М. Г. Гасымов, Об аналитических свойствах спектральной функции самосопряженного оператора Штурма–Лиувилля, *Докл. АН СССР*, 1963, том 150, номер 5, 971–974

Доклады Академии наук СССР
1963. Том. 150, № 5

МАТЕМАТИКА

М. Г. ГАСЫМОВ

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 10 I 1963)

В настоящей работе исследуются аналитические свойства спектральной функции оператора L, порожденного дифференциальным уравнением

$$-y'' + q(x)\, y = \lambda y \tag{1}$$

и граничным условием

$$y(0) = 0, \tag{2}$$

где $0 \leqslant x < \infty$, $q(x)$ — действительная локально интегрируемая функция, $\lambda = s + i\sigma$. Спектральная функция $\rho(s)$ оператора L определена только на действительной оси s и, вообще говоря, не продолжается в комплексную плоскость. Редже показал ([1], [2]), что при финитном потенциале $q(x)$ ($q(x) = 0$ при $x > a$) производная от спектральной функции по $\gamma = \sqrt{\lambda}$ является мероморфной функцией от γ и имеет полюсы $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ ($\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2, \ldots$) из нижней (из верхней) полуплоскости, причем $\{\varphi(x, \gamma_n)\}$, где $\varphi(x, \lambda)$ — решение уравнения (1) с начальными условиями

$$\varphi(0, \lambda) = 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1, \tag{3}$$

образуют полную максимальную систему функций в $L_2(0, 2a)$.

В настоящей работе показано, что при потенциале $q(x) = -x^\alpha + p(x)$, где $p(x) = 0$ при $x > a$, производная $k(\lambda)$ от спектральной функции оператора L является мероморфной функцией λ, и подробно изучено поведение $k(\lambda)$ в комплексной плоскости. С помощью полученных результатов находится асимптотика решения $\psi(x, t)$ задачи Коши:

$$i\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - [x^\alpha - p(x)]\, \psi(x, t), \tag{4}$$

$$\psi(0, t) = 0, \ \psi(x, 0) = f(x) \quad \text{при больших } t. \tag{5}$$

1. Сначала исследуем спектральную функцию оператора L_α^0, порожденного дифференциальным уравнением (1) при $q(x) = -x^\alpha$, где $0 < \alpha \leqslant 2$, т. е. уравнением

$$-y'' - x^\alpha y = \lambda y \tag{6}$$

и граничным условием (2).

Теорема 1. 1) *Производная* $k_\alpha^0(\lambda)$ *от спектральной функции оператора* L_α^0 *является мероморфной функцией от комплексного переменного* λ; 2) *полюсы* $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots$ ($\overline{\lambda}_1^0, \overline{\lambda}_2^0, \ldots$) *функции* $k_\alpha^0(\lambda)$ *лежат на луче* $|\lambda| e^{\frac{2\pi i}{\alpha+2}}$ $\left(|\lambda| e^{-\frac{2\pi i}{\alpha+2}}\right)$ *и* $|\lambda_n| \sim \left[\frac{\pi\alpha\Gamma(3/2 + 1/\alpha)}{\Gamma(3/2)\,\Gamma(1/\alpha)}\, n\right]^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}}$ *при больших* n; 3) $k_\alpha^0(\lambda)\, e^{-N\sqrt{\lambda} i} \to 0$ *на любом луче* $|\lambda| e^{i\theta}$, $2\pi/(2+\alpha) < \theta < 2(\alpha+1)\pi/(2+\alpha)$, *при* $|\lambda| \to \infty$ *и при любом* $N > 0$ (*можно доказать, что в угле* $2\pi/(2+\alpha) + \varepsilon \leqslant \theta \leqslant 2(\alpha+1)\pi/(2+\alpha]) - \varepsilon$, *где* ε — *любое положительное число меньше* $\alpha\pi/(\alpha+2)$, *функция* $k_\alpha^0(\lambda)\, e^{-iN\sqrt{\lambda}}$ *стремится к нулю равномерно при* $|\lambda| \to \infty$); 4) *вне области* R, *образованной полупрямыми* $|\lambda| e^{\pm\frac{1+\alpha}{2+\alpha}\pi i} \pm 1$, *имеет место неравенство* $|k_\alpha^0(\lambda)| < c|\sqrt{\lambda}|$, *где* c — *некоторое постоянное число.*

Доказательство. Известно [3], что производная $k_\alpha^0(\lambda)$ от спектральной функции оператора L_λ^0 определяется так:

$$k_\alpha^0(s) = \lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{2i}\left[\frac{f'_\alpha(0, s+i\sigma)}{f_\alpha(0, s+i\sigma)} - \frac{\overline{f'_\alpha(0, s+i\sigma)}}{\overline{f_\alpha(0, s+i\sigma)}}\right], \tag{7}$$

где $f_\alpha(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$ при любом числе λ, для которого $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и функция $f_\alpha(x, \lambda)$ является решением уравнения (6). Очевидно, для доказательства утверждения 1) достаточно доказать, что функция $m_\alpha(\lambda) = f'_\alpha(0, \lambda)/f_\alpha(0, \lambda)$ является мероморфной функцией. С этой целью рассмотрим уравнение $-y'' - e^{i\varphi}x^\alpha y = \lambda y$, где $0 < \varphi \leqslant \pi$. Известно [4], что это уравнение имеет решение $f_\alpha(x, \lambda, \varphi) \in L_2(0, \infty)$ при любом числе φ, для которого $0 < \varphi \leqslant \pi$, и при любом λ, причем $m_\alpha^\varphi(\lambda) = f'_\alpha(0, \lambda, \varphi)/f_\alpha(0, \lambda, \varphi)$ является мероморфной функцией λ. Нетрудно заметить, что $m_\alpha^\varphi(\lambda) = e^{-\frac{\pi-\varphi}{2+\alpha}i} m_\alpha^\pi\left(\lambda e^{-\frac{2(\pi-\varphi)}{2+\alpha}i}\right)$. Можно показать, что функция $f_\alpha(x, \lambda, \varphi)/f_\alpha(0, \lambda, \varphi)$ стремится к функции $f_\alpha(x, \lambda)/f_\alpha(0, \lambda)$ равномерно по x, $0 \leqslant x < \infty$, при $\varphi \to 0$ и при любом λ из нижней полуплоскости. Тогда, получаем, что функция $m_\alpha(\lambda) = e^{\frac{\pi}{2+\alpha}i} m_\alpha^\pi\left(\lambda e^{-\frac{2\pi}{2+\alpha}i}\right)$ — мероморфная функция, что и доказывает утверждение 1). Утверждение 2) следует из того, что функция $m_\alpha^\pi(\lambda)$ имеет полюсы $\{\mu_n\}$ только на действительной оси и $\mu_n \sim \left[\frac{\pi\alpha\Gamma(^3/_2 + 1/\alpha)}{\Gamma(^3/_2)\Gamma(1/\alpha)} n\right]^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}}$ при больших n. Чтобы доказать утверждение 3), отметим, что функция $k_\alpha^0(\lambda)$ есть целая функция порядка роста $(\alpha+2)/2\alpha$ (доказательство этого факта здесь опускаем), причем, как известно [5], $e^{-N\sqrt{|s|}}|k_\alpha^0(s)|^{-1} \to \infty$ при $s \to -\infty$ и при любом $N > 0$. Поэтому, если бы функция $e^{+i\sqrt{\lambda}N}[k_\alpha^0(\lambda)]^{-1}$ была ограничена на некоторых лучах $|\lambda|e^{i(\pi\pm\theta)}$, где $|\theta| < \pi\alpha/(\alpha+2)$, то из теоремы Фрагмена — Линделёфа [6] следовало бы, что эта функция ограничена и на отрицательной действительной оси, что противоречит условию $e^{+i\sqrt{s}N}[k_\alpha^0(s)]^{-1} \to \infty$ при $s \to \infty$. Итак, утверждение 3) доказано. Так как [3] $m_\alpha^\pi(\lambda) \to i\sqrt{\lambda}$ при $|\lambda| \to \infty$ вне области R_1 $\{|\operatorname{Im}\lambda| < 1, \operatorname{Re}\lambda > -1\}$, то $m(\lambda) \to i\sqrt{\lambda}$ при $|\lambda| \to \infty$ и $\lambda \,\overline{\in}\, R$. Отсюда следует утверждение 4). Таким образом, теорема доказана.

2. Теперь можем перейти к исследованию спектральной функции оператора L_α, порожденного дифференциальным уравнением (1) при $q(x) = -x^\alpha + p(x)$, где $0 < \alpha \leqslant 2$, а $p(x)$ — финитная функция ($p(x) = 0$ при $x > a$, причем $p(x) \sim c(a-x)^l$ при $x \to a$, где $l \geqslant 0$ и c — фиксированные числа), с граничным условием (2).

Теорема 2. 1) *Производная $k_\alpha(\lambda)$ от спектральной функции оператора L_α аналитически продолжается в комплексную плоскость и является мероморфной функцией от комплексного переменного λ;* 2) *функция $k_\alpha(\lambda)$ имеет в верхней полуплоскости бесконечное число полюсов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ таких, что:* а) $\operatorname{Im}\lambda_n \to \infty$ *при $n \to \infty$;* б) *расстояние от луча $|\lambda|e^{\frac{\pi}{2+\alpha}i}$ тех λ_n, для которых $\arg\lambda_n \geqslant \varepsilon > 0$, стремится к нулю при $n \to \infty$;* в) *аргумент тех λ_n, для которых $\arg\lambda_n < \varepsilon$, стремится к нулю при $n \to \infty$, где ε — любое фиксированное число меньше, чем $2\pi/(2+\alpha)$;* 3) *на любом луче $|\lambda|e^{i\theta}$, где $2\pi/(2+\alpha) < \theta < 2(1+\alpha)\pi/(2+\alpha)$, $k_\alpha(\lambda)e^{-i\sqrt{\lambda}N} \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$ и при любом $N > 0$, причем в угле $2\pi/(2+\alpha) + \varepsilon \leqslant \theta \leqslant 2(1+\alpha)\pi/(2+\alpha) - \varepsilon$, где ε — любое положительное число меньше $\alpha\pi/(2+\alpha)$, функция $k_\alpha(\lambda)e^{-i\sqrt{\lambda}N} \to 0$ равномерно при $|\lambda| \to \infty$.*

Теорему можно доказать, используя следующие факты.

Если $F_\alpha(x, \lambda)$ — решение уравнения (1) при $q(x) = -x^\alpha + p(x)$, совпадающее с $f_\alpha(x, \lambda)$ при $x > a$, то существует такая функция $A(x, t)$, что

$$F_\alpha(x,\lambda) = f_\alpha(x,\lambda) + \int_x^{2a-x} A(x,t) f_\alpha(t,\lambda)\,dt, \qquad (8)$$

$$k_\alpha(\lambda) = k_\alpha^0(\lambda)\frac{1}{\eta_1(\lambda)\eta_2(\lambda)}, \qquad (9)$$

где

$$\eta_1(\lambda) = 1 + \int_0^{2a} A(0,t)\frac{f_\alpha(t,\lambda)}{f_\alpha(0,\lambda)}\,dt \qquad (10)$$

и $\eta_2(s) = \overline{\eta_1(s)}$ при действительных s.

3. Будем называть полюсы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $(\bar\lambda_1, \bar\lambda_2, \ldots)$ функции $k_\alpha(\lambda)$ комплексными собственными числами, а соответствующие им функции $\varphi(x,\lambda_n)$ $(\overline{\varphi(x,\lambda_n)})$, где $\varphi(x,\lambda)$ — решение уравнения (1) при $q(x) = -x^\alpha + p(x)$ с начальными условиями (3),— комплексными собственными функциями оператора L_α. При больших x функции $\varphi(x,\lambda_n)$ ($n = 1, 2, \ldots$) растут как функции $x^{-\alpha/4}\exp[|\operatorname{Im}\lambda_n|x^{1-\alpha/2}]$ при $\alpha = 2$ рост $\varphi(x,\lambda_n)$ полиномиальный), и, несмотря на это, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Системы функций* $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$ *и* $\{\overline{\varphi(x,\lambda_n)}\}$ *образуют в* $(0,\infty)$ *биортогональную систему функций в следующем смысле*:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^\infty e^{-\varepsilon x}\varphi(x,\lambda_n)\,\varphi(x,\lambda_m)\,dx = \frac{1}{2i\operatorname{Res}k_\alpha(\lambda_n)}\delta_{nm}. \qquad (11)$$

Обозначим множество финитных функций $f(x)$ из $L_2(0,\infty)$ таких, что $f(0) = 0$ и $-f'' - (x^\alpha - p(x))f \in L_2(0,\infty)$, через K^2. С помощью теоремы 2 можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Если* $f(x) \in K^2$, *то при любом* $x \in (0, H)$

$$f(x) = 2i\sum_{m=1}^{n}\hat f(\lambda_m)\,\varphi(x,\lambda_m)\operatorname{Res}k(\lambda_m) + \frac{1}{\pi}\int_{C_n}\hat f(\lambda)\,\varphi(x,\lambda)\,k_\alpha(\lambda)\,d\lambda, \qquad (12)$$

где $\hat f(\lambda)$ *есть* $\varphi(x,\lambda)$*-преобразование Фурье функции* $f(x)$; C_n *— контур, охватывающий только полюсы* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *функции* $k_\alpha(\lambda)$ *и асимптотически параллельный действительной оси, а* H *— любое положительное число.*

Этот результат может быть применен для нахождения асимптотики решения $\psi(x,t)$ задачи Коши (4) — (5) при больших t.

Теорема 5. *Если* $f(x) \in K^2$, *то при любом* $x \in (0, H)$ *решение* $\psi(x,t)$ *задачи Коши* (4) — (5) *при* $q(x) = -x^\alpha + p(x)$ *имеет вид*

$$\psi(x,t) = 2i\sum_{m=1}^{n}\hat f(\lambda_m)\,\varphi(x,\lambda_m)\,\tau^{i\lambda_m t}\operatorname{Res}k_\alpha(\lambda_m) +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{C_n}\hat f(\lambda)\,\varphi(x,\lambda)^{i\lambda t}k_\alpha(\lambda)\,d\lambda, \qquad (13)$$

где $\hat f(\lambda)$, C_n и H *те же, что и в теореме* 4, *и при* $t\to\infty$ *имеет асимптотику*

$$\psi(x,t) \sim 2i\hat f(\lambda_1)\,\varphi(x,\lambda_1)\operatorname{Res}k(\lambda_1)\,e^{i\lambda_1 t}, \qquad (14)$$

где λ_1 *— самый близкий к действительной оси полюс функции* $k_\alpha(\lambda)$.

Теперь рассмотрим случай $p(x)\equiv 0$. Тогда оказывается, что можно усилить теорему 5.

Теорема 6. *Если* $f(x) \in K^2$, *то при любом* $x \in (0, H)$ *и* $t > 0$ *решение* $\psi(x,t)$ *задачи Коши* (4) — (5) *при* $q(x) = -x^\alpha$ *имеет вид*

$$\psi(x,t) = 2i\sum_{n=1}^{\infty}\hat f(\lambda_n^0)\,\varphi_0(x,\lambda_n^0)\operatorname{Res}k_\alpha^0(\lambda_n^0)\,e^{i\lambda_n^0 t}, \qquad (15)$$

причем ряд (15) *сходится абсолютно и* $\psi(x, t) \to f(x)$ *при* $t \to 0$, *где* $\varphi_0(x, \lambda)$ — *решение уравнения* (1) *при* $q(x) = -x^\alpha$ *с начальными условиями* (3), *а* $\hat{f}(\lambda)$ *есть* φ_0*-преобразование Фурье функции* $f(x)$.

4. Здесь мы продолжаем исследование аналитических свойств спектральной функции оператора L, порожденного более общим потенциалом $q(x)$.

Теорема 7. *Если* L — *оператор, порожденный дифференциальным уравнением* (1) *при потенциале* $q(x) = -x^\alpha + p(x)$, *где* $0 < \alpha < 2$ *и* $\int_0^\infty |p(x)| \exp[\varepsilon x^{1-\alpha/2}]\, dx < \infty$ (*при* $\alpha = 2$ *предполагаем, что* $p(x)$ *удовлетворяет условию* $\int_0^\infty |p(x)| x^\varepsilon dx < \infty$) *при некотором положительном* ε *и с граничным условием* (2), *то производная* $k_\alpha(\lambda)$ *от спектральной функции оператора* L *аналитически продолжается в полосу* $|\operatorname{Im}\lambda| < 2\varepsilon(1 - \alpha/2)$ ($|\operatorname{Im}\lambda| < 2\varepsilon$ *при* $\alpha = 2$) *и в этой полосе функция* $k_\alpha(\lambda)$ *может иметь только полюсы.*

Из этой теоремы следует, что если $\int_0^\infty |p(x)| \exp[\varepsilon x^{1-\alpha/2}]\, dx < \infty$ при любом $\varepsilon > 0$, то функция $k_\alpha(\lambda)$ является мероморфной функцией λ. Заметим, что при $\alpha = 0$ подобные результаты давно известны (см., например, ([7])).

Теорема 8. *Если* L — *оператор, порожденный дифференциальным уравнением* (1) *при потенциале* $q(x)$ *таком, что*: 1) $q(x)$ *монотонно стремится к* $-\infty$ *при* $x \to \infty$; 2) $q(z)$ — *голоморфная функция* $z = x + iy$ *в области* R_3 $\{|z| > x_0, \arg z < \varepsilon\}$, *где* x_0 *и* ε — *некоторые фиксированные положительные числа*; 3) $\operatorname{Im} e^{2i\varphi} q(xe^{i\varphi}) \to \infty$ *при* $x \to \infty$ *и при любом* $0 < \varphi \leqslant \varepsilon$; 4) $|q'(z)| = O(|q(z)|^\beta)$, *где* $0 < \beta < 3/2$ *и* $|q'(z)| = O(|q(z)|')$; 5) $|q''(z)| = O(|q(z)|'')$; 6) $\int^\infty \frac{dx}{\sqrt{|q(x)|}} = \infty$, *и с граничным условием* (2), *то производная* $k(\lambda)$ *от спектральной функции оператора* L *является мероморфной функцией* λ.

Очевидно, что эта теорема обобщает утверждение 1) теоремы 2 на более общий потенциал. Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству утверждения 1) теоремы 1.

В заключение заметим, что результаты настоящей работы переносятся на случай оператора $L_{\alpha l}$, порожденного дифференциальным уравнением $-y'' - \left[x^\alpha - \frac{l(l+1)}{x^2} - p(x)\right] y = \lambda y$, где $l \geqslant 1/2$, и с ограниченным граничным условием в нуле.

Автор выражает искреннюю благодарность своему руководителю Ф. А. Березину за постановку задачи и ценные советы, а также проф. Б. М. Левитану за обсуждение результатов.

Поступило
10 I 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Regge, Nuovo Cimento, 8, № 4, 671 (1958). [2] T. Regge, Nuovo Cimento, 9, № 3, 491 (1958). [3] Э. Ч. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, ч. 1, ИЛ, 1960. [4] М. А. Наймарк, ДАН, 85, № 2, 41 (1952). [5] В. А. Марченко, ДАН, 72, № 3, 457 (1950). [6] Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956. [7] М. А. Наймарк, Тр. Моск. матем. об ., 3 (1954).