M. M. Achmatov, A. P. Oskolkov, Convergent difference schemes for equations of motion of Oldroyd fluids, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1987, Volume 159, 143–152

М.М.Ахматов, А.П.Осколков

О СХОДЯЩИХСЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ ОЛДРОЙТА

I. Жидкостью Олдройта порядка $L = 1, 2, \ldots$ называется линейная вязкоупругая жидкость, определяющее уравнение которой, связывающее девиатор тензора напряжений $\sigma(x,t)$ и тензор скоростей деформаций $\mathcal{D}(x,t)$, имеет вид [I], [2]:

$$\sum_{\ell=0}^{L} \lambda_\ell \frac{\partial^\ell \sigma}{\partial t^\ell} = 2 \sum_{m=0}^{L} \varkappa_m \frac{\partial^m \mathcal{D}}{\partial t^m} ; \qquad (I)$$

при этом из физических соображений следует неравенство [I], [2]:

$$\tilde{\varkappa}_{L-1} \equiv \varkappa_{L-1} - \varkappa_L \lambda_L^{-1} \lambda_{L-1} > 0 . \qquad (2)$$

В работах А.П.Осколкова [3]–[6] показано, что движение жидкости Олдройта порядка $L = 1, 2, \ldots$ может быть описано либо системой интегродифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \mu \Delta v - \int_0^t K(t-\tau) \Delta v \, d\tau + \operatorname{grad} p = f, \quad \operatorname{div} v = 0 ; \qquad (3)$$

либо эквивалентной ей системой интегродифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \mu \Delta v - \Delta u + \operatorname{grad} p = f, \quad v = \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta u + \int_0^t s(t-\tau) u \, d\tau , \qquad (4)$$

в которой $u(x,t) \equiv \int_0^t K(t-\tau) v \, d\tau$.

В системе (3) $\mu^0 = \varkappa_L \cdot \lambda_L^{-1}$, а ядро $K(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\sum_{\ell=0}^{L} \lambda_\ell \frac{\partial^\ell K}{\partial t^\ell} = 0, \quad t > 0 , \qquad (5)$$

и начальным условиям Коши

$$\sum_{\ell=0}^{n} \lambda_{L-n+\ell} \frac{\partial^\ell K(0)}{\partial t^\ell} = \varkappa_{L-n-1} - \mu \lambda_{L-n-1}, \quad n = 0, 1, \ldots, L-1 \;\; (\lambda_{-1} \equiv 0) . \qquad (6)$$

Например, при $L = 1$ $K(t) = \lambda_1^{-1} \tilde{\varkappa}_0 \exp(-\lambda_1^{-1} t)$.

В системе (4) по-прежнему $\mu = \varkappa_L \cdot \lambda_L^{-1}$, ядро $s(t)$ при $L = 2, 3, \ldots$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\sum_{\ell=0}^{L-1} \tilde{\varkappa}_\ell \frac{\partial^\ell s}{\partial t^\ell} = 0, \ t>0; \ \tilde{\varkappa} \equiv \varkappa_\ell - \mu\lambda_\ell, \ \ell = 0,1,\dots,L-1, \tag{7}$$

и начальным условиям Коши

$$\sum_{\ell=0}^{n} \tilde{\varkappa}_{L-1-n+\ell} \frac{\partial^\ell s(v)}{\partial t^\ell} = \lambda_{L-n-2} - \lambda\tilde{\varkappa}_{L-n-3} - \beta\tilde{\varkappa}_{L-n-2}, \ n=0,1,\dots,L-2$$
$$\tilde{\varkappa}_{-1} \equiv 0, \tag{8}$$

а коэффициенты α и β определяются формулами:

$$\alpha = \lambda_L \cdot \tilde{\varkappa}_{L-1}^{-1}, \qquad \beta = \tilde{\varkappa}_{L-1}^{-1}(\lambda_{L-1} - \alpha\tilde{\varkappa}_{L-2}). \tag{9}$$

При $L=1$, т.е. в наиболее важном для практики случае, ядро $s(t) \equiv 0$, т.е. при $L=1$ система (4) является системой дифференциальных уравнений. В этом случае $\alpha = \lambda_1(\varkappa_0 - \varkappa_1\lambda_1^{-1})^{-1}$, $\beta = (\varkappa_0 - \varkappa_1\lambda_1^{-1})^{-1}$.

Система (3) решается в $Q_T = \Omega\times(0,T)$, Ω – ограниченная область из E^2 или E^3, $0<T<\infty$ при начально-краевых условиях

$$v\big|_{t=0} = v_0(x), \quad x\in\Omega; \quad v\big|_{\partial Q_T} = 0; \tag{10}$$

система (4) решается в Q_T при начально-краевых условиях

$$v\big|_{t=0} = v_0(x), \quad u\big|_{t=0} = 0, \ x\in\Omega; \ u\big|_{\partial Q_T} = v\big|_{\partial Q_T} = 0. \tag{11}$$

2. В работах А.П.Осколкова [3]–[6] доказано, что при условиях: $\Omega\in E^3$, $T<\infty$, $v_0(x)\in \overset{\circ}{J}(\Omega)$, $f(x,t)\in L_{2,1}(Q_T)$ начально-краевые задачи (3),(10) и (4),(11) имеют по крайней мере одно слабое решение (решение в смысле Э.Хопфа); при $\Omega\in E^2$ это слабое решение является единственным.

В работах А.П.Осколкова [3]–[6] доказано, далее, что при условиях: $\Omega\in E^3$, $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$; $v_0(x)\in C^{2+\alpha}(\Omega)\cap H(\Omega)$, $f(x,t)\in L_\infty(0,T; C^\alpha(\bar\Omega)\cap$ $\cap\, \overset{\circ}{J}(\Omega))$, $0<\alpha<\ell$, $f_t\in L_2(Q_T)$ найдется такое $T^* \equiv$ $\equiv T^*(\|v_0\|^{(1)}_{2,\Omega};\ \|f, f_t\|_{2,Q_T})$, что при $T<T^*$ начально-краевая задача (3),(10) имеет единственное классическое решение

$$v(x,t)\in W^1_\infty(0,T; C^\alpha(\bar\Omega)\cap\overset{\circ}{J}(\Omega))\cap L_\infty(0,T; C^{2+\alpha}(\bar\Omega)\cap H(\Omega)), \ P_x\in L_\infty(0,T; C^\alpha(\bar\Omega)),$$

начально-краевая задача (4),(11) имеет единственное классическое

решение $v(x,t)\in W^1_\infty(0,T;C^\alpha(\bar\Omega)\overset{\circ}{J}(\Omega))\cap L_\infty(0,T;C^{2+\alpha}(\bar\Omega)\cap H(\Omega))$
$u(x,t)\in W^1_\infty(0,T;C^{\alpha+2}(\bar\Omega)\cap H(\Omega))$, $P_x\in L_\infty(0,T;C^\alpha(\bar\Omega))$,
при $\Omega\in E^2$ описанные выше классические решения начально-краевых задач (3),(10) и (4),(11) существуют при $\forall T<\infty$.

В настоящей статье для начально-краевых задач (3),(10) и (4),(11) построены аппроксимирующие их устойчивые неявные конечноразностные схемы, аналогичные известным схемам О.А.Ладыженской для нестационарных уравнений Навье-Стокса [7,гл.VI], и показано, что из совокупности кусочно-линейных восполнений решений этих конечно-разностных задач можно извлечь подпоследовательность, которая при $\forall\Delta t,\ \Delta x\to 0$ сходится к слабому решению задачи (3),(10) или задачи (4),(11) соответственно.

3. Разобьем пространство (x,t) на элементарные ячейки плоскостями $x_i=k_i h$, $h>0$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$, и $t_\ell=\ell\Delta t$, $\Delta t=\frac{T}{N}$. Обозначим через $\Omega^\ell=\Omega$ сечение цилиндра Q_T плоскостью $t_\ell=\ell\Delta t$, через $\partial\Omega^\ell\equiv\partial\Omega$ – границу области Ω^ℓ. Пусть, далее, Ω^ℓ_h – совокупность точек решетки, лежащих в Ω^ℓ, $\partial\Omega^\ell_h$ – граница Ω^ℓ_h, $\bar\Omega^\ell_h=\Omega^\ell_h\cup\partial\Omega^\ell_h$, $\partial\Omega^\ell_{ih}$, $i=1,\dots,n$ – совокупность тех точек $\partial\Omega^\ell_h$, которые при сдвиге на h в направлении оси x_i переходят в какую-либо точку Ω^ℓ_h, $\partial\hat\Omega^\ell_{ih}$ – совокупность точек $\partial\Omega^\ell_h$, которые при сдвиге на $-h$ в направлении оси x_i переходят в некоторую точку Ω^ℓ_h. Положим

$$\overset{\pm i}{v}(x,t)=v(\vec{x}\pm h\vec{e}^{\,i},t),\quad v_{x_i}(x,t)=\frac{1}{h}\left[\overset{+i}{v}(x,t)-v(x,t)\right],\quad v_{\bar x_i}(x,t)=\frac{1}{h}\left[v(x,t)-\overset{-i}{v}(x,t)\right],$$

где $\vec{e}^{\,i}$, $i=1,\dots,n$ – орт оси x_i. Аналогично определим сдвиги $\overset{\pm0}{v}(x,t)$ и разностные отношения v_t и $v_{\bar t}(x,t)$ по переменной t. Пусть v^ℓ_h – функция, рассматриваемая только на точках решетки на слое t^ℓ, $\ell=0,1,\dots,N$. Введем для нее следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&v_h^2=\sum_{i=1}^n v_{ih}v_{ih},\quad v^2_{hx}=\sum_{k=1}^n v^2_{hx_k}=\sum_{i,k=1}^n (v_{ihx_k})^2,\\
&v^2_{h\bar x}=\sum_{k=1}^n v^2_{h\bar x_k}=\sum_{i,k=1}^n (v_{ih\bar x_k})^2,\qquad n=2,3;\\
&\|v^k_h\|^2=h\sum_{\bar\Omega^k_h} v^2_h,\quad (f^k,v^k_h)=h^n\sum_{\bar\Omega^k_h} f_{ih}v_{ih},
\end{aligned}\right\}\qquad (12)$$

$$\| v_{hx_i} \|^2 = h^n \sum_{\Omega_h^k \cup S_{ih}^k} v_{hx_i}, \quad i=1,\dots,n; \quad \| v_{hx}^k \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \| v_{hx_i}^k \|^2 .$$

Для произвольных функций u_h и v_h, заданных на решетке справедливы легко проверяемые соотношения [7, гл. УI], [8]:

$$\left.\begin{aligned} &(u_h v_h)_{x_i} = u_{hx_i} v_h + \overset{+i}{u}_h v_{hx_i} = u_{hx_i} \overset{+i}{v}_h + u_h v_{hx_i}, \\ &(u_h v_h)_{\bar{x}_i} = u_{h\bar{x}_i} v_h + \overset{-i}{u}_h v_{h\bar{x}_i} = u_{h\bar{x}_i} \overset{-i}{v}_h + u_h v_{h\bar{x}_i}, \\ &2\Delta t\, u_{\bar{t}}^k u^k = (u^k)^2 - (u^{k-1})^2 + (\Delta t)^2 (u_{\bar{t}}^k)^2 ; \end{aligned}\right\} \tag{I3}$$

если же $u_h \equiv 0$ вне Ω_h^k, то справедлива формула "суммирования по частям":

$$h^n \sum_{\bar{\Omega}_h^k} u_{hx_i} v_h = -h^n \sum_{\bar{\Omega}_h^k} u_h v_{h\bar{x}_i} . \tag{I4}$$

Будем считать, что в начально-краевых задачах (3),(I0) и (4),(II) $v_0(x) \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$, $f(x,t) \in L_{2,1}(Q_T)$, и обозначим через v_{0h} и f_h функции, взятые на точках решетки Ω_h^k и аппроксимирующие v_0 и f в нормах $L_2(\Omega)$ и $L_{2,1}(Q_T)$ соответственно; например,

$$f_h = \frac{1}{\Delta t\, h^n} \iint_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} f(x,t)\, dt\, dx .$$

4. По аналогии с основной неявной конечно-разностной схемой для нестационарных уравнений Навье-Стокса [7, гл. УI] напишем для задачи (3),(I0) три аппроксимирующие ее неявные конечно-разностные схемы – две несимметричные и одну симметричную; в этих схемах $K_{\ell s} \equiv K((\ell - s)\Delta t)$, $s = 1, \dots, \ell$:

I) "правая" несимметричная схема:

$$v_{ih\bar{t}}^{\ell} - \mu v_{ihx_k\bar{x}_k}^{\ell} - \Delta t \sum_{s=1}^{\ell} K_{\ell s} v_{ihx_kx_k}^{s} + \frac{1}{2} \overset{-0+k}{v}{}_{kh}^{\ell}\, v_{ihx_k}^{\ell} + \frac{1}{2} \overset{-0}{v}{}_{kh}^{\ell}\, v_{ih\bar{x}_k}^{\ell} = -p_{\bar{x}_i}^{\ell} + f_{ih}^{\ell} , \tag{I5$_1$}$$

$$i = 1, \dots, n, \quad (x,t) \in \Omega_h^{\ell} ;$$

$$v_{khx_k}^{\ell} = 0 , \quad (x,t) \in \Omega_h^{\ell} \cup \sum_{i=1}^{n} \partial\Omega_{ih}^{\ell} ; \tag{I5$_2$}$$

$$\sum_{\Omega_h^\ell \cup \sum\limits_{i=1}^{n} \partial\Omega_{ih}^\ell} p_h^\ell = 0\,, \quad \ell = 1,\dots,N\,; \tag{I5$_3$}$$

2) "левая" несимметричная схема:

$$v_{ih\bar t}^\ell - \mu v_{ihx_k\bar x_k} - \Delta t \sum_{s=1}^{\ell} K_{\ell s} v_{ihx_k\bar x_k}^s + \frac{1}{2}\left(\overset{-0,-k}{v}{}_{kh}^{\ell}\, v_{ih\bar x_k}^\ell + \overset{-0}{v}{}_{kh}^{\ell}\, v_{ihx_k}^\ell\right) = -p_{x_i}^\ell + f_{ih}^\ell \tag{I6$_1$}$$

$$i = 1,\dots,n\,, \qquad (x,t)\in\Omega_h^\ell\,;$$

$$v_{k\bar x_k}^\ell = 0\,, \quad (x,t)\in\Omega_h^\ell \cup \sum_{i=1}^{n} \partial\hat\Omega_{ih}^\ell\,; \tag{I6$_2$}$$

$$\sum_{\Omega_h^\ell \cup \sum\limits_{i=1}^{n} \partial\hat\Omega_{ih}^\ell} p_h^\ell = 0\,, \quad \ell = 1,\dots,N\,. \tag{I6$_3$}$$

3) симметричная схема:

$$v_{ih\bar t}^\ell - \mu v_{ihx_k\bar x_k}^\ell - \Delta t \sum_{s=1}^{\ell} K_{\ell s} v_{ihx_k\bar x_k}^s + \frac{1}{4}\left(\overset{-0,-k}{v}{}_{kh}^{\ell} + \overset{-0}{v}{}_{kh}^{\ell}\right) v_{ih\bar x_k}^\ell +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\overset{-0}{v}{}_{kh}^{\ell} + \overset{-0,+k}{v}{}_{kh}^{\ell}\right) v_{ihx_k}^\ell = -\frac{1}{2}\left(p_{\bar x_i}^\ell + p_{x_i}^\ell\right) + f_i^\ell\,, \quad i = 1,\dots,n\,;\ (x,t)\in\Omega_h^\ell\,; \tag{I7$_1$}$$

$$v_{kx_k}^\ell + v_{k\bar x_k}^\ell = 0\,, \quad (x,t)\in\Omega_h^\ell \cup \sum_{i=1}^{n} \partial\Omega_{ih}^\ell \cup \sum_{i=1}^{n} \partial\hat\Omega_{ih}^\ell\,; \tag{I7$_2$}$$

$$\sum_{\Omega_h^\ell \cup \sum\limits_{i=1}^{n} \partial\Omega_{ih}^\ell \cup \sum\limits_{i=1}^{n} \partial\hat\Omega_{ih}^\ell} p_h^\ell = 0\,, \qquad \ell = 1,\dots,N\,. \tag{I7$_3$}$$

Ко всем трем схемам (I5$_i$)-(I7$_i$) добавляются одни и те же начальные и граничные условия, аппроксимирующие начально-краевые условия (I0):

$$v_h^0 = v_{0h}\,, \quad x\in\Omega_h^0\,; \quad v_h^\ell\Big|_{\partial\Omega_h^\ell} = 0\,, \quad \ell = 1,\dots,N\,. \tag{I8}$$

5. Напишем, далее, аналоги конечно-разностных схем (15_i)-(17_i) для начально-краевой задачи (4),(II); в этих схемах

$$s_{\ell s} \equiv s((\ell-s)\Delta t, \quad s=1,\dots,\ell;$$

I) "правая" несимметричная схема:

$$v^{\ell}_{ih\bar{t}} - \mu v^{\ell}_{ihx_k\bar{x}_k} - u^{\ell}_{ihx_k\bar{x}_k} + \frac{1}{2}\Big(\overset{-0,+k}{v}{}^{\ell}_{kh} v^{\ell}_{ihx_k} + \overset{-0}{v}{}^{\ell}_{kh} v^{\ell}_{kh\bar{x}_k}\Big) = -p^{\ell}_{\bar{x}_i} + f^{\ell}_{ih},$$

$$v^{\ell}_{ih} = \alpha u^{\ell}_{ih\bar{t}} + \beta u^{\ell}_{ih} + \Delta t \sum_{s=1}^{\ell} s_{\ell s} u^{s}_{ih}, \quad i=1,\dots,n; \quad x \in \Omega^{\ell}_{h}; \tag{19_1}$$

$$v^{\ell}_{khx_k} = 0, \qquad x \in \Omega^{\ell}_{h} \cup \sum_{i=1}^{n} \partial\Omega^{\ell}_{ih}; \tag{19_2}$$

$$\sum_{\Omega^{\ell}_{h} \cup \sum_{i=1}^{n} \partial\Omega^{\ell}_{ih}} p^{\ell}_{h} = 0, \quad \ell=1,\dots,N; \tag{19_3}$$

2) "левая" несимметричная схема:

$$v^{\ell}_{ih\bar{t}} - \mu v^{\ell}_{ihx_k\bar{x}_k} - u^{\ell}_{ihx_k\bar{x}_k} + \frac{1}{2}\Big(\overset{-0,+k}{v}{}^{\ell}_{kh} v^{\ell}_{ih\bar{x}_k} + \overset{-0}{v}{}^{\ell}_{kh} v^{\ell}_{ihx_k}\Big) = -p^{\ell}_{x_i} + f^{\ell}_{ih},$$

$$v^{\ell}_{ih} = \alpha u^{\ell}_{ih\bar{t}} + \beta u^{\ell}_{ih} + \Delta t \sum_{s=1}^{\ell} s_{\ell s} u^{s}_{ih}, \quad i=1,\dots,n; \quad x \in \Omega^{\ell}_{h}; \tag{20_1}$$

$$v^{\ell}_{kh\bar{x}_k} = 0, \qquad x \in \Omega^{\ell}_{h} \cup \sum_{i=1}^{n} \partial\hat{\Omega}^{\ell}_{ih}; \tag{20_2}$$

$$\sum_{\Omega^{\ell}_{h} \cup \sum_{i=1}^{n} \partial\hat{\Omega}^{\ell}_{ih}} p^{\ell}_{ih} = 0, \quad \ell=1,\dots,N; \tag{20_3}$$

3) симметричная схема:

$$v^{\ell}_{ih\bar t}-\mu v^{\ell}_{ihx_k\bar x_k}-u^{\ell}_{ihx_k\bar x_k}+\frac{1}{4}(\overset{-0,+k_\ell}{v}{}^{\ell}_{kh}+\overset{-0}{v}{}^{\ell}_{kh})v^{\ell}_{ih\bar x_k}+$$

$$+\frac{1}{4}(\overset{-0}{v}{}^{\ell}_{kh}+\overset{-0,+k_\ell}{v}{}^{\ell}_{kh})v^{\ell}_{ihx_k}=-\frac{1}{2}(p^{\ell}_{hx_i}+p^{\ell}_{hx_i})+f^{\ell}_{ih}\,, \qquad (21_1)$$

$$v^{\ell}_{ih}=\alpha u^{\ell}_{ih\bar t}+\beta u^{\ell}_{ih}+\Delta t\sum_{s=1}^{\ell} s_{\ell s}u^{s}_{ih}\,,\quad i=1,\dots,n\,;\quad x\in\Omega^{\ell}_{h}\,;$$

$$v^{\ell}_{khx_k}+v^{\ell}_{khx_k}=0\,,\quad x\in\Omega^{\ell}_{h}\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\Omega^{\ell}_{ih}\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\hat\Omega^{\ell}_{ih}\,; \qquad (21_2)$$

$$\sum_{\Omega^{\ell}_{h}\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\Omega^{\ell}_{ih}\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\hat\Omega^{\ell}_{ih}} p^{\ell}_{h}=0\,,\quad \ell=1,\dots,N\,. \qquad (21_3)$$

Ко всем трем схемам (19_i)–(21_i) добавляются одни и те же начально-краевые условия, аппроксимирующие начально-краевые условия (II):

$$v^{0}_{h}=v_{0h}\,,\ u^{0}_{h}=0\,,\ x\in\Omega^{0}_{h}\,;\quad v^{\ell}_{h}\Big|_{\partial\Omega^{\ell}_{h}}=u^{\ell}_{h}\Big|_{\partial\Omega^{\ell}_{h}}=0,\ \ell=1,\dots,N\,. \qquad (22)$$

6. Напишем теперь для начально-краевой задачи (3),(10), неявные конечно-разностные схемы, аналогичные неявным схемам (35),(40) (41) из [7, гл. VI]; эти схемы являются устойчивыми и сходящимися при условии $\Delta t\sim(\Delta x)^2$:

1) "правая" несимметричная схема:

$$v^{\ell}_{ih\bar t}-\mu v^{\ell}_{ihx_k\bar x_k}-\Delta t\sum_{s=0}^{\ell}K_{\ell s}v^{s}_{ihx_k\bar x_k}+\frac{1}{2}\overset{+k_\ell}{v}{}^{\ell}_{kh}\overset{-0}{v}{}^{\ell}_{ihx_k}+\frac{1}{2}v^{\ell}_{kh}v^{\ell}_{kh}\overset{-0}{v}{}^{\ell}_{ih\bar x_k}=-p^{\ell+1}_{x_i}+f^{\ell+1}_{ih}\,, \qquad (23_1)$$

$$i=1,\dots,n\,;\quad x\in\Omega^{\ell+1}_{h}\,;$$

$$v^{\ell+1}_{khx_k}=0\,,\qquad x\in\Omega^{\ell+1}_{h}\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\Omega^{\ell+1}_{ih}\,; \qquad (23_2)$$

$$\sum_{\Omega^{\ell+1}_{h}\cup\sum_{i=1}^{n}\partial\Omega^{\ell+1}_{ih}} p^{\ell+1}_{h}=0\,;\quad \ell=0,1,\dots,N-1\,; \qquad (23_3)$$

2) "левая" несимметричная схема:

$$v^{\ell}_{iht}-\mu v^{\ell}_{ihx_k\bar x_k}-\Delta t\sum_{s=0}^{\ell}K_{\ell s}v^{s}_{ihx_k\bar x_k}+\frac{1}{2}(\overset{-k_\ell+0}{v}{}^{\ell}_{kh}v^{\ell}_{ih\bar x_k}+v^{\ell}_{kh}\overset{+0}{v}{}^{\ell}_{ihx_k})=-p^{\ell+1}_{hx_i}+f^{\ell+1}_{ih}\,, \qquad (24_1)$$

$$i = 1,\ldots,n; \quad x \in \Omega_h^{\ell+1};$$

$$v^{\ell+1}_{kh\bar{x}_k} = 0, \quad x \in \Omega_h^{\ell+1} \cup \sum_{i=1}^{n} \partial\hat{\Omega}_{ih}^{\ell+1}; \tag{24_2}$$

$$\sum_{\Omega_h^{\ell+1} \cup \sum\limits_{i=1}^{n} \partial\Omega_{ih}^{\ell+1}} p_h^{\ell+1} = 0; \quad \ell = 0,1,\ldots,N-1; \tag{24_3}$$

3) симметричная схема:

$$v^{\ell}_{iht} - \mu v^{\ell}_{ihx_k\bar{x}_k} - \Delta t \sum_{s=0}^{\ell} K_{\ell s} v^{s}_{ihx_k\bar{x}_k} + \frac{1}{4}\left(\overset{-k}{v}{}^{\ell}_{kh} + v^{\ell}_{kh}\right)\overset{+0}{v}{}^{\ell}_{\bar{x}_k} +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(v^{\ell}_{kh} + \overset{+k}{v}{}^{\ell}_{kh}\right)\overset{+0}{v}{}^{\ell}_{hx_k} = -\frac{1}{2}\left(p^{\ell+1}_{h\bar{x}_i} + p^{\ell+1}_{hx_i}\right) + f^{\ell+1}_{ih}, \; i=1,\ldots,n; \; x \in \Omega_h^{\ell+1}; \tag{25_1}$$

$$v^{\ell+1}_{k\bar{x}_k} + v^{\ell+1}_{khx_k} = 0, \; x \in \Omega_h^{\ell+1} \cup \sum_{i=1}^{n} \partial\Omega_{ih}^{\ell+1} \cup \sum_{i=1}^{n} \partial\hat{\Omega}_{ih}^{\ell+1}; \tag{25_2}$$

$$\sum_{\Omega_h^{\ell+1} \cup \sum\limits_{i=1}^{n} \partial\Omega_{ih}^{\ell+1} \cup \sum\limits_{i=1}^{n} \partial\hat{\Omega}_{ih}^{\ell+1}} p_h^{\ell+1} = 0; \quad \ell = 0,1,\ldots,N-1. \tag{25_3}$$

Ко всем трем схемам (23)-(25) добавляются одни и те же начально-краевые условия (I8).

7. Устойчивость решений всех выписанных выше конечно-разностных задач и сходимость при $\Delta t, \Delta x \to 0$ кусочно-постоянных восполнений их решений к слабому решению соответствующей начально-краевой задачи доказывается аналогично, поэтому мы рассмотрим для простоты конечно-разностную задачу (I9), (22) при $L = 1$.

Умножим уравнения (I9) на $2\Delta t h^n v^{\ell}_{ih}$ и просуммируем по $i = 1,\ldots,n$ и точкам Ω_h^{ℓ}. Используя формулы (I3),(I4), получим равенство:

$$\|v_h^{\ell}\|^2 - \|v_h^{\ell-1}\|^2 + 2\mu\Delta t \|v^{\ell}_{hx}\|^2 + (\alpha + 2\beta\Delta t)\|u^{\ell}_{hx}\| - \alpha\|u^{\ell-1}_{hx}\|^2 +$$

$$+ (\Delta t)^2 \|v^{\ell}_{h\bar{t}}\|^2 + \alpha(\Delta t)^2 \|u^{\ell}_{hx\bar{t}}\|^2 = 2\Delta t (f_h^{\ell}, v_h^{\ell}), \quad \ell = 1,\ldots,N, \tag{26}$$

а из этого равенства, суммируя по ℓ от I до $m \leq N$ и используя неравенство Коши, получим неравенство (ср. [7, гл. VI]):

$$\|v_h^m\|^2+2\mu\Delta t\sum_{\ell=1}^{m}\|v_{hx}^{\ell}\|^2+(\alpha+2\beta\Delta t)\sum_{\ell=1}^{m}\|u_{hx}^{\ell}\|^2+(\Delta t)^2\sum_{\ell=1}^{m}\|v_{h\bar{t}}^{\ell}\|^2+$$

$$+\alpha(\Delta t)^2\sum_{\ell=1}^{m}\|u_{hx\bar{t}}^{\ell}\|^2 \leq 2\|\overset{\circ}{v}_h\|^2+5\Big(\Delta t\sum_{\ell=1}^{m}\|f^{\ell}\|\Big)^2\equiv c_1,\quad m=1,\dots,N. \tag{27}$$

Возьмем, далее, $\forall\varphi(x)\in\overset{\circ}{J}(\Omega)$, и пусть φ_h – его разностно-соленоидальная аппроксимация ([7, гл. VI]). Умножим уравнения на $\Delta t h^n\varphi_{ih}$ и просуммируем по $i=1,\dots,n$ и точкам Ω_h^{ℓ}. Используя (I4), получим равенство:

$$\Delta t(v_{h\bar{t}}^{\ell};\varphi_h)+\frac{\Delta t}{2}(\overset{-0,+\kappa_\ell}{v_{kh}}\,v_{ihx_k}^{\ell}+\overset{-0}{v}{}_k^{\ell}\,v_{ihx_k}^{\ell},\varphi_{ih})+\mu(v_{hx}^{\ell},\varphi_{hx})\Delta t+$$

$$+\Delta t(u_{hx},\varphi_{hx})=\Delta t(f_h^{\ell},\varphi_h),\quad \ell=1,\dots,N. \tag{28}$$

а из этого равенства, суммируя по ℓ от ℓ_1, до $\ell_2\leq N$ применяя неравенство Коши, используя энергетическую оценку (27) и предполагая $\|\varphi_h\|,\|\varphi_{hx}\|,\max\limits_{\Omega_h}|\varphi_h|\leq c_\varphi$, получим неравенство:

$$\left|(v_{h\bar{t}}^{\ell_2}-v_{h\bar{t}}^{\ell_1},\varphi_h)\right|\leq c_2(c_1,c_\varphi)\Big(\sqrt{(\ell_2-\ell_1)\Delta t}+\int_{\ell\Delta t}^{\ell_2\Delta t}\|f\|d\tau\Big), \tag{29}$$

которое гарантирует равностепенную по h малость разности $(v_{h\bar{t}}^{\ell_2}-v_{h\bar{t}}^{\ell_1},\varphi_h)$ при малых $(\ell_2-\ell_1)\Delta t$.

Из неравенств (27) и (29), как известно, следует [7, гл. VI], [8], что из совокупности $\{\tilde{v}_h(x,t),\tilde{u}_h(x,t)\}$ кусочно-постоянных восполнений решений $\{v_h,u_h\}$ конечно-разностных задач (I9),(22) $L=1$, можно извлечь подпоследовательность, которая при $\Delta t,h\to 0$ сходится к пределу $\{v(x,t),u(x,t)\}$, который является одним из слабых решений (решений в смысле Э.Хопфа) начально-краевой задачи (4),(II), $L=1$. При $n=2$ вся совокупность $\{\tilde{v}_h(x,t),\tilde{u}_h(x,t)\}$ сходится при $\Delta t,h\to 0$ к единственному слабому решению начально-краевой задачи (4),(II), $L=1$.

Литература

I. O l d r o y d J. On the formulation of rheological equations of state. - Proc.Roy.(London), 1950, A200, p.523-541.

2. О л д р о й д Дж.Г. Неньютоновские течения жидкостей и твердых тел. - В сб.: Реология, теория и приложения. М., 1962, с.757-793.
3. О с к о л к о в А.П. О нестационарных течениях вязкоупругих жидкостей. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1983, т.159, с.101-131.
4. О с к о л к о в А.П. Функциональные методы в теории нестационарных течений линейных вязкоупругих жидкостей. - Препринт ЛОМИ Р-2-83, Л., 1983, 65 с.
5. О с к о л к о в А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения вязкоупругих жидкостей. Автореф.докт.дисс., Л., 1983, 32 с.
6. О с к о л к о в А.П. Корректные постановки начально-краевых задач для уравнений движения линейных вязкоупругих жидкостей. - В кн.: Вопр.динам.теории распр.сейсм.волн, в.26, Л., 1986, с.124-142.
7. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Математические вопросы динамики вязких несжимаемых жидкостей, 2-ое изд., М., 1970.
8. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Краевые задачи математической физики. М., 1973.