В. М. Гольдштейн, Продолжение функций с первыми обобщенными производными из плоских областей,
Докл. АН СССР, 1981, том 257, номер 2, 268–271

https://www.mathnet.ru/dan44299

ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Смейл*, УМН, т. 25, 1, 113 (1970). [2] *J.W. Robbin*, Ann.Math., v. 94, 3, 447 (1971). [3] *C.J. Robinson*, Diff.Equations, v. 22, 1, 28 (1976). [4] *C. Robinson*, Ann.Math., v. 99, 1, 154 (1974). [5] *И.У. Бронштейн, В.П. Бурдаев*, В сб.: V Всесоюзн.конфер. по качественной теории дифференциальных уравнений, Кишинев, "Штиинца", 1979, стр. 30. [6] *И.У. Бронштейн*, Расширения минимальных групп преобразований, Кишинев, "Штиинца", 1975. [7] *R.J. Sacker, G.R. Sell*, J.Diff. Equations, v. 15, 3, 429 (1974); v. 22, 2, 478 (1976); v. 22, 2, 497 (1976); v. 27, 1, 106 (1978). [8] *J.F. Selgrade*, Trans.Am.Math. Soc., v. 203, 359 (1975). [9] *И.У. Бронштейн, В.Ф. Черний*, Дифференц.уравнения, т. 14, 10, 1739 (1978). [10] *M.W. Hirsch, C.C. Pugh, M. Shub*, Invariant Manifolds Lecture Notes in Math., v. 583, 1977. [11] *N. Fenichel*, Indiana Univ. Math.J., v. 23, 1109 (1974). [12] *И.У. Бронштейн, В.Ф. Черний*, Изв. АН МССР, сер. физ.-техн. и матем. наук, № 3, 12 (1976). [13] *J.F. Franke, J.F. Selgrade*, J.Diff.Equations, v. 26, 1, 27 (1977). [14] *Н. Бурбаки*, Дифференцируемые и аналитические многообразия, М., "Мир", 1975.

УДК 517.54 + 517.514 МАТЕМАТИКА

В.М. ГОЛЬДШТЕЙН

ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ С ПЕРВЫМИ ОБОБЩЕННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ИЗ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ

(Представлено академиком А.Д. Александровым 19 IV 1980)

В заметке формулируются необходимые и достаточные условия того, чтобы граница плоской односвязной ограниченной области и ее дополнение одновременно удовлетворяли условию продолжения для классов $L_p^1(G)$. Условие продолжения, которое будет формально определено ниже, эквивалентно требованию, чтобы каждая функция класса $L_p^1(G)$ или $L_p^1(R^2\setminus G)$ продолжалась до функции класса $L_p^1(R^2)$.

Как обычно, $L_p^l(G)$ – это пространство локально суммируемых в области $G \subset R^n$ функций, имеющих обобщенные производные до порядка l включительно, каждая из которых суммируема в степени p. Полунорма в пространстве определяется равенством

$$\|u\|_{L_p^l(G)} = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=l} \left\| \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{L_p(G)}.$$

Условие Альфорса. Жорданова кривая γ удовлетворяет условию Альфорса локально, если для любой точки $x_0 \subset \gamma$ существует окрестность $V(x_0)$ такая, что любая тройка точек $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \subset V(x_0)\cap\gamma$ удовлетворяет неравенству $C|\xi_1-\xi_2| \geqslant |\xi_1-\xi_3|$. Здесь точка ξ_3 лежит между точками ξ_1, ξ_2 на дуге $\gamma\cap V(x_0)$, постоянная C не зависит от выбора точки x_0 и точек ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Теорема 1. *Для того чтобы ограниченная плоская односвязная область G удовлетворяла условию продолжения для $L_p^1(G)$, $p \geqslant 2$, т.е. операторы $\theta_1: L_p^1(G) \to L_p^1(R^2)$, $\theta_2: L_p^1(R^2\setminus G) \to L_p^1(R^2)$, $\theta_2(u)|_{R^2\setminus G} = u$, $\theta_1(u)|_G = u$ существовали и были ограниченными, необходимо и достаточно, чтобы ее граница была жордановой кривой, удовлетворяющей локально условию Альфорса.*

При $1 \leqslant p < 2$ результат остается верным, если потребовать от области $G \subset R^2$ локальной связности в каждой граничной точке. При $p = 2$ результат получен в работе ([1]). Те же условия продолжения пригодны и для класса B_p^l, $l < 1$, $lp = 2$ ([2]).

Класс областей, удовлетворяющих условию Альфорса, существенно шире класса Lip 1, для которого результат о продолжении известен. Мы не приводим истории вопроса, отсылая читателя к монографиям ([3], [4]).

Совпадение условий продолжения для различных классов объясняется тем, что эти условия связаны только со свойствами емкости, индуцированной функциональным классом, а не с природой класса.

Доказательство достаточности. Если область G удовлетворяет условию Альфорса, то для некоторой окрестности $V(\partial G)$ границы ∂G существует квазиизометрия $\varphi: V(\partial G) \cap \bar{G} \to V(\partial G) \cap (R^2 \setminus G)$, $\varphi(x) = x$ при $x \in \partial G$ ([5]). Эту квазиизометрию можно аппроксимировать гладкими квазиизометриями, осуществляющими отражение для семейства гладких границ, сходящихся к ∂G. Для всей совокупности этих гладких кривых выполняется условие Альфорса с ограниченной в совокупности последовательностью постоянных в условии Альфорса. В области с гладкой границей продолжение осуществляется при помощи гладкой квазиизометрии с использованием инвариантности классов L_p^1 при квазиизометриях ([6]). Чтобы завершить доказательство достаточности, остается сделать предельный переход.

Необходимость следует из более общего результата, справедливого для пространств $W_p^l(G)$. Предварительно сформулируем необходимые для этого результата свойства емкости.

Определение (l, p)-емкости. Пару $(F_0, F_1 \subset G)$ замкнутых относительно области $G \subset R^n$ множеств назовем допустимой, если F_0, F_1 связны и $F_0 \cap F_1 = \phi$. Функция u называется (l, p)-допустимой для пары (F_0, F_1) в области G, если $u \equiv 0$ на F_0, $u \equiv 1$ на F_1 и $u \in L_p^l(G) \cap C^\infty(G)$. (l, p)-Емкостью $C_p^l(F_0, F_1, G, p)$, $p < \infty$ пары (F_0, F_1) назовем число $\inf \|u\|_{L_p^l(G)}$, где нижняя грань берется по всем (l, p)-допустимым функциям u. Если допустимых функций не существует, полагаем $C_p^l(\cdot) = \infty$.

Перечислим простейшие свойства (l, p)-емкости: при подобии $\varphi(x) = kx$ (l, p)-емкость изменяется в k^{n-lp} раз; (l, p)-емкость не возрастает при уменьшении области определения или при рассмотрении вместо F_0 или F_1 их замкнутых относительно области G подмножеств; для монотонно убывающей последовательности компактов $\{F_{1,m}\}$ возможен предельный переход

$$\lim_{m \to \infty} C_p^l(F_0, F_{1,m}, G) = C_p^l\Big(F_0, \bigcap_{m=1}^{\infty} F_{1,m}, G\Big).$$

Приводимые ниже свойства (l, p)-емкости можно получить из простейших и теорем вложения.

Лемма 1. *Пусть $G \subset R^n$ – область с гладкой границей, (F_0, F_1) – пара непересекающихся компактов, принадлежащих G.*

Тогда при $lp > n$ $C_p^l(F_0, F_1, G) > 0$.

Лемма 2. *Пусть $lp > n$. Существует постоянная $\alpha^2(l, p) > 0$ такая, что*

$C_p^l(F_0, F_1, B(0, r)) \geqslant [\operatorname{dist}(F_0, F_1)]^{n-lp} \alpha^2(l, p)$.

Лемма 3. *Для любых двух непересекающихся компактов F_0, F_1, лежащих в шаровом слое $S_{R,r} = B(0, R) \setminus B(0, r)$ и соединяющих сферы $S(0, R)$ и $S(0, r)$,* *справедливы неравенства:*

1) *при* $lp > n$

$$C_p^l(F_0, F_1, S_{R,r}) \geqslant -\beta^2(l,p)(R^{-lp+n} - r^{-lp+n});$$

2) *при* $lp = n$

$$C_p^l(F_0, F_1, S_{R,r}) \geqslant \beta^2(l,p)\ln\frac{R}{r};$$

3) *при* $lp \in [n-1, n)$

$$C_p^l(F_0, F_1, S_{R,r}) \geqslant \beta^2(l,p)(R^{n-lp} - r^{n-lp}), \qquad \beta^2(l,p) > 0.$$

Лемма 4. *Пусть* (F_0^m, F_1^m) — *последовательность пар связных компактов, удовлетворяющих условиям:*

а) *существует постоянная* $a^2 > 0$ *такая, что* $\operatorname{diam} F_0^m \geqslant a^2$ *и* $\operatorname{diam} F_1^m \geqslant a^2$ *при всех* m;

б) *существует такая точка* x_0, *что* $[\operatorname{dist}(F_0^m, x_0) + \operatorname{dist}(F_1^m, x_0)] \to 0$ *при* $m \to \infty$.

Тогда при $lp \geqslant n$

$$\lim_{m\to\infty} C_p^l(F_0^m, F_1^m, R^n) = \infty.$$

Следствие. *Если область* $G \subset R^n$ *удовлетворяет условию продолжения для* $L_p^l(G)$ $(W_p^l(G))$ *при* $lp \geqslant n$, *то ее граница локально связна в каждой граничной точке.*

Условие продолжения сформулировано в теореме 1.

Лемма 5. *Рассмотрим две концентрические сферы* $S(0,1)$ *и* $S(0,r), r<1$. *Если* $lp < n$, *то функция* $\psi_p^l(r)$, *равная* $C_p^l(B(0,r), R^n \setminus \overline{B(0,1)}, R^n)$, *стремится к нулю при* $r \to 0$.

Теорема 2. *Если плоская ограниченная односвязная область* G *удовлетворяет двустороннему условию продолжения для* $(lp \geqslant 2)$ $L_p^l(G)$ *или* $W_p^l(G)$ *(т.е. операторы продолжения*

$$\theta_{p,1}^l : L_p^l(G) \to L_p^l(R^2)(W_p^l(G) \to W_p^l(R^2)), \qquad \theta_{p,1}^l\, u|_G = u,$$

$$\theta_{p,2}^l : L_p^l(R^2 \setminus \overline{G}) \to L_p^l(R^2)(W_p^l(R^2 \setminus \overline{G}) \to W_p^l(R^2)), \qquad \theta_{p,2}^l\, u|_{R^2 \setminus G} = u,$$

существуют и являются ограниченными операторами), то ее граница является замкнутой жордановой кривой, удовлетворяющей локально условию Альфорса.

При $1 \leqslant lp < 2$ теорема справедлива, если потребовать заранее локальной связности области G в каждой граничной точке.

Следствие леммы 4 позволяет получить локальную связность области G в каждой граничной точке при $lp \geqslant 2$. Из локальной связности следует, что граница области является жордановой кривой [1].

Доказательство выполнения условия Альфорса ведется разными способами при $lp > 2$ и при $lp \leqslant 2$. Если $lp > 2$ и условие Альфорса не выполнено, то можно найти на границе области последовательность пар точек, (l,p)-емкость которых стремится к ∞ в R^2 значительно быстрее, чем в области $G(R^2 \setminus \overline{G})$. Это следует из лемм 2, 3. В то же время двустороннее условие продолжения исключает такую возможность. Для $lp \leqslant 2$ доказательство основано на леммах 4, 5, позволяющих получить противоречие за счет сравнения (l, p)-емкости конденсатора Греча ([5]) в области (или ее дополнении) и плоскости.

З а к л ю ч и т е л ь н о е   з а м е ч а н и е. Полученные в теореме 1 необходимые и достаточные условия совпадают с необходимыми и достаточными условиями, полученными в работе ([7]) для продолжения функций класса BV, если интерпретировать эти условия для плоских областей и потребовать их выполнения одновременно для области и ее дополнения.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР, Новосибирск

Поступило
29 V 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *С.К. Водопьянов, В.М. Гольдштейн, Ю.Г. Решетняк,* УМН, т. 34, № 1 (1979). [2] *В.М. Гольдштейн,* ДАН, т. 247, № 1 (1979). [3] *О.В. Басов, В.П. Ильин, С.К. Никольский,* Интегральные представления функций и теорема вложения, М., "Наука", 1975. [4] *Э. Стейн,* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., "Мир", 1973. [5] *Л. Альфорс,* Лекции по квазиконформным отображениям, М., "Мир", 1969. [6] *С.К. Водопьянов, В.М. Гольдштейн,* Сиб. матем. журн., т. 17, № 3 (1979). [7] *Ю.Д. Бураго, В.Г. Мазья,* Зап. научн. семинаров ЛОМИ, № 3 (1967).

УДК 518.5

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР Ю.Л. ЕРШОВ

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЯХ РЕГУЛЯРНО ЗАМКНУТЫХ ПОЛЕЙ

В работе автора ([1]) было указано большое семейство классов регулярно замкнутых полей, имеющих разрешимые теории (классы $\mathfrak{F}^*_{\mathfrak{G}}$ ($\mathfrak{F}^*_{\mathfrak{G},\alpha,p}$), где $\mathfrak{G}$ – рекурсивный допустимый класс конечных групп). К сожалению, класс всех регулярно замкнутых полей (даже характеристики 0) имеет неразрешимую теорию (([1]), теорема 5). Причиной этой неразрешимости является то, что группой Галуа регулярно замкнутого поля может быть произвольная проективная группа ([2]). Это не исключало возможности нахождения широкого класса регулярно замкнутых полей с достаточно "хорошими" группами Галуа, который имел бы разрешимую теорию. И, действительно, оказалось, что, например, класс $\cup \{ \mathfrak{F}^*_{\mathfrak{G}} \mid \mathfrak{G}$ – допустимый класс конечных групп$\}$ имеет разрешимую теорию.

Пусть G – проконечная группа, $H_f(G)$ – семейство всех конечных гомоморфных образов группы G. Группу G назовем д о п у с т и м о й, если для любых двух эпиморфизмов $\varphi: G \to H_0$, $\psi: H_1 \to H_0$, $H_0, H_1 \in H_f(G)$ существует эпиморфизм $\varphi': G \to H_1$ такой, что $\psi\varphi' = \varphi$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Проективная проконечная группа G является допустимой тогда и только тогда, когда $H_f(G)$ – допустимый класс, а G является $H_f(G)$-универсальной группой.*

Обозначим через R^* класс всех совершенных регулярно замкнутых полей с допустимой группой Галуа. Из предложения 1 сразу следует, что

$R^* = \cup \{ \mathfrak{F}^*_{\mathfrak{G}} \mid \mathfrak{G}$ – допустимый класс групп$\}$.

Т е о р е м а 1. *Элементарная теория $\mathrm{Th}(R^*)$ класса R^* разрешима.*