

Общероссийский математический портал

И. А. Науменко, В. Г. Скобелев, Преобразование решёток в 1-отказоустойчивые графы, *ПДМ*, 2008, номер 1, 111–115

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

15 февраля 2025 г., 09:21:28



УДК 681.3 + 519.21

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЕШЁТОК В 1-ОТКАЗОУСТОЙЧИВЫЕ ГРАФЫ

И.А. Науменко, В.Г. Скобелев

*Донецкий национальный технический университет
Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Донецк*

E-mail: e-one@bk.ru , skbv@iamm.ac.donetsk.ua

Решается задача преобразования трансляцией по циклической группе графа некоторых n -мерных решёток в 1-отказоустойчивые графы. Оценен ряд характеристик результирующих графов.

Ключевые слова: графы, 1-отказоустойчивые системы.

В работе исследуется задача преобразования n -мерных решёток в 1-отказоустойчивые графы методом, предложенным в [1]. Детально этот метод изложен в [2, 3]. Предполагается, что в преобразуемом графе существует гамильтонов путь либо цикл [4]. При их отсутствии исходный граф преобразуется в граф, имеющий гамильтонов путь. Реконфигурация при отказах производится преобразованием отказавшей вершины (связи) на избыточную с соответствующим переименованием вершин графа по одной из следующих групп автоморфизмов: циклической группе вращений (поворот на угол $\frac{2\pi}{n}i$ ($i = 0, \dots, n - 1$)) или диэдральной группе симметрий.

Структура работы следующая: в п. 1 даны основные понятия и определения; в п. 2 исследуется преобразование простых прямоугольных n -мерных решеток, а в п. 3 – диагональных прямоугольных n -мерных решеток. Заключение содержит ряд выводов.

1. Основные понятия

Исходный объект – граф $G = (V, E)$, где V – множество вершин, E ($E \subseteq V^{(2)}$) – множество рёбер. Задачей исследования является построение такого графа $G^* = (V_1, E_1)$, что при удалении одной его вершины либо ребра редуцированный граф $G^*_{ред}$ содержит подграф $G^\#$, изоморфный G . При этом естественно строить не избыточный граф G^* , т.е. граф, который теряет свойство «быть 1-отказоустойчивым» при удалении хотя бы одной вершины либо ребра. Особый интерес представляют минимальные 1-отказоустойчивые графы, т.е. которые содержат наименьшее число вершин и ребер. В 1-отказоустойчивом графе G^* существуют ребра 2-х типов: рабочие и избыточные, т.е. те, которые появились в результате преобразования графа к виду 1-отказоустойчивого графа G^* . Назовем степенью вершинной избыточности графа G число $v_b(G) = |V_1| \cdot |V|^{-1}$, а степенью рёберной избыточности графа G – число $v_p(G) = |E_1| \cdot |E|^{-1}$. В дальнейшем считаем, что $V = \mathbf{Z}_k$, и, следуя [3], сохраним термин «ребро» только за такими элементами $\{z_i, z_j\} \in E$, что $|z_i - z_j| = 1$, а элемент $\{z_i, z_j\} \in E$, для которого $|z_i - z_j| > 1$, будем называть хордой длины l . Пусть $S_l(G)$ ($l \geq 2$) – число хорд длины l в графе G , а $S(G)$ – общее число хорд в графе G , т.е.

$$S(G) = \sum_{l \geq 2} S_l(G). \tag{1}$$

Пусть $S^{раб}(G^*)$ и $S^{изб}(G^*)$ – соответственно число рабочих и избыточных хорд в графе G^* . Тогда $S^{раб}(G^*) = S(G)$ и $S^{изб}(G^*) = S(G^*) - S^{раб}(G^*)$. Пусть $E(G)$ – число рёбер в графе G , а $E^{раб}(G^*)$ и $E^{изб}(G^*)$ – соответственно число рабочих и избыточных рёбер в графе G^* . Тогда $E^{раб}(G^*) = E(G)$ и $E^{изб}(G^*) = E(G^*) - E^{раб}(G^*)$. Характеристиками избыточности при переходе от графа G к графу G^* являются параметры $v_b(G)$, $v_p(G)$, $S^{изб}(G^*)$, $S^{раб}(G^*)$, $E^{изб}(G^*)$, $E^{раб}(G^*)$.

Рассмотрим характеристики 1-отказоустойчивых графов на примере некоторых однородных структур.

2. Простые прямоугольные n -мерные решетки

Назовем простой прямоугольной n -мерной решёткой такой граф $R_{k_1, \dots, k_n} = (V, E)$, что $V = \times_{i=1}^n \mathbf{Z}_{k_i}$ и

$$E = \{ \{(v_1, \dots, v_n), (v_1', \dots, v_n')\} \subseteq V \mid (\exists j \in \{1, \dots, n\}) (|v_j - v_j'| = 1 \ \& \ (\forall j' \neq j) (v_j = v_j')) \}.$$

Занумеруем вершины графа R_{k_1, \dots, k_n} так, что номером вершины $\nu = (v_1, \dots, v_n)$ является число

$$q(\nu) = v_1 + k_1 \cdot v_2 + k_1 \cdot k_2 \cdot v_3 + \dots + k_1 \cdot \dots \cdot k_{(n-1)} \cdot v_n = \sum_{i=1}^n \left(v_i \cdot \prod_{j=0}^{i-1} k_j \right). \tag{2}$$

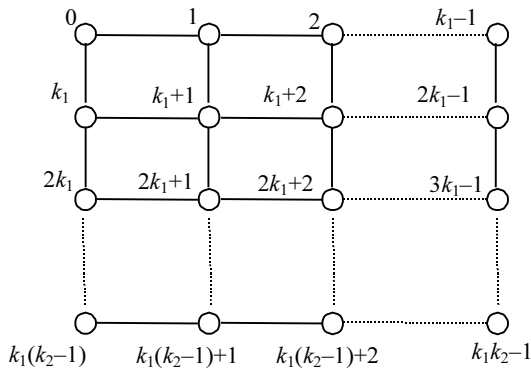


Рис. 1. Решётка R_{k_1, k_2}

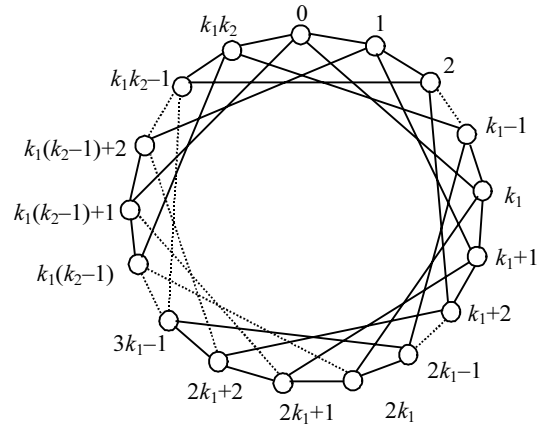


Рис. 2. Граф R_{k_1, k_2}^*

Из табл. 1 вытекает, что степени вершинной и рёберной избыточности графа R_{k_1, k_2}^* равны соответственно:

$$v_v(R_{k_1, k_2}) = 1 + (k_1 k_2)^{-1},$$

$$v_p(R_{k_1, k_2}) = 1 + \frac{k_1 + k_2 + 2}{2k_1 k_2 - k_1 - k_2}.$$

2. $n = 3$. Решётка R_{k_1, k_2, k_3} изображена на рис. 3. Характеристики графа R_{k_1, k_2, k_3}^* сведены в табл. 2.

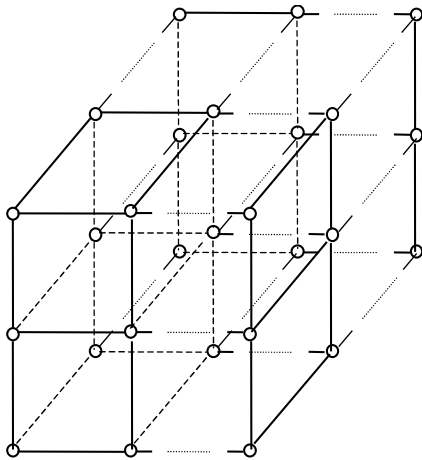


Рис. 3. Решётка R_{k_1, k_2, k_3}

Таблица 2

Характеристики графа R_{k_1, k_2, k_3}^*

Элементы решётки	Рабочие	Избыточные
Вершины	$k_1 k_2 k_3$	1
Рёбра	$(k_1 - 1) k_2 k_3$	$k_2 k_3 + 1$
Хорды	$2k_1 k_2 k_3 - k_1(k_2 + k_3)$	$k_1(k_2 + k_3) + 2$
Связи (общ.)	$3k_1 k_2 k_3 - k_1 k_2 - k_1 k_3 - k_2 k_3$	$k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 + 3$

Из табл. 2 вытекает, что степени вершинной и рёберной избыточности равны соответственно:

$$v_v(R_{k_1, k_2}) = 1 + (k_1 k_2)^{-1},$$

$$v_p(R_{k_1, k_2}) = 1 + \frac{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 + 3}{3k_1 k_2 k_3 - k_1 k_2 - k_1 k_3 - k_2 k_3}.$$

3. Диагональные прямоугольные n -мерные решетки

Диагональной прямоугольной n -мерной решёткой назовём такой граф $D_{k_1, \dots, k_n} = (V', E')$, что $V' = \prod_{i=1}^n Z_{k_i}$ и

$$E' = E \cup D^{(1)} \cup D^{(2)},$$

где

$$D^{(1)} = \bigcup_{\substack{i=1, \dots, n-1 \\ j=i+1, \dots, n}} D_{ij}^{(1)}, \quad D^{(2)} = \bigcup_{\substack{i=1, \dots, n-1 \\ j=i+1, \dots, n}} D_{ij}^{(2)},$$

а

$$D_{ij}^{(1)} = \{(v_1, \dots, v_n), (v_1, \dots, v_i + 1, \dots, v_j + 1, \dots, v_n)\},$$

$$D_{ij}^{(2)} = \{(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + 1, \dots, v_n), (v_1, \dots, v_i + 1, \dots, v_j, \dots, v_n)\}.$$

Пусть $\{v, v'\} \in D_{ij}^{(1)}$, где $v = (v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) \in V$ и $v' = (v_1, \dots, v_i + 1, \dots, v_j + 1, \dots, v_n) \in V$. Из (2) вытекает, что

$$q(v) = v_1 + \dots + k_1 \dots k_{i-1} v_i + \dots + k_1 \dots k_{j-1} v_j + \dots + k_1 \dots k_{(n-1)} v_n; \tag{8}$$

$$q(v') = v_1 + \dots + k_1 \dots k_{i-1} (v_i + 1) + \dots + k_1 \dots k_{j-1} (v_j + 1) + \dots + k_1 \dots k_{(n-1)} v_n. \tag{9}$$

Из (8) и (9) вытекает, что

$$|q(v) - q(v')| = (k_1 \dots k_{i-1})(1 + k_i \dots k_{j-1}) \quad (i, j = 2, \dots, n).$$

Число таких диагоналей равно

$$S_{D_{ij}^{(1)}} = \prod_{h=1}^n k_h \cdot \sum_{i < j} ((1 - k_j^{-1})(1 - k_i^{-1})).$$

Пусть $\{v, v'\} \in D_{ij}^{(2)}$, где $v = (v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + 1, \dots, v_n) \in V$ и $v' = (v_1, \dots, v_i + 1, \dots, v_j, \dots, v_n) \in V$. Из (2) вытекает, что

$$q(v) = v_1 + k_1 \dots k_{i-1} v_i + \dots + k_1 \dots k_{j-1} (v_j + 1) + \dots + k_1 \dots k_{(n-1)} v_n; \tag{10}$$

$$q(v') = v_1 + k_1 \dots k_{i-1} (v_i + 1) + \dots + k_1 \dots k_{j-1} v_j + \dots + k_1 \dots k_{(n-1)} v_n. \tag{11}$$

Из (10) и (11) вытекает, что

$$|q(v) - q(v')| = (k_1 \dots k_{i-1})(1 - k_i \dots k_{j-1}) \quad (i, j = 2, \dots, n).$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$S_{D_{ij}^{(1)}} = S_{D_{ij}^{(2)}} = \prod_{h=1}^n k_h \cdot \sum_{i < j} (1 - k_j^{-1})(1 - k_i^{-1}),$$

где

$$S_{D_{ij}^{(n)}} = |D_{ij}^{(n)}| \quad (n = 1, 2).$$

После трансляции дуг по циклической группе автоморфизмов C_n получим 1-отказоустойчивый граф D_{k_1, \dots, k_n}^* . Характеристики избыточности при переходе от решетки D_{k_1, \dots, k_n} к графу D_{k_1, \dots, k_n}^* равны:

$$E^{pa6}(D_{k_1, \dots, k_n}^*) = (k_1 - 1) \prod_{i=2}^n k_i,$$

$$E^{изб}(D_{k_1, \dots, k_n}^*) = \prod_{i=2}^n k_i + 1,$$

$$S^{pa6}(D_{k_1, \dots, k_n}^*) = \left(n - 1 - \sum_{i=2}^n k_i^{-1} + 2 \sum_{i < j} (1 - k_j^{-1})(1 - k_i^{-1}) \right) \prod_{i=1}^n k_i,$$

$$S^{изб}(D_{k_1, \dots, k_n}^*) = \left(2n + \sum_{i=2}^n k_i^{-1} - 2 \sum_{i < j} (1 - k_j^{-1})(1 - k_i^{-1}) \right) \prod_{h=1}^n k_h + 3n - 3.$$

Рассмотрим специальные случаи диагональной прямоугольной n -мерной решётки D_{k_1, \dots, k_n} , когда $n \in \{2, 3\}$.

1. $n = 2$. Решётка D_{k_1, k_2} изображена на рис. 4, а граф D_{k_1, k_2}^* – на рис. 5.

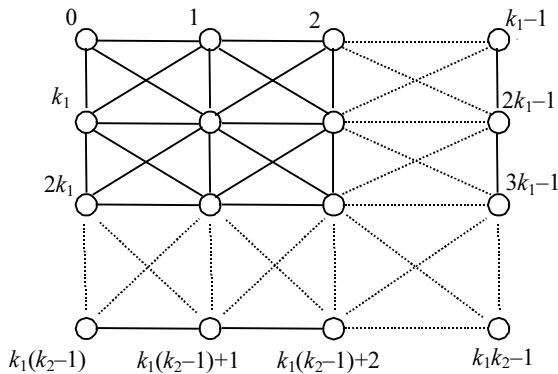


Рис. 4. Решётка D_{k_1, k_2}

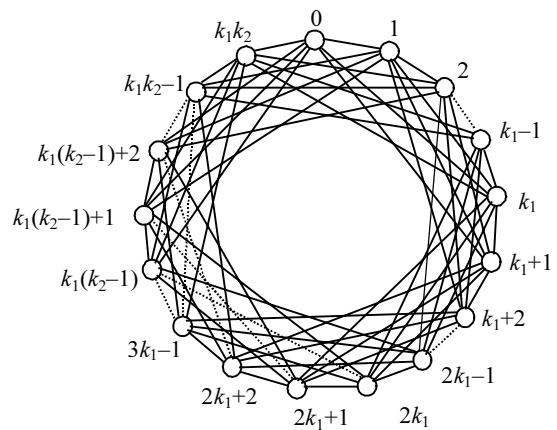


Рис. 5. Граф D_{k_1, k_2}^*

Характеристики графа D_{k_1, k_2}^* сведём в табл. 3.

Таблица 3

Характеристики графа D_{k_1, k_2}^*

Элементы решётки	Рабочие	Избыточные
Вершины	$k_1 k_2$	1
Рёбра	$(k_1 - 1)k_2$	$k_2 + 1$
Хорды	$3k_1 k_2 - 3k_1 - 2k_2 + 2$	$3k_1 + 2k_2 + 1$
Связи (общ.)	$4k_1 k_2 - 3(k_1 + k_2) + 2$	$3k_1 + 3k_2 + 2$

Из табл. 3 вытекает, что степени вершинной и рёберной избыточности графа D_{k_1, k_2}^* равны соответственно:

$$v_v(D_{k_1, k_2}^*) = 1 + (k_1 k_2)^{-1},$$

$$v_p(D_{k_1, k_2}^*) = 1 + \frac{3k_1 + 3k_2 + 2}{4k_1 k_2 - 3k_1 - 3k_2 + 2}.$$

2. $n = 3$. Характеристики графа D_{k_1, k_2, k_3}^* сведены в табл. 4.

Таблица 4

Характеристики графа R_{k_1, k_2, k_3}^*

Элементы решётки	Рабочие	Избыточные
Вершины	$k_1 k_2 k_3$	1
Рёбра	$(k_1 - 1)k_2 k_3$	$k_2 k_3 + 1$
Хорды	$8k_1 k_2 k_3 - 5k_1 k_3 - 5k_1 k_2 - 4k_2 k_3 + 2(k_1 + k_2 + k_3)$	$5k_1(k_2 + k_3) + 4k_2 k_3 - 2(k_1 + k_2 + k_3) - 2k_1 k_2 k_3 + 6$
Связи (общ.)	$9k_1 k_2 k_3 - 5k_1 k_3 - 5k_1 k_2 - 5k_2 k_3 + 2(k_1 + k_2 + k_3)$	$5k_1(k_2 + k_3) + 5k_2 k_3 - 2(k_1 + k_2 + k_3) - 2k_1 k_2 k_3 + 7$

Из табл. 4 вытекает, что степени вершинной и рёберной избыточности равны соответственно:

$$v_v(D_{k_1, k_2, k_3}^*) = 1 + (k_1 k_2)^{-1},$$

$$v_p(D_{k_1, k_2, k_3}^*) = 1 + \frac{5(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) - 2(k_1 + k_2 + k_3) - 2k_1 k_2 k_3 + 7}{9k_1 k_2 k_3 - 5(k_1 k_3 + k_1 k_2 + k_2 k_3) + 2(k_1 + k_2 + k_3)}.$$

Заключение

В работе исследованы характеристики избыточности при преобразовании простых прямоугольных n -мерных решёток и диагональных прямоугольных n -мерных решёток в 1-отказоустойчивые минимальные графы. Полученные оценки являются верхними границами избыточности при преобразовании в 1-отказоустойчивый граф любого графа, вложимого в рассмотренные решётки. Одно из направлений дальнейших исследований состоит в оценке избыточности при преобразовании более сложных регулярных классических структур в 1-отказоустойчивые графы. Второе направление исследований состоит в изучении характеристик избыточности при преобразовании регулярных структур в m -отказоустойчивые графы, где $m \geq 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каравай М.Ф. Общий подход к построению отказоустойчивых цифровых систем // Вестник ТГУ. Приложение. 2004. № 9. С. 123 – 134.
2. Каравай М.Ф. Инвариантно-групповой подход к исследованию k -отказоустойчивых структур // Автоматика и телемеханика. 2000. № 1. С. 144 – 156.
3. Каравай М.Ф. Применение теории симметрии к анализу и синтезу отказоустойчивых систем // Автоматика и телемеханика. 1996. № 6. С. 159 – 173.
4. Bollobas B. Modern graph theory. N.Y.: Springer Verlag, 1998. 394 p.