

Б. Г. Габдулхаев, Р. Н. Шарипов

ОПТИМИЗАЦИЯ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ  
ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ  
КОШИ И АДАМАРА

В в е д е н и е

В настоящее время по приближенным методам вычисления различных сингулярных интегралов имеются многочисленные результаты, подробный обзор соответствующих результатов имеется в специальных обзорных работах [1, 2], а также в монографиях [3, 4, 5, 6]. В связи со сказанным возникла задача оптимизации квадратурных и кубатурных формул для сингулярных интегралов (с. и.). Первый результат в этом направлении получен в работах [7, 8] В. В. Иванова, в которых поставлена и решена задача оптимизации квадратурных формул с простыми фиксированными равноотстоящими узлами для с. и. с ядром Коши по единичной окружности комплексной плоскости, в этих работах оптимизация рассматривалась в классах  $H_\alpha(M)$  и  $W^r(M)$ , где  $0 < \alpha < 1, r \in \mathbb{N}$ . В дальнейшем эти исследования продолжены в различных направлениях в работах Б. Г. Габдулхаева, М. А. Шешко, Р. Н. Шарипова, Л. А. Онегова, Г. Д. Велева, Л. А. Апайчевой и др. Подробный обзор соответствующих результатов имеется в упоминавшихся уже обзорной работе [2] и гл. III монографии [4], в работах [9, 10] а также в кандидатских диссертациях Р. Н. Шарипова и Л. А. Апайчевой [12].

Далее, для с. и. наряду с обычными (т. е. с простыми узлами) квадратурными и кубатурными формулами появились исследования по формулам с кратными узлами. Первые результаты в этом направлении получены в работах Б. Г. Габдулхаева [13], И. Н. Мелешко [14], Ю. Солиева [15] и др. Обзор полученных в этой области результатов имеется в обзорной работе [2] и в кандидатской диссертации Ю. Солиева [15]. В связи со сказанным для с. и. возникла задача оптимизации квадратурных и кубатурных формул с кратными узлами. Эта задача впервые поставлена и решена в работе авторов [16], указанный результат перенесен Р. Н. Шариповым на с. и. в смысле конечной части Адамара (см. например в [11]) и на многомерные с. и. Коши [17].

Данная работа посвящена подробному изложению соответствующих результатов авторов [16, 11] по оптимизации квадратурных формул с кратными узлами произвольной конечной кратности  $\gamma \geq 1$  для одномерных с. и. Коши и Адамара. Указанная задача представляет значительные трудности и она состоит, очевидно, из ряда задач, имеющих самостоятельный теоретический и практический интерес. Однако авторам удалось разделить ее лишь на две задачи в случаях соответственно подвижной и неподвижной особенностей и дать их решение в рамках единой схемы исследований, что и является одной из особенностей работы. При этом существенным образом использованы результаты по теории сплайн-аппроксимации функций и точечные и равномерные оценки сингулярных интегралов, изложенные в § 2.

## § 1. Постановка основных задач

В классе плотностей  $F \subset C^{m-1}[-1,1]$  рассмотрим с. и. вида

$$S(m, f, t) = \int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{(x-t)^m}, \quad -1 < t < 1, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши при  $m=1$  (см., напр., [18, 19]) и в смысле конечной части по Адамару при  $m \geq 2$  (см., напр., [20]):

$$S(m, f, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \left( \int_{-1}^{t-\varepsilon} + \int_{t+\varepsilon}^1 \right) \frac{f(x) dx}{(x-t)^m} - \frac{\varphi(t)}{\varepsilon^{m-1}} \right\},$$

где

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{m-2} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \frac{\varepsilon^k [1 + (-1)^{m-k}]}{m-k+1}, \quad \sum_0^{-1} \equiv 0.$$

Интегралы (1) поставим в соответствие квадратурную формулу вида

$$S(m, f, t) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{j_i} a_{ij}(t) f^{(j)}(x_i) + R(m, f, t, X_N, A_N, \Gamma_N), \quad (2)$$

определяемую матрицей весовых функций  $A_N = \{a_{ij}(t)\}$ , вектором узлов  $X_N = \{x_i\}_0^N$ ,  $x_i \in [-1, 1]$ , и целочисленным вектором  $\Gamma_N = \{j_i\}_0^N$ ,  $0 \leq j_i \leq m-1$ , задающим кратность узлов квадратурной формулы; при  $j_i = j$ ,  $i = 0, N$ , вместо  $\Gamma_N$  будем писать просто  $j$ .

Ясно, что остаток квадратурной формулы (2) является функцией точки  $t \in (-1, 1)$ , поэтому для с. и., в отличие от регулярного случая, можно поставить две задачи об оптимальной квадратурной формуле.

Определение 1. Если параметры квадратурной формулы не зависят от положения точки  $t \in (-1, 1)$ , то оптимальной оценкой погрешности квадратурных формул вида (2) в классе  $F$  на отрезке  $[\alpha, \beta] \subseteq [-1, 1]$  при фиксированном наборе  $\Gamma_N$  называется величина.

$$V_N(m, F, [\alpha, \beta], \Gamma_N) = \inf_{A_N, X_N} \sup_{f \in F} \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |R(m, f, t, X_N, A_N, \Gamma_N)|.$$

Квадратурная формула, определяемая фиксированным вектором узлов  $X_N^0 = \{x_i^0\}$  и фиксированной матрицей весов  $A_N^0 = \{a_{ij}^0(t)\}$ , для которой

$$V_N(m, F, [\alpha, \beta], \Gamma_N) \times \sup_{f \in F} \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |R(m, f, t, X_N^0, A_N^0, \Gamma_N)|,$$

называется оптимальной по порядку в классе  $F$  на отрезке  $[\alpha, \beta]$  среди всевозможных квадратурных формул вида (2).

В связи с этим возникает задача 1 построения и исследования оптимальных квадратурных формул в смысле определения 1 в случае различных способов выбора класса плотностей  $F$  и вектора кратности узлов  $\Gamma_N$ .

Определение 2. Если  $t \in (-1, 1)$  - фиксированная точка, то оптимальной оценкой погрешности квадратурных формул вида (2) в классе  $F$  при фиксированном наборе  $\Gamma_N$  называется величина

$$V_N(m, F, t, \Gamma_N) = \inf_{A_N, X_N} \sup_{f \in F} |R(m, f, t, X_N, A_N, \Gamma_N)|.$$

Квадратурная формула, определяемая фиксированным вектором узлов  $X_N^0 = \{x_i^0\}$  и фиксированной матрицей весов  $A_N^0 = \{a_{ij}^0(t)\}$ , для которой

$$V_N(m, F, t, \Gamma_N) \times \sup_{f \in F} |R(m, f, t, X_N^0, A_N^0, \Gamma_N)|,$$

называется оптимальной по порядку на классе  $F$  в точке  $t$  среди всевозможных квадратурных формул вида (2).

В связи с этим возникает задача 2 построения и исследования оптимальных квадратурных формул в смысле определения 2 в случае различных способов выбора класса плотностей  $F$  и вектора кратности узлов  $\Gamma_N$ .

## § 2. Вспомогательные результаты

В дальнейшем в качестве класса плотностей  $F$  берется, как правило,

$$W^r H_\omega[-1, 1] (W^0 H_\omega[-1, 1] = H_\omega[-1, 1]), \quad r+1 \in \mathbb{N},$$

т. е. класс  $\tau$ -раз непрерывно-дифференцируемых на  $[-1, 1]$  функций  $f(x)$ , удовлетворяющих условию

$$\omega(\varphi^{(n)}; \delta) = \sup_{|x'-x''| \leq \delta, x', x'' \in [-1, 1]} |\varphi^{(n)}(x') - \varphi^{(n)}(x'')| \leq \omega(\delta),$$

где  $\omega(\delta)$ ,  $0 < \delta \leq 2$ , — заданный модуль непрерывности. В силу хорошо известной леммы о выпуклой мажоранте, ниже, без ограничения общности, можно считать  $\omega(\delta)$  выпуклым вверх.

При  $\tau = 0$  дополнительно предполагается, что модуль непрерывности  $\omega(\delta)$  удовлетворяет условиям

$$\int_0^{1/N} \frac{\omega(t)}{t} dt \leq Q_1 \omega\left(\frac{1}{N}\right), \quad (3)$$

$$\omega(t) |\ln N t| \leq Q_2 \omega\left(\frac{1}{N}\right), \quad t \in [0, \frac{1}{N}], \quad (4)$$

где  $Q_1$  и  $Q_2$  — постоянные, не зависящие от  $N$ .

Заметим, что при  $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , условия (3) и (4) выполняются очевидным образом. В этом случае класс  $W^r H_\omega[-1, 1]$  будем обозначать через  $W^r H^\alpha[-1, 1]$ .

Для с. и. (1) справедлива следующая

Лемма 1. Пусть плотность  $f \in C^{m-1}[-1, 1]$

и удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \omega(\varphi^{(m-1)}; x) \frac{dx}{x} < \infty, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любого  $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$  и  $t \in (-1, 1)$  справедливо неравенство

$$|S(m, f, t)| \leq 2 \|f\|_{C[-1, 1]} \int_\delta^1 \frac{dx}{x^m} + \\ + \frac{2}{(m-1)!} \int_0^\delta \omega(\varphi^{(m-1)}; x) \frac{dx}{x} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|\varphi^{(k)}(t)|}{k!} \left| \int_\alpha^\beta \frac{dx}{(x-t)^{m-k}} \right|,$$

где  $\alpha = \max(t - \delta, -1)$ ,  $\beta = \min(t + \delta, 1)$ , а интегралы в последней сумме понимаются в смысле Коши ( $m = 1$ ) и Адамара ( $m \geq 2$ ).

Доказательство. Возьмем произвольную точку  $t \in (0, 1)$  (случай  $t \in (-1, 0)$  рассматривается аналогично). Пусть

$$P_{m-1}(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k, \quad x \in [-1, 1], \quad (5)$$

- многочлен Тейлора функции  $f(x)$  в точке  $t$ . Тогда, очевидно, имеем

$$f(x) - P_{m-1}(x) = \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} [f^{(m-1)}(\xi) - f^{(m-1)}(t)], \quad (6)$$

где точка  $\xi$  находится между точками  $x$  и  $t$ .

Зафиксируем  $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$ . Возможны два случая.

а)  $\delta < 1-t$ . Представим с. и. (1) в виде

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{(x-t)^m} = \left( \int_{-1}^{t-\delta} + \int_{t+\delta}^1 \right) \frac{f(x) dx}{(x-t)^m} + \\ + \int_{t-\delta}^{t+\delta} \frac{f(x) - P_{m-1}(x)}{(x-t)^m} dx + \int_{t-\delta}^{t+\delta} \frac{P_{m-1}(x)}{(x-t)^m} dx.$$

Оценим последовательно каждое слагаемое, используя равенство (5), (6):

$$\left| \left( \int_{-1}^{t-\delta} + \int_{t+\delta}^1 \right) \frac{f(x)}{(x-t)^m} dx \right| \leq \\ \leq \|f\|_{C[-1,1]} \left( \int_{\delta}^{1+t} + \int_{\delta}^{1-t} \right) \frac{dx}{x^m} \leq 2 \|f\|_{C[-1,1]} \int_{\delta}^1 \frac{dx}{x^m}, \\ \left| \int_{t-\delta}^{t+\delta} \frac{f(x) - P_{m-1}(x)}{(x-t)^m} dx \right| \leq \\ \leq \frac{1}{(m-1)!} \left| \int_{t-\delta}^{t+\delta} \frac{f^{(m-1)}(\xi) - f^{(m-1)}(t)}{x-t} dx \right| \leq \\ \leq \frac{2}{(m-1)!} \int_0^{\delta} \omega(f^{(m-1)}; x) \frac{dx}{x}, \\ \left| \int_{t-\delta}^{t+\delta} \frac{P_{m-1}(x)}{(x-t)^m} dx \right| \leq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|f^{(k)}(t)|}{k!} \left| \int_{t-\delta}^{t+\delta} \frac{dx}{(x-t)^{m-k}} \right|$$

Из этих неравенств сразу получаем утверждение леммы в случае а).

б)  $\delta \geq 1-t$ . Представим с. и. (1) как сумму

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{(x-t)^m} = \int_{-1}^{t-\delta} \frac{f(x) dx}{(x-t)^m} + \int_{t-\delta}^1 \frac{f(x) - P_{m-1}(x)}{(x-t)^m} dx + \int_{t-\delta}^1 \frac{P_{m-1}(x)}{(x-t)^m} dx.$$

Получим, аналогично случаю а),

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^{t-\delta} \frac{f(x) dx}{(x-t)^m} \right| &\leq \|f\|_{C[-1,1]} \int_{\delta}^{t+\delta} \frac{dx}{x^m} \leq 2 \|f\|_{C[-1,1]} \int_{\delta}^1 \frac{dx}{x^m}, \\ \left| \int_{t-\delta}^1 \frac{f(x) - P_{m-1}(x)}{(x-t)^m} dx \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{(m-1)!} \left| \int_{t-\delta}^1 \frac{f^{(m-1)}(\xi) - f^{(m-1)}(t)}{x-t} dx \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{(m-1)!} \int_0^{\delta} \omega(f^{(m-1)}; x) \frac{dx}{x}, \\ \left| \int_{t-\delta}^1 \frac{P_{m-1}(x)}{(x-t)^m} dx \right| &\leq \sum_{\kappa=0}^{m-1} \frac{|f^{(\kappa)}(t)|}{\kappa!} \left| \int_{t-\delta}^1 \frac{dx}{(x-t)^{m-\kappa}} \right| = \\ &= \sum_{\kappa=0}^{m-1} \frac{|f^{(\kappa)}(t)|}{\kappa!} \left| \int_{t-\delta}^{\min(t+\delta, 1)} \frac{dx}{(x-t)^{m-\kappa}} \right|. \end{aligned}$$

Лемма полностью доказана.

Отметим, что лемма 1 является, в определенном смысле, обобщением известных оценок для сингулярных интегралов, понимаемых в смысле главного значения (см., напр., гл. III [4]).

Из работы [21] легко выводится следующая  
**Лемма 2.** Пусть на отрезке  $[-1, 1]$  задана произвольная сетка узлов

$$-1 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N \leq 1.$$

Тогда найдутся такая точка  $\xi \in [-1, 1]$  и отрезки  $\Delta_j^* = [\theta_{j-1}, \theta_j]$ ,  $\theta_j - \theta_{j-1} = \frac{1}{N+1}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , что

$$\left. \begin{aligned} x_i &\in (\theta_{j-1}, \theta_j), \quad i = \overline{0, N}, \\ 0 < x - \xi < \frac{3j}{N+1}, \quad x \in (\theta_{j-1}, \theta_j), \quad j = \overline{1, n}, \\ n &\geq \frac{N+1}{6}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Как уже отмечалось выше, при обосновании основных результатов работы широко используются методы сплайн-функций (см., напр., [22, 23, 24]), в частности, следующая лемма.

**Лемма 3.** Для любой функции  $f \in W^{\tau+1} H_{\omega}[a, b]$  существует полиномиальный сплайн  $S_{\tau+1}(x)$  степени  $\tau+1$  и дефекта 1, удовлетворяющий условиям:

$$S_{\tau+1}^{(j)}(c) = f^{(j)}(c), \quad j = \overline{0, \tau}, \quad c = a, b, \quad (8)$$

$$|S_{\tau+1}^{(j)}(x) - f^{(j)}(x)| \leq C_1 |x-c|^{\tau-j} \omega(|x-c|), \quad j = \overline{0, \tau}, \quad c = a, b, \quad (9)$$

$$S_{\tau+1} \in W^{\tau} H_{\bar{\omega}}[a, b], \quad (10)$$

где  $\bar{\omega}(\delta) = C_2 \omega(\delta)$ ,  $0 < \delta \leq b-a$ , а постоянные  $C_1$  и  $C_2$  не зависят от функции  $f(x)$  и отрезка  $[a, b]$ .

**Доказательство.** Полиномиальный сплайн степени  $\tau+1$  дефекта 1 на отрезке  $[a, b]$  с равноотстоящими узлами можно записать в виде

$$S_{\tau+1}(x) = \sum_{i=0}^{\tau} \alpha_i (x-a)^i + \sum_{i=0}^{\tau} \beta_i (x-a - \frac{b-a}{\tau+1} i)_+^{\tau+1},$$

где

$$x_+ = \{ x \text{ при } x \geq 0; 0 \text{ при } x < 0 \}.$$

Из условия (8) при  $c = a$  легко находятся коэффициенты  $\alpha_i$ :  $\alpha_i = \varphi^{(i)}(a)/i!$ ,  $i = \overline{0, \tau}$ .

Для определения  $\beta_i$  из этого же условия, но при  $c = b$ , получим систему

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\tau} \beta_i \frac{(\tau+1)!}{(\tau+1-j)!} (b-a-i \frac{b-a}{\tau+1})^{\tau+1-j} = \\ = \varphi^{(j)}(b) - \sum_{i=j}^{\tau} \frac{\varphi^{(i)}(a)}{(i-j)!} (b-a)^{i-j}, \quad j = \overline{0, \tau}. \end{aligned} \quad (11)$$

Определитель этой системы с точностью до постоянного множителя совпадает с определителем Вандермонда и поэтому отличен от нуля. Следовательно, система (11) имеет единственное решение

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{\tau} \frac{\varphi^{(j)}(b) - \sum_{\kappa=j}^{\tau} \frac{\varphi^{(\kappa)}(a)(b-a)^{\kappa-j}/(\kappa-j)!}{(b-a)^{\tau+1-j}} \cdot A_{ij}, \quad i = \overline{0, \tau},$$

где  $A_{ij}$  - величины, зависящие только от  $i, j, \tau$ .

Воспользовавшись формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, легко получим при  $j = \overline{0, \tau-1}$ :

$$\varphi^{(j)}(b) = \sum_{\kappa=j}^{\tau-1} \frac{\varphi^{(\kappa)}(a)}{(\kappa-j)!} (b-a)^{\kappa-j} + \frac{\varphi^{(\tau)}(\theta)}{(\tau-j)!} (b-a)^{\tau-j}, \quad a < \theta < b.$$

Отсюда сразу следуют неравенства

$$\left| \frac{\varphi^{(j)}(b) - \sum_{\kappa=j}^{\tau} \frac{\varphi^{(\kappa)}(a)}{(\kappa-j)!} (b-a)^{\kappa-j}}{(b-a)^{\tau+1-j}} \right| \leq \frac{1}{(\tau-j)!} \cdot \frac{\omega(\varphi^{(\tau)}; b-a)}{b-a}, \quad j = \overline{0, \tau-1}, \quad (12)$$

$$|\beta_i| \leq \frac{\omega(\varphi^{(\tau)}; b-a)}{b-a} \sum_{j=0}^{\tau} \frac{|A_{ij}|}{(\tau-j)!} \leq \frac{\omega(b-a)}{b-a} \cdot B_i, \quad i = \overline{0, \tau},$$

где постоянные  $B_i$  зависят только от  $i$  и  $\tau$ .

Применив формулу конечных приращений Лагранжа и условие (8), получим

$$|\varphi^{(j)}(x) - S_{\tau+1}^{(j)}(x)| \leq |\varphi^{(\tau)}(\theta) - S_{\tau+1}^{(\tau)}(\theta)| \cdot |x-c|^{\tau-j}, \quad (13)$$

где  $\theta$  лежит между  $x$  и  $c$ .

Далее, для  $x \in [a, b]$  имеем

$$\begin{aligned}
 & |f^{(\tau)}(x) - S_{\tau+1}^{(\tau)}(x)| = \\
 & = \left| f^{(\tau)}(x) - f^{(\tau)}(a) - (\tau+1)! \sum_{i=0}^{\tau} \beta_i (x-a-i \frac{b-a}{\tau+1})_+ \right| \leq \\
 & \leq |f^{(\tau)}(x) - f^{(\tau)}(c)| + \\
 & + |f^{(\tau)}(c) - f^{(\tau)}(a) - (\tau+1)! \sum_{i=0}^{\tau} \beta_i (x-a-i \frac{b-a}{\tau+1})_+| \leq \\
 & \leq \omega(|x-c|) + (\tau+1)! \sum_{i=0}^{\tau} |\beta_i| \left| (c-a-i \frac{b-a}{\tau+1})_+ - (x-a-i \frac{b-a}{\tau+1})_+ \right| \leq \\
 & \leq \omega(|x-c|) + (\tau+1)! |x-c| \sum_{i=0}^{\tau} |\beta_i| \leq \\
 & \leq \omega(|x-c|) + (\tau+1)! \frac{\omega(b-a)}{b-a} |x-c| \sum_{i=0}^{\tau} B_i \leq C_1 \omega(|x-c|).
 \end{aligned}$$

В последнем неравенстве использована выпуклость вверх модуля непрерывности  $\omega(\delta)$ . Учитывая (13), получаем (9).

Наконец, для произвольных  $x', x'' \in [a, b]$  имеем

$$\begin{aligned}
 & |S_{\tau+1}^{(\tau)}(x') - S_{\tau+1}^{(\tau)}(x'')| \leq \\
 & \leq (\tau+1)! \sum_{i=0}^{\tau} |\beta_i| \left| (x'-a-i \frac{b-a}{\tau+1})_+ - (x''-a-i \frac{b-a}{\tau+1})_+ \right| \leq \\
 & \leq (\tau+1)! |x' - x''| \sum_{i=0}^{\tau} |\beta_i| \leq C_2 \omega(|x' - x''|).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие 1. При  $0 \leq j \leq \tau$  справедливо неравенство

$$\|S_{\tau+1}^{(j)}\|_{C[a, b]} \leq \|f^{(j)}\|_{C[a, b]} + 2C_1 \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\tau-j} \|f^{(\tau)}\|_{C[a, b]}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\|S_{\tau+1}^{(j)}\|_{C[a,b]} \leq \|S_{\tau+1}^{(j)} - f^{(j)}\|_{C[a,b]} + \|f^{(j)}\|_{C[a,b]}.$$

Из условия (8) и формулы конечных приращений легко получаем, что

$$\|S_{\tau+1}^{(j)} - f^{(j)}\|_{C[a,b]} \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\tau-j} \|f^{(\tau)} - S_{\tau+1}^{(\tau)}\|_{C[a,b]}.$$

Далее, для  $x \in [a, b]$ , учитывая (12), имеем

$$\begin{aligned} & |f^{(\tau)}(x) - S_{\tau+1}^{(\tau)}(x)| \leq \\ & \leq \omega(f^{(\tau)}; x-a) + (\tau+1)!(x-a) \frac{\omega(f^{(\tau)}; b-a)}{b-a} \sum_{i=0}^{\tau} B_i \leq \\ & \leq 2 \|f^{(\tau)}\|_{C[a,b]} \left(1 + (\tau+1)! \sum_{i=0}^{\tau} B_i\right). \end{aligned}$$

Следствие 2. Пусть  $f \in W^{\tau} H_{\omega}[-1, 1]$  и

$$-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1$$

- произвольная сетка узлов на отрезке  $[-1, 1]$ . Положим

$$g(x) = S_{\tau+1}(x), \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = \overline{1, N},$$

где  $S_{\tau+1}(x)$  - сплайн из леммы 3 для функции  $f(x)$  на отрезке  $[x_{k-1}, x_k]$ . Тогда  $g \in W^{\tau} H_{\bar{\omega}}[-1, 1]$ , где  $\bar{\omega}(\delta) = (1+2C_2)\omega(\delta)$ ,  $0 < \delta \leq 2$ .

Доказательство. Для произвольных  $x', x''$ ,  $x' < x''$ ,  $x' \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $x'' \in [x_j, x_{j+1}]$ , с учетом (8) сразу же получим

$$\begin{aligned} |g^{(\tau)}(x'') - g^{(\tau)}(x')| & \leq |g^{(\tau)}(x'') - g^{(\tau)}(x_{j-1})| + |f^{(\tau)}(x_{j-1}) - f^{(\tau)}(x_i)| + |g^{(\tau)}(x_i) - g^{(\tau)}(x')| \leq \\ & \leq C_2 \omega(x'' - x_{j-1}) + \omega(x_{j-1} - x_i) + C_2 \omega(x_i - x') \leq (1+2C_2) \omega(x'' - x'). \end{aligned}$$

В теории сплайнов широко используются т. н. В-сплайны (см., напр., [22 - 24]), обладающие рядом замечательных свойств. Некоторые из таких свойств приводятся в следующей лемме.

**Лемма 4.** Для целого неотрицательного  $\tau$  на отрезке  $[a, b]$  существует В-сплайн  $B_{\tau+1}(x)$  степени  $\tau+1$  дефекта 1, удовлетворяющий условиям

$$B_{\tau+1}^{(j)}(a) = B_{\tau+1}^{(j)}(b) = 0, \quad j = \overline{0, \tau}, \quad (14)$$

$$B_{\tau+1}(x) > 0, \quad x \in (a, b), \quad (15)$$

$$B_{\tau+1} \in W^{\tau} H_{\omega}[a, b], \quad (16)$$

$$\|B_{\tau+1}\|_{C[a, b]} = B_{\tau+1}\left(\frac{b+a}{2}\right) = \alpha_1(\tau) \omega\left(\frac{b-a}{\tau+2}\right) \left(\frac{b-a}{\tau+2}\right)^{\tau}, \quad (17)$$

$$\int_a^b B_{\tau+1}(x) dx = \alpha_2(\tau) \omega\left(\frac{b-a}{\tau+2}\right) \left(\frac{b-a}{\tau+2}\right)^{\tau+1}. \quad (18)$$

**Доказательство.** Хорошо известно [22, 24], что В-сплайн, удовлетворяющий условиям (14)-(15), можно записать в виде

$$B_{\tau+1}(x) = \frac{A}{(\tau+1)!} \sum_{i=0}^{\tau+1} (-1)^i C_{\tau+2}^i \left(x - a - i \frac{b-a}{\tau+2}\right)_+^{\tau+1},$$

где  $A$  - подлежащая определению положительная постоянная. С этой целью нам придется отметить некоторые свойства  $B_{\tau+1}^{(j)}(x)$ .

Обозначим  $x_i = a + i \frac{b-a}{\tau+2}, \quad i = \overline{0, \tau+2}.$

Заметим, что

$$\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j C_{\tau+2}^j = \frac{i(-1)^{i-1} C_{\tau+2}^i}{\tau+2}, \quad (19)$$

$$\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j C_{\tau+2}^j = \frac{i(i-1)(-1)^{i-1} C_{\tau+2}^i}{\tau+1}, \quad i = \overline{1, \tau+2}. \quad (20)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^i (-1)^j j C_{\tau+2}^j x^{j-1} &\equiv \sum_{j=1}^i (-1)^j C_{\tau+2}^{j-1} (\tau+2-j+1) x^{j-1} \equiv \\ &\equiv (\tau+2) \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} C_{\tau+2}^j x^j + \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j j C_{\tau+2}^j x^j. \end{aligned}$$

Получили тождество

$$\begin{aligned} &(\tau+2) \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{j+1} C_{\tau+2}^j x^j \equiv \\ &\equiv \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j C_{\tau+2}^j (x^{j-1} - x^j)_j + (-1)^i i C_{\tau+2}^i x^{i-1}. \end{aligned}$$

Положив  $x=1$ , получим (19). Дифференцируя по  $x$  и полагая опять  $x=1$ , получаем (20). Отметим, что из (19) и (20) сразу же следуют равенства

$$\sum_{j=0}^{\tau+2} (-1)^j C_{\tau+2}^j = 0, \quad \sum_{j=0}^{\tau+2} (-1)^j j C_{\tau+2}^j = 0. \quad (21)$$

Докажем теперь, опираясь на (19)-(21), три основных свойства кусочно-линейной функции  $B_{\tau+1}^{(\nu)}(x)$ .

$$I. \quad B_{\tau+1}^{(\nu)}(x_i) = (-1)^i B_{\tau+1}^{(\nu)}(x_{\tau+2-i}), \quad i=0, \overline{\left\lfloor \frac{\tau+2}{2} \right\rfloor},$$

где  $\lfloor \beta \rfloor$  - целая часть  $\beta \geq 0$ .

Действительно, используя (21), получим

$$\begin{aligned} B_{\tau+1}^{(\nu)}(x_{\tau+2-i}) &= A \sum_{j=0}^{\tau+2-i-1} (-1)^j C_{\tau+2}^j \frac{\delta-a}{\tau+2} (\tau+2-j-i) = \\ &= A \frac{\delta-a}{\tau+2} \left( \sum_{j=\tau+2-i}^{\tau+2} (-1)^j j C_{\tau+2}^j - (\tau+2-i) \sum_{j=\tau+2-i}^{\tau+2} (-1)^j C_{\tau+2}^j \right) = \\ &= A \frac{\delta-a}{\tau+2} \sum_{j=\tau+2-i}^{\tau+2} (\tau+2-i-j) (-1)^{j+1} C_{\tau+2}^j = \\ &= A \frac{\delta-a}{\tau+2} \sum_{j=0}^i (i-j) (-1)^{\tau+2-j} C_{\tau+2}^j = (-1)^i B_{\tau+1}^{(\nu)}(x_i). \end{aligned}$$

$$\text{II. } (-1)^i B_{\tau+1}^{(\tau)}(x_i) < 0, \quad i = 1, \overline{\left\lfloor \frac{\tau+2}{2} \right\rfloor}.$$

Принимая во внимание равенства (19)-(20), получаем

$$\begin{aligned} B_{\tau+1}^{(\tau)}(x_i) &= A \frac{b-a}{\tau+2} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (i-j) C_{\tau+2}^j = \\ &= A \frac{b-a}{\tau+2} \left\{ \frac{i^2 (-1)^{i-1} C_{\tau+2}^i}{\tau+2} - \frac{i(i-1)(-1)^{i-1} C_{\tau+2}^i}{\tau+1} \right\} = \\ &= A \frac{b-a}{\tau+2} i (-1)^{i-1} C_{\tau+2}^i \frac{(\tau+2-i)}{(\tau+2)(\tau+1)}. \end{aligned}$$

$$\text{III. } |B_{\tau+1}^{(\tau)}(x_{i+1})| > |B_{\tau+1}^{(\tau)}(x_i)|, \quad i = 0, \overline{\left\lfloor \frac{\tau+2}{2} \right\rfloor - 1}.$$

Опять, используя (19)-(20), находим

$$\begin{aligned} &|B_{\tau+1}^{(\tau)}(x_{i+1})|^2 - |B_{\tau+1}^{(\tau)}(x_i)|^2 = \\ &= A^2 \left( \frac{b-a}{\tau+2} \right)^2 \sum_{j=0}^i (-1)^j C_{\tau+2}^j \cdot \sum_{j=0}^i (-1)^j C_{\tau+2}^j (2i+1-2j) = \\ &= A^2 \left( \frac{b-a}{\tau+2} \right)^2 \frac{(i+1)(-1)^i C_{\tau+2}^{i+1}}{\tau+2} \left[ (2i+1) \frac{(i+1)(-1)^i C_{\tau+2}^{i+1}}{\tau+2} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{(i+1)(-1)^i C_{\tau+2}^{i+1}}{\tau+1} \right] = A^2 \left( \frac{b-a}{\tau+2} \right)^2 \frac{(i+1)^2 (C_{\tau+2}^{i+1})^2}{(\tau+2)^2 (\tau+1)} (\tau+1-2i) > 0. \end{aligned}$$

Теперь, учитывая кусочную линейность  $B_{\tau+1}^{(\tau)}(x)$  и свойства 1 - III, легко получаем

$$|B_{\tau+1}^{(\tau)}(x') - B_{\tau+1}^{(\tau)}(x'')| \leq |x' - x''| \sup_{0 \leq i \leq \tau+1} \frac{|B_{\tau+1}^{(\tau)}(x_{i+1}) - B_{\tau+1}^{(\tau)}(x_i)|}{(b-a)/(\tau+2)} =$$

$$= |x' - x''| \frac{\tau+2}{b-a} |B_{\tau+1}^{(\tau)}(x_{\sigma}) - B_{\tau+1}^{(\tau)}(x_{\sigma-1})| =$$

$$= |x' - x''| A C_{\tau+1}^{\sigma-1}, \quad |x' - x''| \leq \frac{b-a}{\tau+2}, \quad \sigma \equiv \left\lfloor \frac{\tau+2}{2} \right\rfloor;$$

$$|B_{\tau+1}^{(\tau)}(x') - B_{\tau+1}^{(\tau)}(x'')| \leq \frac{b-a}{\tau+2} A C_{\tau+1}^{\sigma-1},$$

$$|x' - x''| \geq \frac{b-a}{\tau+2}, \quad x', x'' \in [a, b], \quad \sigma \equiv \left\lfloor \frac{\tau+2}{2} \right\rfloor.$$

Из этих неравенств и свойств выпуклого вверх модуля непрерывности  $\omega(\delta)$  следует, что при

$$A = \frac{\tau+2}{b-a} \omega\left(\frac{b-a}{\tau+2}\right) / C_{\tau+1}^{\sigma-1}, \quad \sigma \equiv \left\lfloor \frac{\tau+2}{2} \right\rfloor$$

будет выполняться (16).

Докажем (17). В силу свойств 1-III достаточно показать, что

$$B'_{\tau+1}\left(\frac{b+a}{2}\right) = 0$$

при  $\tau > 1$  (при  $\tau = 0$  — (17) очевидно). Имеем

$$\begin{aligned} B'_{\tau+1}\left(\frac{b+a}{2}\right) &= \frac{A}{\tau!} \sum_{i=0}^{\sigma} (-1)^i C_{\tau+2}^i \left(\frac{b-a}{2} - i \frac{b-a}{\tau+2}\right)^{\tau} = \\ &= \frac{A}{\tau!} \left(\frac{b-a}{2(\tau+2)}\right)^{\tau} \sum_{i=0}^{\sigma} (-1)^i C_{\tau+2}^i (\tau+2-2i)^{\tau}, \quad \sigma \equiv \left\lfloor \frac{\tau+2}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Для вычисления суммы воспользуемся следующим тождеством:

$$\sum_{i=0}^{\tau+2} (-1)^i C_{\tau+2}^i x^{\tau+2-2i} \equiv \left(x - \frac{1}{x}\right)^{\tau+2}, \quad x \neq 0.$$

Предположим, для определенности, что  $\tau$  - четное. Тогда, разбивая сумму на две части и меняя порядок суммирования, получаем

$$\sum_{i=0}^{\sigma-1} (-1)^i C_{\tau+2}^i (x^{\tau+2-2i} + x^{2i-\tau-2}) + (-1)^\sigma C_{\tau+2}^\sigma = (x - \frac{1}{x})^{\tau+2},$$

$$\sigma \equiv \frac{\tau+2}{2}, \quad x \neq 0.$$

Продифференцировав по  $x$ , имеем  $x \neq 0, \sigma = \frac{\tau+2}{2}$ :

$$\sum_{i=0}^{\sigma-1} (-1)^i C_{\tau+2}^i (\tau+2-2i)(x^{\tau+1-2i} - x^{2i-\tau-3}) \equiv (\tau+2)(x - \frac{1}{x})^{\tau+1} (1 + \frac{1}{x^2}).$$

Умножим обе части этого тождества на  $x$  и снова продифференцируем. Продолжив этот процесс  $\tau$  раз и положив  $x=1$ , получим

$$\sum_{i=0}^{\sigma-1} (-1)^i C_{\tau+2}^i (\tau+2-2i)^\tau = 0, \quad \sigma \equiv \frac{\tau+2}{2},$$

и, следовательно,  $B'_{\tau+1}(\frac{\delta+a}{2}) = 0$ .

При нечетном  $\tau$  доказательство проводится аналогично. Заметим, что

$$\begin{aligned} B_{\tau+1}(\frac{\delta+a}{2}) &= \frac{A}{(\tau+1)!} \sum_{i=0}^{\sigma} (-1)^i C_{\tau+2}^i \left(\frac{\delta-a}{2(\tau+2)}\right)^{\tau+1} (\tau+2-2i)^{\tau+1} = \\ &= \mathfrak{X}_1(\tau) \omega \left(\frac{\delta-a}{\tau+2}\right) \left(\frac{\delta-a}{\tau+2}\right)^\tau, \quad \sigma \equiv \left\lfloor \frac{\tau+2}{2} \right\rfloor, \end{aligned}$$

где постоянная  $\mathfrak{X}_1(\tau)$  зависит лишь от  $\tau$ .

Вычислим, наконец, интеграл

$$\begin{aligned} &\int_a^{\delta} B_{\tau+1}(x) dx = \\ &= \frac{A}{(\tau+1)!} \int_a^{\delta} \sum_{i=0}^{\tau+1} (-1)^i C_{\tau+2}^i (x-a-i \frac{\delta-a}{\tau+2})_+^{\tau+1} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{(\tau+1)!} \sum_{i=0}^{\tau+1} (-1)^i C_{\tau+2}^i \int_{x_i}^b (x-x_i)^{\tau+1} dx = \\
&= \frac{A}{(\tau+1)!} \left( \frac{b-a}{\tau+2} \right)^{\tau+2} \frac{1}{\tau+2} \sum_{i=0}^{\tau+1} (-1)^i C_{\tau+2}^i (\tau+2-i)^{\tau+2}.
\end{aligned}$$

Дифференцируя тождество

$$\sum_{i=0}^{\tau+1} (-1)^i C_{\tau+2}^i x^{\tau+2-i} \equiv (x-1)^{\tau+2} - (-1)^\tau$$

по  $x$  и умножая обе части после этого на  $x$ , получим

$$\sum_{i=0}^{\tau+1} (-1)^i C_{\tau+2}^i (\tau+2-i) x^{\tau+2-i} \equiv (\tau+2)(x-1)^{\tau+2} + (\tau+2)(x-1)^{\tau+1}.$$

Повторяя описанный процесс  $(\tau+2)$ -раза и полагая  $x=1$ , получаем

$$\sum_{i=0}^{\tau+1} (-1)^i C_{\tau+2}^i (\tau+2-i)^{\tau+2} = (\tau+2)!$$

Отсюда следует, что равенство (18) выполняется с

$$x_2(\tau) = 1/C_{\tau+2}^{\sigma-1}, \quad \sigma \equiv \left\lfloor \frac{\tau+2}{2} \right\rfloor.$$

Лемма полностью доказана.

Для доказательства следующей леммы нам понадобятся некоторые свойства интерполяционных многочленов Лагранжа (см., напр., [25]).

Пусть на отрезке  $[c, d]$  задана равномерная сетка

$$z_i = c + i \frac{d-c}{\tau+1}, \quad i = \overline{0, \tau+1}, \quad (22)$$

а функция  $\varphi \in W^{\tau} H_{\omega}[c, d]$ . Построим многочлен Лагранжа по узлам  $\{z_i\}$ :

$$L_{\tau+1}(z) = \sum_{i=0}^{\tau+1} \varphi(z_i) l_{\tau+1, i}(z),$$

где

$$l_{\tau+1, i}(z) = \prod_{\substack{k=0, k \neq i}}^{\tau+1} \frac{z - z_k}{z_i - z_k}, \quad i = \overline{0, \tau+1}.$$

В теории интерполирования хорошо известны [25] следующие соотношения:

$$|L_{\tau+1}^{(\nu)}(z)| \leq \lambda_{\tau+1, \nu} \|\varphi\|_{C[c, d]}, \quad \nu = \overline{0, \tau+1},$$

$$\lambda_{\tau+1, \nu} = \sup_{z \in [c, d]} \sum_{i=0}^{\tau+1} \left| \rho_{\tau+1, i}^{(\nu)}(z) \right| = \left( \frac{2}{d-c} \right)^{\nu} \Lambda_{\tau+1, \nu},$$

$$\Lambda_{\tau+1, \nu} = \sup_{z \in [-1, 1]} \sum_{i=0}^{\tau+1} \left| \left( \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{\tau+1} \frac{z+1-k}{z+1} \frac{2}{\tau+1} \frac{1}{i-k} \right)^{(\nu)} \right|, \quad \nu = \overline{0, \tau+1}.$$

Заметим, что числа  $\lambda_{\tau+1, \nu}$  и  $\Lambda_{\tau+1, \nu}$  называются постоянными Лебега и совпадают с нормами соответствующих интерполяционных операторов, а величина  $\Lambda_{\tau+1, \nu}$  зависит только от  $\nu$  и  $\tau$ .

Далее, интересно отметить, что  $L_{\tau+1} \in W^r H_{\bar{\omega}}[c, d]$ , где  $\bar{\omega}(\delta) = (\tau+1)\omega(\delta)$ ,  $0 \leq \delta \leq d-c$ .

Действительно, для произвольных  $z', z'' \in [c, d]$  имеем

$$\begin{aligned} & |L_{\tau+1}^{(\nu)}(z') - L_{\tau+1}^{(\nu)}(z'')| = \\ & = (\tau+1)! |z' - z''| \left| \sum_{i=0}^{\tau+1} \varphi(z_i) / \prod_{k=0, k \neq i}^{\tau+1} (z_i - z_k) \right| = \\ & = (\tau+1)! |z' - z''| |\varphi(z_0, \dots, z_{\tau+1})| = \\ & = (\tau+1)! |z' - z''| \left| \frac{\varphi(z_0, \dots, z_{\tau}) - \varphi(z_1, \dots, z_{\tau+1})}{d-c} \right| = \\ & = (\tau+1) \frac{|z' - z''|}{d-c} |\varphi^{(\nu)}(\theta_1) - \varphi^{(\nu)}(\theta_2)| \leq (\tau+1) \frac{|z' - z''|}{d-c} \omega(|\theta_1 - \theta_2|). \end{aligned}$$

Здесь  $\varphi(z_0, \dots, z_k)$  - разделенная разность функции  $\varphi(z)$   $k$ -го порядка, а  $\theta_1, \theta_2 \in [c, d]$ . Но

$$\frac{|z' - z''|}{d-c} \omega(|\theta_1 - \theta_2|) \leq \omega(|z' - z''|), \quad |\theta_1 - \theta_2| \leq |z' - z''|,$$

( $\omega(\delta)$  не убывает),

$$\frac{|z' - z''|}{d-c} \omega(|\theta_1 - \theta_2|) \leq \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{d-c} \omega(|z' - z''|) \leq \omega(|z' - z''|), \quad \left| \frac{z' - z''}{\theta_1 - \theta_2} \right| \leq 1$$

( $\omega$  выпукла вверх).

Качество приближения многочленом  $L_{\tau+1}(z)$  функции  $\varphi(z)$  характеризуется следующими неравенствами:

$$|\varphi(z) - L_{\tau+1}(z)| \leq 2\omega(|z - \bar{z}|), \quad (23)$$

$$|\varphi(z) - L_{\tau+1}(z)| \leq (\tau+2)|z - \bar{z}|(d-c)^{\tau-1} \omega(d-c), \quad (24)$$

$$|\varphi^{(\nu)}(z) - L_{\tau+1}^{(\nu)}(z)| \leq (\tau+2)(d-c)^{\tau-\nu} \omega(d-c), \quad \nu = \overline{1, \tau}, \quad \tau \geq 1, \quad (25)$$

где  $\bar{z}$  - ближайший к точке  $z$  узел сетки (22).

Действительно, (23) сразу следует из только что доказанного соотношения  $L_1 \in H_\omega[c, d]$  и условий интерполяции. Заметим далее, что разность  $\varphi(z) - L_{\tau+1}(z)$  имеет  $\tau+2$  нуля на  $[c, d]$ , следовательно, в силу теоремы Роля, разность  $\varphi^{(\nu)}(z) - L_{\tau+1}^{(\nu)}(z)$  имеет  $\tau+2-\nu$  нуля при  $\nu = \overline{1, \tau}$ . Используя этот факт, получаем при  $\tau \geq 1$

$$\begin{aligned} & |\varphi(z) - L_{\tau+1}(z)| = \\ & = |\varphi(z) - L_{\tau+1}(z) - \varphi(\bar{z}) + L_{\tau+1}(\bar{z})| = |z - \bar{z}| |\varphi'(\theta_1) - L_{\tau+1}'(\theta_1)| \leq \\ & \leq (\tau+2)|z - \bar{z}|(d-c)^{\tau-1} \omega(d-c) \end{aligned}$$

и

$$|\varphi^{(\nu)}(z) - L_{\tau+1}^{(\nu)}(z)| \leq (\tau+2)(d-c)^{\tau-\nu} \omega(d-c), \quad \nu = \overline{1, \tau}.$$

Возьмем произвольное натуральное  $N \geq \tau + 1$ ,  $N = p(\tau + 1) + \ell$ ,  
 $0 \leq \ell < \tau$  и введем на отрезке  $[a, b]$  сетку узлов

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b,$$

определяемую равенствами

$$x_{(\tau+1)j+i} = x_{(\tau+1)j} + i \frac{x_{(\tau+1)(j+1)} - x_{(\tau+1)j}}{\tau+1}, \quad i = \overline{0, \tau+1}, j = \overline{0, p-2}, \quad (26)$$

$$x_{(\tau+1)(p-1)+i} = x_{(\tau+1)(p-1)} + i \frac{x_N - x_{(\tau+1)(p-1)}}{\tau+1}, \quad i = \overline{0, \tau+1},$$

а  $x_{(\tau+1)j}$ ,  $j = \overline{1, p-1}$ , — произвольные, удовлетворяющие условию

$$P_1 \leq \frac{x_{(\tau+1)(j+1)} - x_{(\tau+1)j}}{x_{(\tau+1)j} - x_{(\tau+1)(j-1)}} \leq P_2, \quad j = \overline{1, p-1}, \quad (27)$$

где  $P_1, P_2$  — некоторые постоянные, не зависящие от  $N$ .  
 Обозначим, для удобства,

$$\xi_j = x_{(\tau+1)j}, \quad j = \overline{0, p}, \quad \xi_{p+1} = b.$$

Лемма 5. Для любой функции  $f \in W^1 H_\omega[a, b]$  на сетке (26) существует полиномиальный сплайн  $S_{\tau, N}(f; x) \equiv S_{\tau, N}(x)$  степени  $\tau+1$  дефекта 1, удовлетворяющий условиям:

$$S_{\tau, N}(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, N}; \quad (28)$$

$$|S_{0, N}(x) - f(x)| \leq 2\omega(|x - \bar{x}|), \quad \tau = 0; \quad (29)$$

$$|S_{\tau, N}(x) - f(x)| \leq C_3 |x - \bar{x}| (\xi_{j+1} - \xi_j)^{\tau-1} \omega(\xi_{j+1} - \xi_j), \quad (30)$$

$$|S_{\tau, N}^{(\nu)}(x) - f^{(\nu)}(x)| \leq C_3 (\xi_{j+1} - \xi_j)^{\tau-\nu} \omega(\xi_{j+1} - \xi_j), \quad \nu = \overline{1, \tau}, x \in [\xi_j, \xi_{j+1}], j = \overline{0, p}, \tau \geq 1; \quad (31)$$

$$S_{\tau, N} \in W^1 H_{\bar{\omega}}[a, b],$$

где  $x_i$ ,  $i = \overline{0, N}$ , — узлы (26),  $\bar{x}$  — ближайший к  $x$  узел сетки,  $\bar{\omega}(\delta) = C_4 \omega(\delta)$ ,  $0 \leq \delta \leq b-a$ , а  $C_3, C_4$  — постоянные, не зависящие от  $j, N$  и функции  $f(x)$ .

Доказательство. На каждом из отрезков  $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ ,  $j = \overline{0, p-1}$ ,  $[x_{N-\tau-1}, b]$  для функции  $f \in W^r H_\omega[a, b]$  по узлам (26) построим интерполяционный многочлен Лагранжа степени  $\tau+1$  :

$$L_{\tau+1, j}(x) = \sum_{i=0}^{\tau+1} f(x_{(\tau+1)j+i}) l_{\tau+1, j, i}(x), \quad j = \overline{0, p-1},$$

$$L_{\tau+1, p}(x) = \sum_{i=0}^{\tau+1} f(x_{N-\tau-1+i}) l_{\tau+1, p, i}(x),$$

где

$$l_{\tau+1, j, i}(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^{\tau+1} \frac{x - x_{(\tau+1)j+k}}{x_{(\tau+1)j+i} - x_{(\tau+1)j+k}}, \quad j = \overline{0, p-1},$$

$$l_{\tau+1, p, i}(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^{\tau+1} \frac{x - x_{N-\tau-1+k}}{x_{N-\tau-1+i} - x_{N-\tau-1+k}}, \quad i = \overline{0, \tau+1},$$

- фундаментальные полиномы.

Положим

$$S_{\tau, N}(f; x) = \begin{cases} L_{\tau+1, j}(x), & x \in [x_{(\tau+1)j}, x_{(\tau+1)j+\tau}], \\ S_{\tau+1, j}(x), & x \in [x_{(\tau+1)j+\tau}, x_{(\tau+1)(j+1)}], \quad j = \overline{0, p-1}; \\ L_{\tau+1, p}(x), & x \in [x_{(\tau+1)p}, x_N], \end{cases}$$

где  $S_{\tau+1, j}(x)$  - сплайн степени  $\tau+1$  дефекта 1, определяемый равенствами

$$S_{\tau+1,j}^{(\nu)}(x_{(\tau+1)j+\tau}) = L_{\tau+1,j}^{(\nu)}(x_{(\tau+1)j+\tau}),$$

$$S_{\tau+1,j}^{(\nu)}(x_{(\tau+1)(j+1)}) = L_{\tau+1,j+1}^{(\nu)}(x_{(\tau+1)(j+1)}), \quad \nu = \overline{0, \tau}, \quad j = \overline{0, p-1}.$$

На отрезке  $[x_{(\tau+1)j+\tau}, x_{(\tau+1)(j+1)}]$  сплайн  $S_{\tau+1,j}(x)$  имеет вид

$$S_{\tau+1,j}(x) = \sum_{i=0}^{\tau} \alpha_i (x - x_{(\tau+1)j+\tau})^i + \\ + \sum_{i=0}^{\tau} \beta_i \left( x - x_{(\tau+1)j+\tau} - i \frac{x_{(\tau+1)(j+1)} - x_{(\tau+1)j+\tau}}{\tau+1} \right)^{\tau+1-i},$$

где  $\alpha_i = \frac{1}{i!} L_{\tau+1,j}^{(i)}(x_{(\tau+1)j+\tau})$ ,  $i = \overline{0, \tau}$ ,

а для определения  $\beta_i$  получим систему уравнений вида (см. доказательство леммы 3)

$$\sum_{i=0}^{\tau+1} \beta_i \frac{(\tau+1)!}{(\tau+1-i)!} \left( \xi_{j+1} - x_{(\tau+1)j+\tau} - i \frac{\xi_{j+1} - x_{(\tau+1)j+\tau}}{\tau+1} \right)^{\tau+1-i} = \\ = L_{\tau+1,j+1}^{(\kappa)}(\xi_{j+1}) - \sum_{i=\kappa}^{\tau} L_{\tau+1,j}^{(i)}(x_{(\tau+1)j+\tau}) \frac{(\xi_{j+1} - x_{(\tau+1)j+\tau})^{i-\kappa}}{(i-\kappa)!}, \quad \kappa = \overline{0, \tau}.$$

Как и в лемме 3, эта система имеет единственное решение

$$\beta_i = \sum_{\kappa=0}^{\tau} \frac{L_{\tau+1,j+1}^{(\kappa)}(\xi_{j+1}) - \sum_{\nu=\kappa}^{\tau} L_{\tau+1,j}^{(\nu)}(x_{(\tau+1)j+\tau}) \frac{(\xi_{j+1} - x_{(\tau+1)j+\tau})^{\nu-\kappa}}{(\nu-\kappa)!}}{(\xi_{j+1} - x_{(\tau+1)j+\tau})^{\tau+1-\kappa}} A_{i\kappa}, \\ i = \overline{0, \tau}.$$

Далее, используя формулу Тейлора, получаем

$$\sum_{\nu=\kappa}^{\tau-1} L_{\tau+1,j}^{(\nu)}(x_{(\tau+1)j+\tau}) \frac{(\xi_{j+1} - x_{(\tau+1)j+\tau})^{\nu-\kappa}}{(\nu-\kappa)!} =$$

$$= L_{\tau+1,j}^{(\kappa)}(\xi_{j+1}) - L_{\tau+1,j}^{(\tau)}(\theta) \frac{(\xi_{j+1} - x_{(\tau+1)j+\tau})^{\tau-\kappa}}{(\tau-\kappa)!},$$

$$\theta \in (x_{(\tau+1)j+\tau}, \xi_{j+1}).$$

Отсюда сразу следует, что

$$|\beta_i| \leq$$

$$\leq \sum_{\kappa=0}^{\tau} \left\{ \frac{|L_{\tau+1,j+1}^{(\kappa)}(\xi_{j+1}) - L_{\tau+1,j}^{(\kappa)}(\xi_{j+1})|}{(\xi_{j+1} - x_{(\tau+1)j+\tau})^{\tau+1-\kappa}} + \right.$$

$$\left. + \frac{|L_{\tau+1,j}^{(\tau)}(\theta) - L_{\tau+1,j}^{(\tau)}(x_{(\tau+1)j+\tau})| \frac{(\xi_{j+1} - x_{(\tau+1)j+\tau})^{\tau-\kappa}}{(\tau-\kappa)!}}{(\xi_{j+1} - x_{(\tau+1)j+\tau})^{\tau+1-\kappa}} \right\} |A_{i\kappa}| \leq$$

$$\leq \sum_{\kappa=0}^{\tau} \left\{ \frac{|L_{\tau+1,j+1}^{(\kappa)}(\xi_{j+1}) - p^{(\kappa)}(\xi_{j+1})| + |p^{(\kappa)}(\xi_{j+1}) - L_{\tau+1,j}^{(\kappa)}(\xi_{j+1})|}{(\xi_{j+1} - x_{(\tau+1)j+\tau})^{\tau+1-\kappa}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\tau+1}{(\tau-\kappa)!} \frac{\omega(\xi_{j+1} - x_{(\tau+1)j+\tau})}{\xi_{j+1} - x_{(\tau+1)j+\tau}} \right\} |A_{i\kappa}| \leq$$

$$\leq \sum_{\kappa=0}^{\tau} \left\{ (\tau+2) \frac{P_2^{\tau-\kappa} \omega(P_2(\xi_{j+1}-\xi_j)) + \omega(\xi_{j+1}-\xi_j)}{\xi_{j+1}-\xi_j} (\tau+1)^{\tau+1-\kappa} + \frac{(\tau+1)^2}{(\tau-\kappa)!} \cdot \frac{\omega\left(\frac{\xi_{j+1}-\xi_j}{\tau+1}\right)}{\xi_{j+1}-\xi_j} \right\} |A_{i\kappa}| \leq$$

$$\leq G_i \frac{\omega(\xi_{j+1}-\xi_j)}{\xi_{j+1}-\xi_j}, \quad i = \overline{0, \tau}.$$

Заметим, что в этих неравенствах использованы соотношения (23)-(25) и условие (27), а константы  $G_i$  не зависят от  $j, N$  и функции  $\varphi$ .

Далее, следуя полностью доказательству леммы 3, получаем, что при  $x \in [x_{(\tau+1)j+\tau}, \xi_{j+1}]$

$$|S_{\tau+1,j}^{(\nu)}(x) - L_{\tau+1,j}^{(\nu)}(x)| \leq D_1 (x - x_{(\tau+1)j+\tau})^{\tau-\nu} \omega(x - x_{(\tau+1)j+\tau}), \quad (32)$$

$j = \overline{0, \tau},$

$$|S_{\tau+1,j}^{(\nu)}(x') - S_{\tau+1,j}^{(\nu)}(x'')| \leq D_2 \omega(|x' - x''|); \quad x', x'' \in [x_{(\tau+1)j+\tau}, \xi_{j+1}], \quad (33)$$

где  $D_1$  и  $D_2$  - постоянные, не зависящие от  $j, N$  и  $\varphi$ .

Вернемся теперь к утверждениям леммы. Равенство (28) очевидным образом следует из построения сплайна

$$S_{\tau,N}(\varphi; x), \quad \text{кроме того } S_{\tau,N} \in C^{(\nu)}[a, b].$$

Далее, для произвольных  $x', x'' \in [a, b]$  могут быть следующие возможности:

а)  $x', x'' \in [\xi_j, x_{(\tau+1)j+\tau}]$ :

$$|S_{\tau,N}^{(\nu)}(x') - S_{\tau,N}^{(\nu)}(x'')| = |L_{\tau+1,j}^{(\nu)}(x') - L_{\tau+1,j}^{(\nu)}(x'')| \leq (\tau+1) \omega(|x' - x''|);$$

б)  $x', x'' \in [x_{(\tau+1)j+\tau}, \xi_{j+1}]$ :

$$|S_{\tau,N}^{(\nu)}(x') - S_{\tau,N}^{(\nu)}(x'')| = |S_{\tau+1,j}^{(\nu)}(x') - S_{\tau+1,j}^{(\nu)}(x'')| \leq D_2 \omega(|x' - x''|);$$

$$b) x' \in [\xi_j, x_{(\tau+1)j+\tau}], x'' \in [x_{(\tau+1)j+\tau}, \xi_{j+1}]:$$

$$|S_{\tau,N}^{(\tau)}(x') - S_{\tau,N}^{(\tau)}(x'')| \leq |L_{\tau+1,j}^{(\tau)}(x') - L_{\tau+1,j}^{(\tau)}(x_{(\tau+1)j+\tau})| + \\ + |S_{\tau+1,j}^{(\tau)}(x_{(\tau+1)j+\tau}) - S_{\tau+1,j}^{(\tau)}(x'')| \leq (\tau+1 + \mathfrak{D}_2) \omega(|x' - x''|);$$

$$r) x' \in [\xi_j, \xi_{j+1}], x'' \in [\xi_{j+1}, \xi_{j+2}]:$$

$$|S_{\tau,N}^{(\tau)}(x') - S_{\tau,N}^{(\tau)}(x'')| \leq |S_{\tau,N}^{(\tau)}(x') - S_{\tau,N}^{(\tau)}(\xi_{j+1})| + \\ + |S_{\tau,N}^{(\tau)}(\xi_{j+1}) - S_{\tau,N}^{(\tau)}(x'')| \leq 2(\tau+1 + \mathfrak{D}_2) \omega(|x' - x''|);$$

$$d) x' \in [\xi_j, \xi_{j+1}], x'' \in [\xi_{k+1}, \xi_{k+2}], k > j:$$

$$|S_{\tau,N}^{(\tau)}(x') - S_{\tau,N}^{(\tau)}(x'')| \leq |S_{\tau,N}^{(\tau)}(x') - S_{\tau,N}^{(\tau)}(\xi_{j+1})| + \\ + |L_{\tau+1,j+1}^{(\tau)}(\xi_{j+1}) - \varphi^{(\tau)}(\xi_{j+1})| + |\varphi^{(\tau)}(\xi_{j+1}) - \varphi^{(\tau)}(\xi_{k+1})| + \\ + |\varphi^{(\tau)}(\xi_{k+1}) - L_{\tau+1,k+1}^{(\tau)}(\xi_{k+1})| + |S_{\tau,N}^{(\tau)}(\xi_{k+1}) - S_{\tau,N}^{(\tau)}(x'')| \leq \\ \leq (1 + 2(\tau+2) + 2(\tau+1 + \mathfrak{D}_2)) \omega(|x' - x''|).$$

Следовательно, (31) доказано.

Пусть  $x \in [a, b]$ , а  $\bar{x}$  - ближайший к  $x$  узел сетки (26). Тогда (29) непосредственно следует из (23).

При  $\tau \geq 1$  имеем

$$|S_{\tau,N}(x) - \varphi(x)| = \\ = |S_{\tau,N}(x) - \varphi(x) - S_{\tau,N}(\bar{x}) + \varphi(\bar{x})| = |x - \bar{x}| |S'_{\tau,N}(\theta) - \varphi'(\theta)|,$$

где  $\theta$  лежит между  $x$  и  $\bar{x}$ . Используя определение сплайна  $S_{\tau, N}(x)$  и неравенства (24), (25) и (32), убеждаемся в справедливости (30).

Лемма доказана.

Следствие. Справедливо неравенство

$$\|S_{\tau, N}(f; x)\|_{C[a, b]} \leq C_{\tau} \|f(x)\|_{C[a, b]},$$

где постоянная  $C_{\tau}$  не зависит от  $N$  и  $f$ .

Доказательство. Пусть  $x \in [a, b]$ . Могут быть две ситуации:

А.  $x \in [\xi_j, x_{(\tau+1)j+\tau}]$ ,  $j = \overline{0, p-1}$ ,  $x \in [\xi_p, x_N]$ .

Тогда утверждение следствия следует из свойств многочленов Лагранжа.

Б.  $x \in [x_{(\tau+1)j+\tau}, \xi_{j+1}]$ ,  $j = \overline{0, p-1}$ .

В этом случае имеем

$$\begin{aligned} |S_{\tau, N}(x)| &= |S_{\tau+1, j}(x)| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{\tau} |\alpha_i| (\xi_{j+1} - x_{(\tau+1)j+\tau})^{\tau+1} + \sum_{i=0}^{\tau} |\beta_i| (\xi_{j+1} - x_{(\tau+1)j+\tau})^{\tau+1} \left(\frac{\tau+1-j}{\tau+1}\right)^{\tau+1}. \end{aligned} \quad (34)$$

Но (см. доказательство леммы)

$$\begin{aligned} |\alpha_i| &= \frac{1}{i!} |L_{\tau+1, j}^{(i)}(x_{(\tau+1)j+\tau})| \leq \\ &\leq \frac{1}{i!} \left(\frac{2}{\xi_{j+1} - \xi_j}\right)^i \Lambda_{\tau+1, i} \|f\|_{C[a, b]}, \quad i = \overline{0, \tau}. \end{aligned}$$

$$|\beta_i| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\kappa=0}^{\tau} \left\{ \frac{|L_{\tau+1, j+1}^{(\kappa)}(\xi_{j+1})| + |L_{\tau+1, j}^{(\kappa)}(\xi_{j+1})|}{(\xi_{j+1} - x_{(\tau+1)j+\tau})^{\tau+1-\kappa}} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{(\tau-\kappa)!} \frac{|L_{\tau+1, j}^{(\tau)}(\theta)| + |L_{\tau+1, j}^{(\tau)}(x_{(\tau+1)j+\tau})|}{\xi_{j+1} - x_{(\tau+1)j+\tau}} \right\} |\Lambda_{i, \kappa}| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{\kappa=0}^{\tau} \left\{ \Lambda_{\tau+1, \kappa} \|\varphi\|_{C[a, b]}^{(\tau+1)^{\tau+\kappa}} \frac{\left(\frac{2}{\xi_{j+2}-\xi_{j+1}}\right)^{\kappa} + \left(\frac{2}{\xi_{j+1}-\xi_j}\right)^{\kappa}}{(\xi_{j+1}-\xi_j)^{\tau+1-\kappa}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(\tau-\kappa)!} \Lambda_{\tau+1, \kappa} \|\varphi\|_{C[a, b]}^{(\tau+1)^{\tau+1}} \right\} |\Lambda_{i, \kappa}| \leq \\ \leq G_i \|\varphi\|_{C[a, b]} / (\xi_{j+1}-\xi_j)^{\tau+1}, \quad i = \overline{0, \tau},$$

где  $G_i$  не зависят от  $j, N$  и  $\varphi$ . Подставляя эти неравенства в (34), получим утверждение следствия и в этом случае.

Замечание. Мы считали  $N = p(\tau+1) + \ell$ ,  $p \geq 1$ ,  $0 \leq \ell \leq \tau$ , и оставшиеся  $\ell$  узлов расположили у точки  $b$ , но ничто не мешает взять их у точки  $a$ , лишь бы выполнялось условие (27). В этом случае все построения проводятся совершенно аналогично, а свойства построенного сплайна сохраняются.

Далее, мы построили сплайн, интерполирующий заданную функцию, хотя нам в дальнейшем это свойство и не понадобится: основную роль играют для нас свойства (29)–(30) и зависимость сплайна только от значения функции  $\varphi$  в узлах сетки. Поэтому можно провести более "изящное" построение, получая сплайн необходимой гладкости из следующих соотношений:

$$S_{\tau, N}(\varphi; x) = \begin{cases} S_{\tau+1, j}(x), & x \in [\xi_j, \xi_{j+1}], \quad j = \overline{0, p-1}, \\ L_{\tau+1, p}(x), & x \in [\xi_p, b], \end{cases}$$

где  $S_{\tau+1, j}(x)$  – сплайн степени  $\tau+1$  дефекта 1, определяемый равенствами

$$S_{\tau+1, j}^{(v)}(\xi_j) = L_{\tau+1, j}^{(v)}(\xi_j), \quad S_{\tau+1, j}^{(v)}(\xi_{j+1}) = L_{\tau+1, j+1}^{(v)}(\xi_{j+1}), \quad v = \overline{0, \tau}, \quad j = \overline{0, p-1}.$$

Построения в этом случае проводятся аналогично, а свойства (29)-(31) сохраняются.

### § 3. Оптимизация квадратурных формул для сингулярных интегралов с подвижной особенностью

В этом параграфе мы решаем задачу 1 из § 2. Введем на отрезке  $[-1, 1]$  равномерную сетку узлов

$$x_i = -1 + 2i/N, \quad i = \overline{0, N}. \quad (35)$$

Заметим, что она удовлетворяет условию (27) с постоянными  $P_1 = P_2 = 1$ .

Для функции  $\varphi \in W^{\tau+m-1} H_\omega[-1, 1]$  построим, опираясь на лемму 5, на сетке (35) сплайн  $S_{\tau+m-1, N}(\varphi; x)$ .

Рассмотрим квадратурную формулу вида (2)

$$\begin{aligned} J(m, \varphi, t) &= \\ &= \int_{-1}^1 \frac{S_{\tau+m-1, N}(\varphi; x)}{(x-t)^m} dx + R(m, \varphi, t, X_N, A_N, 0) = \\ &= \sum_{i=0}^N a_i(t) \varphi(x_i) + R(m, \varphi, t, X_N, A_N, 0), \quad -1 < t < 1, \end{aligned} \quad (36)$$

где вектор  $A_N = \{a_i(t)\}$  определяется интегрированием сплайна  $S_{\tau+m-1, N}(\varphi; x)$ , а координаты  $X_N$  задаются равенствами (35). Погрешность квадратурной формулы (36) характеризует следующая теорема.

Теорема 1. Справедливы неравенства

$$\sup_{t \in [-1, 1]} |R(1, \varphi, t, X_N, A_N, 0)| \leq F_1 \omega\left(\frac{1}{N}\right) \frac{2\tau N}{N^2},$$

$$\sup_{t \in [-1 + \frac{1}{N}, 1 - \frac{1}{N}]} |R(m, \varphi, t, X_N, A_N, 0)| \leq F_2 \omega\left(\frac{1}{N}\right) \frac{1}{N^{\tau}}, \quad m \geq 2,$$

где  $F_1$  и  $F_2$  - постоянные, не зависящие от  $N$  и функции  $\varphi \in W^{\tau+m-1} H_\omega$ .

Доказательство. Воспользуемся леммой 1. Для  $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$  и  $t \in (-1, 1)$  имеем

$$\begin{aligned} |R(m, \varphi, t, X_N, A_N, 0)| &= |S(m, \varphi - S_{\tau+m-1, N}, t)| \leq \\ &\leq 2 \|\varphi - S_{\tau+m-1, N}\|_{C[-1, 1]} \cdot \int_{\delta}^1 \frac{dx}{x^m} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{(m-1)!} \int_0^\delta \frac{\omega(\varphi^{(m-1)} - S_{\tau+m-1, N}^{(m-1)}; x)}{x} dx +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|\varphi^{(k)}(t) - S_{\tau+m-1, N}^{(k)}(t)|}{k!} \left| \int_{\max(t-\delta, -1)}^{\min(t+\delta, 1)} \frac{dx}{(x-t)^{m-k}} \right|.$$

Оценим последовательно все слагаемые в правой части, используя свойства сходимости сплайна  $S_{\tau+m-1, N}(\varphi; x)$ , доказанные в лемме 5. Имеем

$$|S_{\tau+m-1, N}^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)| \leq$$

$$\leq \mathcal{D}_1 N^{-(\tau+m-1-k)} \omega\left(\frac{1}{N}\right), \quad k = \overline{0, \tau+m-1}, \quad x \in [-1, 1], \quad (37)$$

и

$$\omega(\varphi^{(m-1)} - S_{\tau+m-1, N}^{(m-1)}; x) \leq$$

$$\leq \begin{cases} \mathcal{D}_2 \omega(x), & \tau = 0; \\ \mathcal{D}_1 x N^{-(\tau-1)} \omega\left(\frac{1}{N}\right), & \tau \geq 1, \quad 0 \leq x \leq 2, \end{cases} \quad (38)$$

где постоянные  $\mathcal{D}_1$  и  $\mathcal{D}_2$  не зависят от  $N$  и  $\varphi(x)$ . Положим теперь  $\delta = 1/N$  и рассмотрим сначала случай  $m \geq 2$ . При  $t \in [-1+1/N, 1-1/N]$  получаем

$$\int_{\max(t-\delta, -1)}^{\min(t+\delta, 1)} \frac{dx}{(x-t)^{m-k}} = \int_{t-\delta}^{t+\delta} \frac{dx}{(x-t)^{m-k}} =$$

$$= \begin{cases} 0, & m-k & - \text{нечетное} \\ \frac{2\delta^{k-m+1}}{k-m+1}, & m-k & - \text{четное} \end{cases}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{|\varphi^{(k)}(t) - S_{\tau+m-1, N}^{(k)}(t)|}{k!} \left| \int_{\max(t-\delta, -1)}^{\min(t+\delta, 1)} \frac{dx}{(x-t)^{m-k}} \right| \leq$$

$$\leq \mathcal{D}_3 N^{-\tau} \omega(1/N),$$

а постоянная  $\mathcal{D}_3$  не зависит от  $N$  и  $\varphi(x)$ . Учитывая это неравенство, соотношение (37) при  $k=0$ , неравенство

(38) и свойство (3) модуля непрерывности  $\omega(\delta)$ , получим утверждение теоремы при  $m \geq 2$ .

При  $m=1$  имеем для  $t \in [-1+1/N, 1-1/N]$

$$\int_{\max(t-\delta, -1)}^{\min(t+\delta, 1)} \frac{dx}{x-t} = 0.$$

Пусть  $t \in [1-\frac{1}{N}, 1)$  (случай  $t \in (-1, -1+\frac{1}{N}]$  рассматривается аналогично). Получим, учитывая, что

$$|f(t) - S_{\tau, N}(t)| \left| \int_{t-1/N}^1 \frac{dx}{x-t} \right| \leq$$

$$\leq |\ln(1-t)N| \cdot \begin{cases} \mathcal{D}_2 \omega(1-t), \tau=0; \\ \mathcal{D}_1 (1-t) N^{-\tau-1} \omega(\frac{1}{N}), \tau \geq 1. \end{cases}$$

Но  $(1-t)|\ln(1-t)N| \leq 1/eN$ ,

а  $|\ln(1-t)N| \omega(1-t) \leq C_2 \omega(1/N)$ ,  $t \in [1-1/N, 1)$

(свойство (4) модуля непрерывности  $\omega(\delta)$ ). Учитывая эти соотношения, неравенства (37)-(38) и свойство (3), убеждаемся в справедливости теоремы при  $m=1$ .

Из доказательства теоремы 1 можно заметить, что остаток квадратурной формулы (36) при  $m \geq 2$  стремится к бесконечности при  $t \rightarrow \pm 1$  и фиксированном  $N$ . Это объясняется тем, что эта формула использует только значения плотности  $f(x)$  в узлах. Указанного недостатка лишена следующая квадратурная формула:

$$S(m, f, t) =$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{g(x) dx}{(x-t)^m} + R(m, f, t, X_N, A_N, \tau+m-1) = \quad (39)$$

$$= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{\tau+m-1} a_{ij}(t) f^{(j)}(x_i) + R(m, f, t, X_N, A_N, \tau+m-1), -1 < t < 1,$$

где координаты вектора  $X_N$  вычисляются по формуле (35), а матрица коэффициентов  $A_N = \{a_{ij}(t)\}$  определяется интегрированием сплайна  $g(x)$ , построенного следующим образом:

$$g(x) = S_{\tau+m}(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, N},$$

где  $S_{\tau+m}(x)$  — сплайн из леммы 3 для функции  $f \in W^{\tau+m-1} H_\omega[-1, 1]$  на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Теорема 2. Для остаточного члена квадратурной формулы (39) справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [-1, 1]} |R(m, f, t, X_N, A_N, \tau+m-1)| \leq \\ & \leq F_3 \omega\left(\frac{1}{N}\right) \frac{1}{N^\beta} \left[ \frac{1}{m} \right], \quad f \in W^{\tau+m-1} H_\omega[-1, 1], \end{aligned}$$

где постоянная  $F_3$  не зависит от  $N$  и функции  $f(x)$ , а  $\llbracket \beta \rrbracket$  — целая часть числа  $\beta > 0$ .

Доказательство. Как и в теореме 1 воспользуемся леммой 1. Пусть  $\delta \in (0, 1/2]$  и  $t \in (-1, 1)$ , тогда

$$\begin{aligned} |R(m, f, t, X_N, A_N, \tau+m-1)| &= \left| \int_{-1}^1 \frac{f(x) - g(x)}{(x-t)^m} dx \right| \leq \quad (40) \\ &\leq 2 \|f - g\|_{C[-1, 1]} \int_{\delta}^1 \frac{dx}{x^m} + \\ &+ \frac{2}{(m-1)!} \int_0^{\delta} \frac{\omega(f^{(m-1)} - g^{(m-1)}; x)}{x} dx + \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|f^{(k)}(t) - g^{(k)}(t)|}{k!} \left| \int_{\max(t-\delta, -1)}^{\min(t+\delta, 1)} \frac{dx}{(x-t)^{m-k}} \right|. \end{aligned}$$

Качество аппроксимации функции  $f(x)$  и ее производных сплайном  $g(x)$  оценивается следующими неравенствами:

$$|f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)| \leq C_1 \omega(|x - x_i|) |x - x_i|^{\tau+m-1-k}, \quad k = 0, \tau+m-1, \quad (41)$$

$$x \in [-1, 1],$$

где  $x_i$  - ближайший к точке  $x$  узел сетки (35). Кроме того,  $g \in W^{\tau+m-1} H_{\bar{\omega}}[-1,1]$  (см. следствие 2), а  $\bar{\omega}(t) = (1+2C_2)\omega(t)$ , откуда

$$\omega(\varphi^{\tau+m-1} - g^{\tau+m-1}; x) \leq 2(1+C_2)\omega(x), \quad x \in [0,2]. \quad (42)$$

Положим  $\delta = 1/N$  и оценим последовательно все слагаемые в правой части (40). Первые два оцениваются как при доказательстве теоремы 1, только с использованием (41) и (42) и свойства (3) модуля непрерывности  $\omega(\delta)$  при  $\tau=0$ .

При  $t \in [-1+1/N, 1-1/N]$  сумма в правой части (40) оценивается аналогично доказательству теоремы 1. Остается оценить эту сумму при  $t \in [1-1/N, 1)$  (случай  $t \in (-1, -1+1/N]$  рассматривается аналогично). Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\max(t-\delta, -1)}^{\min(t+\delta, 1)} \frac{dx}{(x-t)^{m-k}} = \int_{t-1/N}^1 \frac{dx}{(x-t)^{m-k}} = \\ & = \begin{cases} \ln(1-t)N, & k=m-1, \\ \frac{(1-t)^{k-m+1} - (-1/N)^{k-m+1}}{k-m+1}, & k < m-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Далее, учитывая, что  $g^{(k)}(1) = \varphi^{(k)}(1)$ ,  $k = \overline{0, \tau+m-1}$ , получаем

$$|\varphi^{(k)}(t) - g^{(k)}(t)| \leq (1-t)^{m-k} \omega(\varphi^{(m-1)} - g^{(m-1)}; 1-t), \quad k = \overline{0, m-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & |\varphi^{(k)}(t) - g^{(k)}(t)| \cdot \left| \int_{\max(t-\delta, -1)}^{\min(t+\delta, 1)} \frac{dx}{(x-t)^{m-k}} \right| \leq \\ & \leq \begin{cases} |\ln(1-t)N| \cdot \omega(\varphi^{(m-1)} - g^{(m-1)}; 1-t), & k=m-1, \\ \frac{(1-t)^{m-k-1} N^{m-k-1} + 1}{m-k+1} \omega(\varphi^{(m-1)} - g^{(m-1)}; 1-t), & k < m-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Замечая, что  $(1-t)N \leq 1$ , используя (41) при  $\tau > 1$ , (42) и (4) при  $\tau = 0$ , сразу получаем утверждение теоремы.

Оптимальность по порядку квадратурных формул (36) и (39) устанавливает следующая теорема

Теорема 3. Справедливо неравенство

$$V_N(m, W^{\tau+m-1} H_\omega[-1,1], [-1+\frac{1}{N}, 1-\frac{1}{N}], \Gamma_N) \geq F_4 \omega\left(\frac{1}{N}\right) \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} (\ln N)^{\left[\frac{1}{m}\right]}, \quad m \geq 1,$$

где  $\Gamma_N$  - произвольный вектор, а постоянная  $F_4$  не зависит от  $N$ .

Доказательство. Возьмем на  $[-1,1]$  произвольную сегку узлов

$$-1 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N \leq 1.$$

В силу леммы 2 найдутся такая точка  $\xi \in [-1,1]$  и отрезки  $\Delta_j^* = [\theta_{j-1}, \theta_j]$ ,  $\theta_j - \theta_{j-1} = 1/(N+1)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , что

$$x_i \in (\theta_{j-1}, \theta_j), \quad i = \overline{0, N}$$

$$0 < x - \xi < \frac{3j}{N+1}, \quad x \in (\theta_{j-1}, \theta_j), \quad j = \overline{1, n}, \quad n \geq \frac{N+1}{6}.$$

Очевидно, можно считать, что  $\xi \in [-1+1/N, 1-1/N]$ .

Построим функцию  $\varphi(x)$  следующим образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} B_{\tau+m}(x), & x \in \Delta_j^*, \\ 0, & x \in \overline{\Delta_j^*}, \quad j = \overline{1, n}, \end{cases}$$

где  $B_{\tau+m}(x)$  - сплайн из леммы 4 на отрезке  $\Delta_j^*$ .

Очевидно, что

$$\varphi \in W^{\tau+m-1} H_\omega[-1,1] \quad \text{и} \quad \varphi^{(i)}(x_j) = 0, \quad j = \overline{0, \tau+m-1}, \quad i = \overline{0, N}.$$

Теперь для произвольных  $\Gamma_N$  и  $A_N$  имеем

$$\sup_{t \in [-1+\frac{1}{N}, 1-\frac{1}{N}]} |R(m, \varphi, t, X_N, A_N, \Gamma_N)| =$$

$$= \sup_{t \in [-1+1/N, 1-1/N]} |S(m, f, t)| \geq S(m, f, \varepsilon).$$

Но

$$\begin{aligned} S(m, f, \varepsilon) &= \int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{(x-\varepsilon)^m} = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{\Delta_j^*} \frac{f(x) dx}{(x-\varepsilon)^m} \geq \sum_{j=1}^n \left( \frac{N+1}{3j} \right)^m \int_{\Delta_j^*} f(x) dx = \\ &= \frac{2^2 (\tau+m-1)}{3^m} \omega \left( \frac{1}{(N+1)(\tau+m+1)} \right) \frac{1}{(\tau+m+1)^{\tau+m}} \frac{1}{(N+1)^\tau} \cdot \\ &\cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^m} \geq F_4 \omega \left( \frac{1}{N} \right) \frac{1}{N^\tau} (\ln N)^{\lfloor \frac{1}{m} \rfloor}, \quad m \geq 1. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

#### § 4. Оптимизация квадратурных формул для сингулярных интегралов с неподвижной особенностью

В этом параграфе дается решение задачи 2 из § 2 для классов  $W^{\tau+m-1} H_\omega[-1, 1]$ , точнее, определяется порядок величины

$$V_n(m, W^{\tau+m-1} H^\alpha[-1, 1], t, \Gamma_N), \quad -1 < t < 1,$$

для произвольного вектора  $\Gamma_N$  и строится квадратурная формула, оптимальная по порядку в точке  $t$ .

Пусть  $t \in (-1, 1)$  — фиксированная точка. Положим

$$N = (\tau+m)(N_1+N_2), \quad P_1 \left( \frac{1-t}{1+t} \right)^{1/\sigma} \leq \frac{N_1}{N_2} \leq P_2 \left( \frac{1-t}{1+t} \right)^{1/\sigma},$$

где  $N_1, N_2 \geq 1$  — целые,  $\sigma = \frac{\tau+m+\alpha}{\tau+\alpha}$ , а  $P_1, P_2$  ( $P_1 \leq P_2$ ) — заранее выбранные постоянные, не зависящие от  $N_1, N_2$

Введем на  $[-1, 1]$  сетку узлов вида (26)

$$\begin{aligned} \xi_j &= t - (1+t)((N_2-j)/N_2)^\sigma, \quad j = \overline{0, N_2}, \\ \xi_{N_2+j} &= t + (1-t)(j/N_1)^\sigma, \quad j = \overline{0, N_1}, \\ x_{j(l+m)+i} &= \xi_j + i \frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{\tau+m}, \quad i = \overline{0, 2+m}, \quad j = \overline{0, N_1+N_2-1}. \end{aligned} \quad (43)$$

Легко проверяется выполнение условия (27):

$$\min(2^{-\sigma}, P_2^{-\sigma}) \leq \frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{\xi_j - \xi_{j-1}} \leq \max(2^\sigma, P_1^{-\sigma}), \quad j = \overline{1, N_1+N_2-1}.$$

Для функции  $f \in W^{\tau+m-1} H_\alpha[-1, 1]$  построим сплайн

$$g(x) = S_{\tau+m-1, N}(x), \quad x \in [-1, 1],$$

где  $S_{\tau+m-1, N}(x)$  — сплайн из леммы 5 на сетке (43).  
Рассмотрим на классе  $W^{\tau+m-1} H_\alpha[-1, 1]$  квадратурную формулу

$$\begin{aligned} S(m, f, t) &= \\ &= \int_{-1}^1 \frac{g(x) dx}{(x-t)^m} + R(m, f, t, X_N, A_N, 0) = \\ &= \sum_{i=0}^N a_i(t) f(x_i) + R(m, f, t, X_N, A_N, 0), \end{aligned} \quad (44)$$

где вектор  $A_N = \{a_i(t)\}$  определяется интегрированием сплайна  $g(x)$ , а координаты  $X_N$  задаются формулой (43).

Теорема 4. Для остатка квадратурной формулы (44) справедлива оценка

$$|R(m, f, t, X_N, A_N, 0)| \leq F_5 N^{-(\tau+m-1+\alpha)},$$

где постоянная  $F_5$  не зависит от  $N$  и функции  $f(x) \in W^{\tau+m-1} H_\alpha[-1, 1]$ .

Доказательство. Для остатка формулы (44) справедливо очевидное неравенство

$$|R(m, f, t, X_N, A_N, 0)| \leq \sum_{j=0}^{N_2-2} \left| \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{f(x) - g(x)}{(x-t)^m} dx \right| + \\ + \left| \int_{\xi_{N_2-1}}^{\xi_{N_2+1}} \frac{f(x) - g(x)}{(x-t)^m} dx \right| + \sum_{j=N_2+1}^{N_2+N_1-1} \left| \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{f(x) - g(x)}{(x-t)^m} dx \right|.$$

Но, с учетом леммы 5, для  $x \in [\xi_j, \xi_{j+1}]$  имеем

$$|f(x) - g(x)| \leq \begin{cases} 2|x - \bar{x}|^\alpha, & \tau + m - 1 = 0, \\ C_3 |x - \bar{x}| (\xi_{j+1} - \xi_j)^{\tau + m - 2 + \alpha}, & \tau + m - 1 > 0. \end{cases}$$

Здесь  $\bar{x}$  - ближайший к точке  $x$  узел сетки (43).  
Учитывая эти неравенства, получаем

$$\sum_{j=0}^{N_2-2} \left| \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{f(x) - g(x)}{(x-t)^m} dx \right| \leq \sum_{j=0}^{N_2-2} \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{|f(x) - g(x)| dx}{(t-x)^m} \leq \\ \leq \sum_{j=0}^{N_2-2} C_3 (\xi_{j+1} - \xi_j)^{\tau + m + \alpha} (t - \xi_{j+1})^{-m} \leq \\ \leq C_3 \frac{(1+t)^{\tau + \alpha}}{N_2^{\sigma(\tau + \alpha)}} \sum_{j=0}^{N_2-2} \frac{[(N_2 - j)^\sigma - (N_2 - j - 1)^\sigma]^{\tau + m + \alpha}}{(N_2 - j - 1)^{\sigma m}} \leq \\ \leq C_3 \frac{(1+t)^{\tau + \alpha}}{N_2^{\sigma(\tau + \alpha)}} \sum_{j=0}^{N_2-2} \frac{[\sigma(N_2 - j)^{\sigma-1}]^{\tau + m + \alpha}}{(N_2 - j - 1)^{\sigma m}} \leq$$

$$\leq C_3 \frac{(1+t)^{\tau+d}}{N_2^{\sigma(\tau+\alpha)}} \sum_{j=1}^{N_2-1} \frac{(1+j)^{(\sigma-1)(\tau+m+\alpha)}}{j^{\sigma m}} \cdot \sigma^{\tau+m+\alpha} \leq$$

$$\leq C_3 \sigma^{\tau+m+\alpha} \frac{(1+t)^{\tau+\alpha}}{N_2^{\tau+m+\alpha}} \sum_{j=1}^{N_2-1} \left(\frac{1+j}{j}\right)^{\sigma m} \leq$$

$$\leq \mathcal{D}_1 (1+t)^{\tau+\alpha} N_2^{-(\tau+m-1+\alpha)} \leq \mathcal{D}_2 N^{-(\tau+m-1+\alpha)},$$

где постоянные  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  не зависят от  $N$  и  $f(x)$ .

Вторая сумма оценивается совершенно аналогично. Используя лемму 1, оценим теперь интеграл

$$\int_{\xi_{N_2-1}}^{\xi_{N_2+1}} \frac{f(x) - g(x)}{(x-t)^m} dx.$$

Положим

$$\delta = \min((1+t)/N_2^\sigma, (1-t)/N_1^\sigma)/2, \quad \varepsilon = \max((1+t)/N_2^\sigma, (1-t)/N_1^\sigma).$$

Имеем

$$\left| \int_{\xi_{N_2-1}}^{\xi_{N_2+1}} \frac{f(x) - g(x)}{(x-t)^m} dx \right| \leq$$

$$\leq 2 \|f - g\|_{C[\xi_{N_2-1}, \xi_{N_2+1}]} \cdot \int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{dx}{x^m} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{(m-1)!} \int_0^\delta \frac{\omega(\varphi^{(m-1)} - g^{(m-1)}; x)}{x} dx + \\
 & + \sum_{\kappa=0}^{m-1} \frac{|\varphi^{(\kappa)}(t) - g^{(\kappa)}(t)|}{\kappa!} \left| \int_{t-\delta}^{t+\delta} \frac{dx}{(x-t)^{m-\kappa}} \right|.
 \end{aligned}$$

Опять, используя лемму 5, получаем

$$|\varphi^{(\kappa)}(t) - g^{(\kappa)}(t)| \leq C_3 \varepsilon^{\tau+m-1+\alpha-\kappa}, \quad \kappa = \overline{0, \tau+m-1},$$

и

$$\omega(\varphi^{(m-1)} - g^{(m-1)}; x) \leq \mathcal{D}_3 \begin{cases} x^\alpha, & \tau=0, \\ x \varepsilon^{\tau+\alpha-1}, & \tau \geq 1, x \in [0, \delta], \end{cases}$$

где постоянная  $\mathcal{D}_3$  не зависит от  $N$  и  $\varphi(x)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \|\varphi - g\|_{C[\varepsilon_{N_2-1}, \varepsilon_{N_2+1}]} & \int_0^\varepsilon \frac{dx}{x^m} \leq C_3 \varepsilon^{\tau+m-1+\alpha} \int_0^\varepsilon \frac{dx}{x^m} \leq \\
 & \leq C_3 \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{\tau+\alpha} \ln(\varepsilon/\delta), \quad m=1 \\ \varepsilon^{\tau+m-1+\alpha} (\delta^{1-m} - \varepsilon^{1-m}) / (m-1), \quad m \geq 2 \end{array} \right\} \leq \frac{\mathcal{D}_4}{N^{\tau+m+\alpha}}, \\
 \int_0^\delta \omega(\varphi^{(m-1)} - g^{(m-1)}; x) \frac{dx}{x} & \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq \mathcal{D}_3 \left\{ \delta^\alpha / \alpha \quad \text{при } \tau=0; \varepsilon^{\tau+\alpha} / 2 \quad \text{при } \tau \geq 1 \right\} \leq$$

$$\leq \mathcal{D}_5 \left\{ N^{-(m+\alpha)} \quad \text{при } \tau=0; N^{-(\tau+m+\alpha)} \quad \text{при } \tau \geq 1 \right\},$$

и, наконец,

$$|\varphi^{(k)}(t) - g^{(k)}(t)| \cdot \left| \int_{t-\delta}^{t+\delta} \frac{dx}{(x-t)^{m-k}} \right| \leq$$

$$\leq \begin{cases} 0, & m-k - \text{нечетное,} \\ 2C_3 \varepsilon^{\tau+m-1+\alpha-k} \frac{\delta^{k-m+1}}{m-k-1} \leq Q_6 N^{-(\tau+m+\alpha)}, & m-k - \text{четное.} \end{cases}$$

Теорема полностью доказана.

Оптимальность по порядку в точке  $t$  квадратурной формулы (44) устанавливает следующая

Теорема 5. Справедлива оценка

$$V_N(m, W^{\tau+m-1} H^\alpha[-1, 1], t, \Gamma_N) \geq F_6 N^{-(\tau+m-1+\alpha)},$$

где  $\Gamma_N$  - произвольный вектор, а постоянная  $F_6$  не зависит от  $N$ .

Доказательство. Возьмем произвольный вектор узлов  $X_N = \{x_i\}_0^N$ ,  $-1 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N \leq 1$ .

Разобьем отрезок  $[-1, 1]$  на  $2(N+1)$  равных по длине отрезков  $[-1+(i-1)/(N+1), -1+i/(N+1)]$ ,  $i = \overline{1, 2(N+1)}$ .

Очевидно, что количество отрезков, внутренности которых не содержат точек  $x_i$ ,  $i = \overline{0, N}$ , не менее  $N+1$ . Левее или правее точки  $t$  их лежит не менее  $(N+1)/2$ . Рассмотрим, для определенности, случай, когда они расположены правее (другая ситуация рассматривается аналогично).

Обозначим эти отрезки через  $\Delta_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $n \geq (N+1)/2$ .

Положим

$$f(x) = \begin{cases} B_{\tau+m}(x), & x \in \Delta_j, \\ 0, & x \notin \Delta_j, j = \overline{1, n}, \end{cases}$$

где  $B_{\tau+m}(x)$  - сплайн из леммы 4 на отрезке  $\Delta_j$  при  $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ . Очевидно,  $f \in W^{\tau+m-1} H^\alpha[-1, 1]$  и

$$R(m, f, t, X_N, A_N, \Gamma_N) = S(m, f, t)$$

для произвольных  $A_N$  и  $\Gamma_N$ .

Но

$$\begin{aligned}
 J(m, f, t) &= \int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{(x-t)^m} = \\
 &= \sum_{j=1}^n \int_{\Delta_j} \frac{f(x) dx}{(x-t)^m} \geq \frac{1}{2^m} \sum_{j=1}^n \int_{\Delta_j} f(x) dx = \frac{F_6}{N^{\tau+m-1+\alpha}}.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Заметим, что теорему 5 можно было бы не доказывать - ее утверждение следует из соответствующих результатов по оптимизации методов вычисления регулярных интегралов. Мы привели доказательство лишь для иллюстрации применения предложенной методики исследований.

### § 5. Некоторые замечания и дополнения

В заключение работы приведем ряд полезных, на наш взгляд, замечаний и дополнений к результатам предыдущих параграфов по оптимизации квадратурных формул для с. и.

1°. Как уже отмечалось выше, при оптимизации по порядку точности требование о выпуклости вверх модуля непрерывности не ограничивает общности рассуждений, однако уже при асимптотической оптимизации это утверждение не имеет места, и игнорирование этого факта неизбежно приводит к ошибкам.

2°. Результаты, аналогичные теоремам 1-5, имеют место и для сингулярного интеграла

$$J(m, \varphi, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}^m \frac{s-\sigma}{2} \varphi(\sigma) d\sigma, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (45)$$

с плотностью  $\varphi \in W^{\tau+m-1} H_{\omega} \subset C_{2\pi}$ ,  $\tau+1 \in \mathbb{N}$ , понимаемого в смысле главного значения по Коши при  $m=1$  и в смысле конечной части по Адамару при  $m \geq 2$ . Здесь, кроме периодичности, существенную помощь оказывает также формула

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}^m \frac{s-\sigma}{2} \varphi(\sigma) d\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}^m \frac{\sigma}{2} \varphi(s-\sigma) d\sigma, \quad (46)$$

не имеющая места в непериодическом случае. Однако в квадратурных формулах с кратными узлами для с. и. (45) возникают другие трудности, обусловленные известными трудностями кратного периодического (в первую очередь, тригонометрического) интерполирования.

3<sup>o</sup>. Предложенный выше метод оптимизации квадратурных формул для с. и. (1) успешно применим также к оптимизации квадратурных формул для слабо сингулярных интегралов вида

$$S_0 \varphi = \int_0^1 \frac{\ln^m |\tau - t|}{|\tau - t|^\gamma} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 1], \quad \varphi \in C[0, 1], \quad (47)$$

$$\begin{aligned} J_0 \varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^m \left| \sin \frac{\sigma - s}{2} \right| \left| \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} \right|^\gamma \varphi(\sigma) d\sigma \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^m \left| \sin \frac{\sigma}{2} \right| \left| \operatorname{ctg} \frac{\sigma}{2} \right|^\gamma \varphi(s - \sigma) d\sigma, \quad \varphi \in C_{2\pi}, \end{aligned} \quad (48)$$

где  $m+1 \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \gamma < 1$ , понимаемых как обычные несобственные интегралы. Более того, здесь, в отличие от с. и. (1) и (45), не возникает никаких принципиальных трудностей, а возникающие трудности носят лишь легко преодолимый вычислительный характер. При этом, независимо от положения особых точек  $\tau$  и  $s$ , в полной мере сохраняется утверждение замечания, приведенного в конце § 4, что оказывает существенную помощь при получении оценок снизу. Что касается оценок сверху, то они устанавливаются хорошо известными способами (см., напр., [26], а также [4]).

Для иллюстрации остановимся на двух простых результатах.

Интегралу (47) поставим в соответствие квадратурную формулу

$$S_0(\varphi; t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{\sigma_i} a_{ij}(t) \varphi^{(j)}(t_i) + \tau_N(\varphi; t), \quad (49)$$

где  $\{t_i\}$  - произвольная сетка узлов из  $[0, 1]$ ,  $\{a_{ij}(t)\}$  - произвольная система функций из  $C[0, 1]$ ,  $\tau_N(\varphi; t)$  - остаточный член, а  $\{\sigma_i\}$  - данная система целых неотрицательных чисел. Здесь оптимальная оценка погрешности на классе функций  $F \subset C[0, 1]$  определяется по формуле

$$r_N(F) = \inf_{t_i, a_{ij}} \sup_{\varphi \in F} \max_{t \in [0, 1]} |\tau_N(\varphi; t)|.$$

Теорема 6. Пусть  $F = W^r H_\omega[0,1]$ , где  $r+1 \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \sigma_j \leq \tau$ , а  $\omega = \omega(\delta)$ ,  $0 \leq \delta \leq 1$ , - произвольный модуль непрерывности. Тогда

$$\tau_N(F) \asymp \frac{1}{N^r} \omega\left(\frac{1}{N}\right), \quad m+1 \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq j < r,$$

и оптимальной по порядку является квадратурная формула

$$S_0(f; t) = S_0(P_N f; t) + \tau_N^0(f; t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где  $P_N(f; t)$  - интерполяционный многочлен Лагранжа функции  $f(t)$  по узлам  $t_k = t_k^0 = \cos^2 \frac{2k-1}{N} \pi$ ,  $k = \overline{1, N}$ .

Далее, интегралу (48) поставим в соответствие квадратурную формулу с простыми узлами:

$$J_0(\varphi; s) = \sum_{k=1}^N A_k(s) \varphi(s_k) + R_N(\varphi; s), \quad \varphi \in C_{2\pi}, \quad (50)$$

где  $\{s_k\}$  - произвольная система попарно неэквивалентных узлов,  $\{A_k(s)\}$  - произвольная система функций из  $C_{2\pi}$ , а  $R_N(\varphi; s)$  - остаточный член. Здесь оптимальная оценка погрешности класса квадратурных формул (50) на классе  $F \subset C_{2\pi}$  определяется по формуле

$$V_N(F) = \inf_{s_k, A_k} \sup_{\varphi \in F} \max_s |R_N(\varphi; s)|.$$

Теорема 7. Пусть  $F = W^r H_\omega[0, 2\pi]$ , где  $r+1 \in \mathbb{N}$ , а  $\omega = \omega(\delta)$ ,  $0 \leq \delta \leq \pi$ , - произвольный модуль непрерывности. Тогда

$$V_N(F) \asymp \frac{1}{N^r} \omega\left(\frac{1}{N}\right), \quad m+1 \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq j < r, \quad F \subset C_{2\pi},$$

и оптимальной по порядку является квадратурная формула

$$J_0(\varphi; s) = J_0(L_N \varphi; s) + R_N^0(\varphi; s),$$

где  $L_N(\varphi; s)$  - тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа степени  $n = \lfloor N/2 \rfloor$  по узлам  $s_k = s_k^0 = 2k\pi/N + \omega/N$ ,  $0 \leq \omega \leq \pi$ ,  $k = \overline{1, N}$ , не содержащий члена  $\sin(ns + \omega)$  с  $N = 2n$ .

4<sup>0</sup> Интересной представляется задача асимптотической оптимизации квадратурных формул для с. и. (1) и (45). Попытка решить ее при  $m=1$  и частных случаях задания класса плотностей  $F$  предпринята И. В. Бойковым (см., напр., [27, 28]), но, к сожалению, эта попытка явно неудачная, т. к. его результаты в этой области являются ошибочными (см., напр., в [2, 9-11, 29-31]). Это привело также к ошибочности утверждения И. В. Бойкова [28] об асимптотически оптимальном приближенном методе решения характеристического сингулярного интегрального уравнения на единичной окружности (см., напр., [10, 29]).

В связи со сказанным следует отметить, что первый результат по асимптотической оптимизации квадратурных формул для с. и. (1) при  $m=1$  получен в недавней работе Р. Н. Шарипова [9]. Окончательные результаты при решении более частных задач получены Л. А. Онеговым [29, 30, 32], кроме того, в работе [29], наряду с другими результатами, указан также способ исправления ряда наиболее распространенных ошибок И. В. Бойкова (см., напр., в [28]) по оптимизации квадратурных формул для сингулярных интегралов.

#### Л и т е р а т у р а

1. Иванов В. В. Методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Матем. анализ - 1963. - М.: ВИНТИ АН СССР, 1965. - С. 125 - 177.
2. Габдулхаев Б. Г. Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Матем. анализ. т. 18. - М.: ВИНТИ АН СССР, 1980. - С. 251-307.
3. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. - Киев: Наукова думка, 1968. - 288 с.
4. Габдулхаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. - Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1980. - 232 с.

5. Панасюк В. В. , Саврук М. П. , Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. - Киев: Наукова думка, 1984. - 344 с.
6. Белоцерковский С. М. , Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. - М. : Наука, 1985. - 256 с.
7. Иванов В. В. Об оптимальных алгоритмах вычисления сингулярных интегралов // Докл. АН СССР. - 1972. - Т. 264, № 1. - С. 21-24.
8. Иванов В. В. Об оптимальных алгоритмах численного решения сингулярных интегральных уравнений // В сб. : Механика сплошной среды и родств. проблемы анализа. - М. : Наука, 1972. - С. 209 - 219.
9. Шарипов Р. Н. Асимптотически оптимальная квадратурная формула для сингулярного интеграла с ядром Коши на классе Липшица // Казанский ун-т. - Казань, 1984. - 25 с. - Деп. ВИНТИ 18 июля 1984 г. , № 5154 - 84.
10. Апайчева Л. А. Приближенное вычисление сингулярных интегралов в классе функций  $W^r H_k[\varphi]$  // Казанский хим. - техн. ин-т. - Казань, 1985. - 40 с. - Деп. ВИНТИ 19 декабря 1985 г. , № 8722 - В.
11. Шарипов Р. Н. Оптимальные по порядку методы вычисления сингулярных интегралов: Дисс. . . канд. физ. - мат. наук: 01. 01. 01. Защищена 26. 05. 83. - Казань, 1983. - 106 с.
12. Апайчева Л. А. Приближенное вычисление сингулярных интегралов и прямые методы решения интегральных уравнений: Дисс. . . канд. физ. - мат. наук: 01. 01. 01. Защищена 25. 09. 86. - Казань, 1986. - 119 с.
13. Габдулхаев Б. Г. Квадратурные формулы с кратными узлами для сингулярных интегралов // Докл. АН СССР. - 1976. - Т. 227, № 3. - С. 531 - 534.
14. Мелешко И. Н. Интерполяционные квадратурные формулы с кратными узлами для интегралов типа Коши и сингулярных интегралов // Вестник Белорусского ун-та. - 1974. - Сер. 1, § 2. - С. 23 - 29.
15. Солиев Ю. Квадратурные и кубатурные формулы с кратными узлами для сингулярных интегралов: Дисс. . . . канд. физ. - мат. наук: 01. 01. 01. Защищена 07. 06. 79. - Казань, 1979.

16. Габдулхаев Б. Г. , Шарипов Р. Н. Оптимизация квадратурных формул с кратными узлами для сингулярных интегралов //Изв. вузов. Матем. - 1979. - № 12. - С. 62-66.
17. Шарипов Р. Н. О вычислении многомерных сингулярных интегралов с ядрами Коши // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - 1982. - Т. 22, № 3. - С. 566 - 572.
18. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977. - 640 с.
19. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 512 с.
20. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. - М.: Наука , 1978. - 351 с.
21. Маковоз Ю. И. ,Шешко М. А. Об оценке погрешности квадратурной формулы для сингулярного интеграла //Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. - 1977. - № 6.- С.36 - 41.
22. Завьялов Ю. С. , Квасов Б. И. , Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.
23. Корнейчук Н. П. Сплаины в теории приближения. - М.: Наука, 1984. - 352 с.
24. Стечкин С. Б. , Субботин Ю. Н. Сплаины в вычислительной математике. - М.: Наука, 1976. - 248 с.
25. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. - М.-Л.: Гостехиздат, 1949. - 511 с.
26. Никольский С. М. Квадратурные формулы. - М.: Наука, 1979. - 256 с.
27. Бойков И. В. Приближенное решение особых интегральных уравнений //Докл. АН СССР. - 1975. - Т.224, № 6.- С. 1241 - 1244.
28. Бойков И. В. Оптимальные методы приближенного вычисления интегралов и приближенное решение интегральных уравнений //Учебное пособие для студентов ППИ. - Пенза, 1981. - 105 с.
29. Онегов Л. А. Об одной общей экстремальной задаче приближения интегралов с фиксированной особенностью // Казанский инж.-строит. ин-т. - Казань, 1983. - 27 с. - Деп. ВИНТИ 12 июля 1983 г., № 4250 - 83.
30. Онегов Л. А. Об одной экстремальной задаче приближения интегралов с фиксированной особенностью на классе  $W^r L_2$  // Журнал вычисл.матем. и матем. физики. - 1985. - Т. 25, № 11. - С. 1599 - 1613.

31. Габдулхаев Б. Г. , Галимянов А. Ф. Квадратурные методы решения сингулярных интегральных уравнений // Казанский ун-т. - Казань, 1986. - 27 с. - Деп. ВИНТИ 22.08. 1986 г., №6054 - В86.

32. Онегов Л. А. Об одной наилучшей квадратурной формуле для сингулярных интегралов с неподвижной особенностью //Изв. вузов. Матем. - 1981. - № 9. - С. 76 - 79.