. Отсюда и из (4.28) сразу следует (с постоянной, независящей от $\sigma \in (0,\overline{\sigma}]$), что

$$|T_{j\sigma}|_{2q} \leqslant C\sigma|G|_{2q}. \tag{4.29}$$

8. Теперь нужно получить аналогичную оценку для оператора $S_{j\sigma} = \widehat{Y}_{j\sigma} - \mathcal{Y}_{j\sigma}$,

$$(S_{j\sigma}f)(x) = (2\pi)^{-d/2}W(x)e^{ik_jx}\int \chi^0_\sigma(\xi)(\widehat{\varphi}_j(x,\xi) - \varphi_j(x))e^{ix\xi}\rho_j(\xi)h_j(\xi)d\xi. \tag{4.30}$$

Отметим, что $\varphi_j(x) = \widehat{\varphi}_j(x,0)$, и справедливо представление

$$\widehat{\varphi}_j(x,\xi) - \varphi_j(x) = \sum_{1\leqslant s\leqslant d} \xi_s\gamma_{js}(x,\xi). \tag{4.31}$$

Функции γ_{js} в (4.31) выберем в виде

$$\gamma_{js}(x,\xi) = \int_0^1 \widehat{\varphi}_{js}(x,t\xi)dt, \quad \widehat{\varphi}_{js} = \partial\widehat{\varphi}_j/\partial\xi_s. \tag{4.32}$$

Мы увидим (см. п. 9), что для γ_{js} справедливы соотношения вида (4.27). Отсюда и из (4.30) очевидно вытекает неравенство, аналогичное (4.29):

$$|S_{j\sigma}|_{2q} \leqslant C\sigma|G|_{2q}. \tag{4.33}$$

Ясно, что оценки (4.29), (4.33) приводят к (4.9).

9. Осталось[2] получить (4.27) и аналогичные соотношения для функций γ_{js} из (4.32). В соответствии с (2.14), функция $\widehat{\varphi}_j(x,\xi)$ является слабым периодическим решением (решением класса $\widetilde{H^1}(\Omega)$) уравнения

$$-(\operatorname{div}+ik)g(x)(\nabla+ik)\widehat{\varphi}_j+p(x)\widehat{\varphi}_j=E(k)\widehat{\varphi}_j, \quad k=k_j+\xi. \tag{4.34}$$

Число $E(k_j)=\lambda_+$ есть *простое* собственное значение оператора $\widetilde{A}(k_j)$. Поэтому при $|\xi|\leqslant\overline{\sigma}$ и достаточно малом $\overline{\sigma}$ функция $E(k_j+\xi)$ вещественно аналитична по ξ. Далее, $\widehat{\varphi}_j$ — аналитическая по ξ, $|\xi|\leqslant\overline{\sigma}$, вектор-функция со значениями в $\widetilde{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющая (4.34); она нормирована в $L_2(\Omega)$. В описываемых условиях решение $\widehat{\varphi}_j$ аналитически продолжается (вообще говоря, с нарушением нормировки) в некоторой *комплексный* шар с центром в точке $\xi=0$; радиус шара снова обозначаем через $\overline{\sigma}$.

Для дальнейшего существенна оценка

$$\max_x|\widehat{\varphi}_j(x,\xi)|\leqslant C\|\widehat{\varphi}_j(\cdot,\xi)\|_{L_2(\Omega)}, \quad |\xi|\leqslant\overline{\sigma}. \tag{4.35}$$

В связи с этим поясним следующее. Разделяя в (4.34) вещественную и мнимую части, получим вещественную систему двух уравнений с одинаковыми диагональными главными частями. В [ЛУ] для решений таких систем получены (см. теорему 2.1 в гл. VII) оценки максимума модуля при условиях Дирихле. Однако вывод этих оценок без существенных изменений переносится на случай периодических условий. В итоге получается оценка (4.35). Отметим дополнительно, что функция $\widehat{\varphi}_j$ непрерывна по x в $\overline{\Omega}$.

В наших условиях правая часть в (4.35) ограничена, а потому

$$|\widehat{\varphi}_j(x,\xi)|\leqslant C, \quad x\in\overline{\Omega}, \ |\xi|\leqslant\overline{\sigma}. \tag{4.36}$$

В силу аналитичности $\widehat{\varphi}_j$, из (4.36) следуют подобные оценки для производных от $\widehat{\varphi}_j$ по ξ (при этом, возможно, придется уменьшить $\overline{\sigma}$). Сказанное приводит к (4.27).

Функции γ_{js} из (4.32) вместе с $\widehat{\varphi}_{js}$ аналитичны при $|\xi|\leqslant\overline{\sigma}$ и ограничены при $x\in\overline{\Omega}$, $|\xi|\leqslant\overline{\sigma}$. В силу аналитичности сказанное переносится (возможно, при меньшем $\overline{\sigma}$) на производные от γ_{js} по ξ. Следовательно, для γ_{js} справедливы неравенства вида (4.27).

Доказательство теоремы 3.1 завершено.

§5. Доказательство теоремы 3.6

С учетом теоремы 3.1 достаточно показать совпадение правых частей в (3.11) и (3.18) и в (3.12) и (3.19). Другими словами, надо установить равенства

$$\partial_q(R_\pm,W_\pm)=\partial_q(R_\pm,W), \quad \partial=\Delta,\delta. \tag{5.1}$$

Как и в §4, доказательство будем вести для знака „+“, который, как правило, станем опускать в обозначениях.

---

[2]Автор благодарит А. Б. Александрова и Н. Н. Уральцеву, советами которых он пользовался при изложении п. 9.

1. Для изучения левой части в (5.1) воспользуемся (4.20), (4.16). Так как ненулевые спектры операторов $\mathcal{X}_\sigma$ и

$$Z_\sigma := \Gamma_\sigma^* \Gamma_\sigma \tag{5.2}$$

одинаковы, то

$$\partial_q(R, \mathcal{W}) = \partial_q(Z_\sigma), \quad \partial = \Delta, \delta. \tag{5.3}$$

В силу (4.15) (см. обозначения (3.5), (3.8)) и (5.2),

$$Z_\sigma = [\chi_\sigma^0 \rho] \Phi [\mathcal{P} V] \Phi^* [\chi_\sigma^0 \rho]. \tag{5.4}$$

Матрицу (3.5) запишем[3] в виде

$$\mathcal{P}(x) = \{e^{i(k_l - k_j)x} \overline{\varphi_j(x)} \varphi_l(x)\}_{j,l=1}^m.$$

Функции $\overline{\varphi}_j \varphi_l$ — непрерывные и $\mathbb{Z}^d$-периодические. Приблизим их тригонометрическими многочленами: по $\varepsilon > 0$ найдем представление

$$\overline{\varphi_j(x)} \varphi_l(x) = e_{jl}(x) + \widehat{e}_{jl}(x), \quad j, l = 1, \ldots, m, \tag{5.5}$$

$$e_{jl}(x) = \sum_{|s| \leqslant L} \beta_{jl,s} \exp(2\pi i s x), \quad j, l = 1, \ldots, m, \tag{5.6}$$

$$|\widehat{e}_{jl}(x)| \leqslant \varepsilon, \quad j, l = 1, \ldots, m. \tag{5.7}$$

Функции φ_j нормированы, а потому можно считать, что

$$\beta_{jj,0} = 1, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{5.8}$$

В соответствии с разложением (5.5) запишем $\mathcal{P}$ в виде

$$\mathcal{P}(x) = \mathcal{E}(x) + \widehat{\mathcal{E}}(x).$$

Тогда и оператор (5.4) разложится в сумму

$$Z_\sigma = \mathcal{Z}_\sigma + \widehat{\mathcal{Z}}_\sigma, \tag{5.9}$$

$$\widehat{\mathcal{Z}}_\sigma = [\chi_\sigma^0 \rho] \Phi W \widehat{\mathcal{E}}(x) W \Phi^* [\chi_\sigma^0 \rho]. \tag{5.10}$$

---

[3]Ниже l — матричный индекс. Его не следует смешивать с номером зонной функции $E = E_l$, который теперь опускается.

Предложение 5.1. *Для оператора* (5.10) *справедлива оценка*

$$|\widehat{\mathcal{Z}}_\sigma|_q \leqslant C\varepsilon |G|^2_{2q}, \tag{5.11}$$

где G *— оператор с ядром* (2.22).

Доказательство прямо следует из оценки

$$|W\Phi^*[\chi^0_\sigma \rho]|_{2q} \leqslant C|G|_{2q}$$

и из (5.7). •

2. Теперь займемся первым слагаемым в правой части (5.9). Оператор $\mathcal{Z}_\sigma$ действует в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ и представляет собой матричный интегральный оператор

$$\mathcal{Z}_\sigma = \{\mathcal{Z}_{jl,\sigma}\}^m_{j,l=1}, \quad \mathcal{Z}_{jl,\sigma} = \sum_{|s| \leqslant L} \beta_{jl,s} \mathcal{J}^{(s)}_{jl,\sigma}. \tag{5.12}$$

Здесь числа $\beta_{jl,s}$ — те же, что в (5.6) и (при $\widehat{V} = \Phi V$)

$$(\mathcal{J}^{(s)}_{jl,\sigma} h)(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \chi^0_\sigma(\xi)\rho_j(\xi) \int \widehat{V}(\xi - \eta + k_j - k_l - 2\pi s)$$
$$\times \chi^0_\sigma(\eta)\rho_l(\eta)h(\eta)d\eta; \quad j, l = 1, \dots, m; \ |s| \leqslant L; \ 0 < \sigma \leqslant \overline{\sigma}. \tag{5.13}$$

Предложение 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.6 *и* $\overline{\sigma}$ *достаточно мало. Тогда*

$$\mathcal{J}^{(s)}_{jl,\sigma} \in \Sigma^0_q \quad \textit{при} \ |j - l| + |s| > 0. \tag{5.14}$$

Доказательство. Напомним соглашение (2.16) о выборе реализаций точек k_j. Напомним также, что $\rho_j(\xi) \asymp |\xi|^{-1}$ при $|\xi| \leqslant \overline{\sigma}$. Аргумент функции $\widehat{V}$ в (5.13) пробегает шар радиуса 2σ с центром $k_j - k_l - 2\pi s \neq 0$. Этот шар отделен от нуля при достаточно малом $\overline{\sigma}$, а потому выполнено (3.15), (3.16). Поскольку $d \geqslant 3$, ядро в (5.13) при условии (3.15) есть ядро Гильберта–Шмидта:

$$\mathcal{J}^{(s)}_{jl,\sigma} \in \mathfrak{S}_2, \quad q \geqslant 2, \ |j - l| + |s| > 0. \tag{5.15}$$

Далее, ядро $\chi^0_\sigma(\xi)\rho_j(\xi)\chi^0_\sigma(\eta)\rho_l(\eta)$ — вырожденное ранга 1. Условие (3.16) предполагает $d = 3$, а потому множитель $\widehat{V}$ в (5.13) является *мультипликатором* — в частности, в классе $\mathfrak{S}_1$. Таким образом,

$$\mathcal{J}^{(s)}_{jl,\sigma} \in \mathfrak{S}_1, \quad 3 < 2q < 4, \ |j - l| + |s| > 0. \tag{5.16}$$

Включения (5.15), (5.16) заведомо обеспечивают (5.14). •

3. Рассмотрим теперь оператор

$$\mathcal{J}_\sigma := \operatorname{diag}\{\mathcal{J}^{(0)}_{jj,\sigma}\}_{j=1}^m, \tag{5.17}$$

ядро которого, очевидно, есть

$$(2\pi)^{-d/2}\chi^0_\sigma(\xi)\rho(\xi)\widehat{V}(\xi-\eta)\chi^0_\sigma(\eta)\rho(\eta). \tag{5.18}$$

Из (5.18) видно, что $\mathcal{J}_\sigma$ можно записать в виде

$$\mathcal{J}_\sigma = [\chi^0_\sigma\rho]\Phi V\Phi^*[\chi^0_\sigma\rho]. \tag{5.19}$$

Далее, (5.8), (5.12) вместе с (5.14), (5.17) дают включение

$$\mathcal{Z}_\sigma - \mathcal{J}_\sigma \in \Sigma^0_q. \tag{5.20}$$

Наконец, из (5.9), (5.20) и из оценки (5.11) следует при $\varepsilon \to 0$, что

$$Z_\sigma - \mathcal{J}_\sigma \in \Sigma^0_q. \tag{5.21}$$

Из (5.3) и (5.21) получаем равенства

$$\partial_q(R, W) = \partial_q(\mathcal{J}_\sigma), \quad \partial = \Delta, \delta. \tag{5.22}$$

4. Обратимся теперь к модельному семейству (3.17). Введем обозначения

$$M := W\Phi^*[\rho], \qquad \mathcal{J} = M^*M, \qquad M_\sigma := M[\chi^0_\sigma]$$

и заметим (см. (5.19)), что $\mathcal{J}_\sigma = M^*_\sigma M^\sigma_\sigma$. Для семейства (3.17) роль оператора $X(0)$ (см. п. 1.4) играет оператор $F := WR^{-1}W = MM^*$. По образцу доказательства предложения 4.1 легко проверить, что

$$\mathcal{J} - \mathcal{J}_\sigma \in \Sigma^0_q.$$

Отсюда и из (1.30), (1.31) имеем:

$$\partial_q(R, W) = \partial_q(F) = \partial_q(\mathcal{J}) = \partial_q(\mathcal{J}_\sigma), \quad \partial = \Delta, \delta. \tag{5.23}$$

Сопоставляя (5.22), (5.23), приходим к (5.1). Этим завершается доказательство теоремы 3.6.

5. Остается пояснить сказанное в замечании 3.7. В его условиях план вывода соотношений вида (5.22) сохраняется. Отличие лишь в том, что теперь суммами вида (5.6) нужно приближать периодические функции $Q\overline{\varphi}_j\varphi_l$. При этом условия нормировки (5.8) заменятся условиями

$$\beta_{jj,0} = q_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

где числа q_j определены в (3.21). В итоге мы приходим к модели (3.22) вместо модели (3.17).

Список литературы

[Б1] Бирман М. Ш., *О дискретном спектре в лакунах возмущенного периодического оператора второго порядка*, Функц. анал. и его прил. **25** (1991), № 2, 89–92.

[Б2] Бирман М. Ш., *Дискретный спектр периодического оператора Шредингера, возмущенного убывающим потенциалом*, Алгебра и анализ **8** (1996), № 1, 3–20.

[БС] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Оценки сингулярных чисел интегральных операторов*, Успехи мат. наук **32** (1977), № 1, 17–84.

[ЛУ] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.

[РС] Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики.* Т. 4. *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.

[С] Сафронов О. Л., *Рождение и исчезновение дискретного спектра в лакуне периодического оператора второго порядка при знакопеременных убывающих возмущениях*, Алгебра и анализ **9** (1997), № 1, 148–166.

[Ск] Скриганов М. М., *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **171** (1985), 3–122.

[B1] Birman M. Sh., *Discrete spectrum in the gaps of a continuous one for perturbations with large coupling constant*, Estimates and Asymptotics for Discrete Spectra of Integral and Differential Equations, Adv. Soviet Math., vol. 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 57–73.

[B2] Birman M. Sh., *Discrete spectrum in a gap of perturbed periodic operator at large coupling constants*, Rigorous Results in Quantum Dynamics (Liblice, 1990), World Sci. Publishing, Singapore, 1991, pp. 16–24.

[B3] Birman M. Sh., *The discrete spectrum in gaps of the perturbed periodic Schrödinger operator.* I. *Regular perturbations*, Boundary Value Problems, Schrödiger Operators, Deformation Quantization, Math. Top., vol. 8: Adv. Partial Differential Equations, Akademie Verlag, Berlin, 1995, pp. 334–352.

[BS1] Birman M. Sh., Solomyak M. Z., *Estimates for the number of negative eigenvalues of the Schrödinger operator and its generalizations*, Estimates and Asymptotics for Discrete Spectra of Integral and Differential Equations, Adv. Soviet Math., vol. 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 1–55.

[BS2] Birman M. Sh., Solomyak M. Z., *Schrödinger operator. Estimates for number of bound states as function-theoretical problem*, Spectral Theory of Operators (Novgorod, 1989), Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 150, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 1–54.

[BW] Birman M. Sh., Weidl T., *The discrete spectrum in a gap of the continuous one for compact supported perturbations*, Mathematical Results in Quantum Mechanics (Blossin, 1993), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 70, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 9–12.

[L] Laptev A., *Asymptotics of the negative discrete spectrum of a class of Schrödinger operators with large coupling constant*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), no. 2, 481–488.

С.-Петербургский
государственный университет,
физический факультет
198904, Санкт-Петербург
Ст. Петергоф
ул. Ульяновская, 1

Поступило 15 августа 1997 г.