# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ОЦЕНКАХ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ТИПА РУНГЕ — КУТТА

*А. Н. ТИХОНОВ, А. Д. ГОРБУНОВ*

(*Москва*)

1. Пусть для системы обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривается задача Коши

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \quad y(x_0)=y_0, \tag{1}$$

где $y(x)=\{y^{(1)}(x), \ldots, y^{(N)}(x)\}$ — искомая вектор-функция, $N$ измерений, $f(x, y)=\{f^{(1)}(x, y), \ldots, f^{(N)}(x, y)\}$ — заданная вектор-функция от $N+1$ переменной $x, y^{(1)}, \ldots, y^{(N)}$, непрерывная и достаточно гладкая в некоторой замкнутой области $\overline{G}$ пространства $\{x, y^{(1)}, \ldots, y^{(N)}\}$, $(x_0, y_0) \in G$. Пусть эта задача приближенно решается при помощи формулы типа Рунге — Кутта [1]. Построим уравнение погрешности метода, определяемого какой-либо формулой типа Рунге — Кутта, и с его помощью выведем можорантные и асимптотические оценки погрешности этого метода.

2. Как известно [1], формулы типа Рунге — Кутта строятся так, что для каждой из них имеет место равенство

$$\Delta y(x_0)-\Delta y_0=y(x_1)-y_1=O(h^{s+1}), \tag{2}$$

где $\Delta y(x_0)=y(x_1)-y(x_0)$, ($y(x)$ — точное решение задачи (1), $\Delta y_0=y_1-y_0$ ($y_1$ — приближенное решение задачи (1) в точке $x_1=x_0+h$, $h>0$), $s$ — степень метода (т. е. наибольшее натуральное число, удовлетворяющее равенству (2)).

Так как, кроме того, формулы типа Рунге — Кутта применяются рекуррентно, то при переходе от узла $x_{k-1}$ к узлу $x_k$ ($x_k=x_0+kh$, $k=0, 1, \ldots$) соотношение (1) переписывается в следующем виде:

$$z_{k-1}(x_k)-z_{k-1}(x_{k-1})-\Delta y_{k-1}=O(h^{s+1}), \quad k=1, 2, \ldots; \tag{3}$$

где $z_{k-1}(x)$ — точное решение задачи Коши,

$$z'=f(x, z), \quad z(x_{k-1})=y_{k-1} \tag{4}$$

и $\Delta y_{k-1}=y_k-y_{k-1}$, ($y_k$ — значение искомого приближенного решения, отвечающее узлу $x_k$). При этом, как легко видеть, имеет место равенство

$$z_{k-1}(x_k)-z_{k-1}(x_{k-1})-\Delta y_{k-1}=z_{k-1}(x_k)-y_k. \tag{5}$$

Изложенное дает возможность построить разностное уравнение относительно погрешности метода, определяемого любой из формул типа Рунге — Кутта. Действительно, имеем:

$$\delta_k=y(x_k)-y_k=y(x_k)-z_{k-1}(x_k)+z_{k-1}(x_k)-y_k. \tag{6}$$

Согласно (3) и (5), последнее равенство переписывается в виде:

$$\delta_k=y(x_k)-z_{k-1}(x_k)+O(h^{s+1}). \tag{7}$$

Далее, выразим разность $y(x_k)-z_{k-1}(x_k)$ через $\delta_{k-1}$. Для этого из тождества (1) вычтем тождество

$$z'_{k-1}(x)=f(x, z_{k-1}(x)).$$

Тогда по теореме о среднем получится

$$v'(x)=F(x)\cdot v(x), \tag{8}$$

где

$$v(x)=y(x)-z_{k-1}(x)$$

и

$$F(x)=\left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{z=y(x)+\theta(x)v(x)}; \tag{9}$$

$\theta(x)$ — вектор средних значений, $0<\theta(x)<1$. Из уравнения (8) вследствие интегрирования при начальном условии

$$v(x_{k-1})=\delta_{k-1}$$

находим

$$v(x)=y(x)-z_{k-1}(x)=\hat{\Omega}(x_{k-1}, x)\,\delta_{k-1}, \tag{10}$$

где $\hat{\Omega}$ — матрицант матрицы $F$.

Внося в соотношение (6) выражение разности $y(x_k)-z_{k-1}(x_k)$, вытекающее из (10), получим разностное уравнение для погрешности метода в следующем виде:

$$\delta_k=\hat{\Omega}(x_{k-1}, x_k)\,\delta_{k-1}+O(h^{s+1}). \tag{11}$$

3. Для получения можорантной оценки погрешности метода в соотношении (11) перейдем к первой норме; тогда получится:

$$\|\delta_k\|_1\leqslant\|\hat{\Omega}(x_{k-1}, x_k)\|_1\|\delta_{k-1}\|_1+O(h^{s+1}). \tag{12}$$

Если через $L$ обозначить константу Липшица для системы (1), то получится оценка

$$\|\hat{\Omega}(x_{k-1}, x_k)\|_1\leqslant\exp hNL.$$

После чего неравенство (12) перепишется в виде

$$\|\delta_k\|_1\leqslant\exp hNL\cdot\|\delta_{k-1}\|_1+O(h^{s+1}). \tag{13}$$

Учитывая, что $\|\delta_0\|_1=0$, и суммируя последнее разностное неравенство, найдем

$$\|\delta_k\|_1\leqslant O(h^{s+1})\sum_{j=0}^{k-1}\exp jhNL. \tag{14}$$

Отсюда с учетом очевидного асимптотического равенства

$$h\sum_{j=0}^{k-1}\exp jhNL=\int\limits_0^{x_k-x_0}\exp\xi NL\,d\xi+O(h) \tag{15}$$

получается нужная оценка

$$\|\delta_k\|_1\leqslant O(h^s)\Bigl[\int\limits_0^{x_k-x_0}\exp\xi NL\,d\xi+O(h)\Bigr]. \tag{16}$$

Тем самым доказана следующая

Теорема 1. *Если вектор-функция $f$ по всем аргументам обладает первыми $s$ непрерывными частными производными, то для погрешности метода, определяемого одной из формул типа Рунге — Кутта $s$-й степени, имеет место оценка* (16).

4. Перейдем к получению асимптотического разложения погрешности метода. Для этого перепишем формулу (2) в следующем виде:

$$\Delta y(x_0)-\Delta y_0=h^{s+1}\cdot C\cdot\Psi(x_0, y_0)+O(h^{s+2}), \tag{17}$$

где $\Psi$ — вполне определенный оператор от $f$, а $C$ зависит только от рассматриваемой формулы типа Рунге—Кутта. В соответствии с этим равенство (3) переписывается так:

$$z_{k-1}(x_k)-z_{k-1}(x_{k-1})-\Delta y_{k-1}=h^{s+1}\Psi(x_{k-1}, y_{k-1})+O(h^{s+2}) \tag{18}$$

и, следовательно, уравнение погрешности метода (11) принимает вид

$$\delta_k=\hat{\Omega}(x_{k-1}, x_k)\,\delta_{k-1}+h^{s+1}\cdot C\cdot\Psi(x_{k-1}, y_{k-1})+O(h^{s+2}). \tag{19}$$

Суммирование последнего разностного уравнения приводит к формуле

$$\delta_k=h^{s+1}\cdot C\sum_{j=0}^{k-1}\hat{\Omega}(x_{j+1}, x_k)\,\Psi(x_j, y_j)+O(h^{s+2}). \tag{20}$$

Так как неравенство (16) равносильно формуле

$$y_j - y(x_j) = O(h^s),$$

то справедливы разложения

$$\Psi(x_j, y_j) = \Psi(x_j, y(x_j)) + O(h^s),$$
$$\hat{\Omega}(x_{j+1}, x_k) = \Omega(x_{j+1}, x_k) + O(h^s),$$

где $\Omega$ — матрицант матрицы $\left.\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{y=y(x)}$.

После этого (20) можно переписать так:

$$\delta_k = h^{s+1} \cdot C \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \Omega(x_{j+1}, x_k) \Psi(x_j, y(x_j)) + O(h^{s+2}). \tag{20'}$$

Учитывая очевидную формулу

$$h \sum_{j=0}^{k-1} \Omega(x_{j+1}, x_k) \Psi(x_j, y(x_j)) = \int_{x_0}^{x_k} \Omega(\xi, x_k) \Psi(\xi, y(\xi)) \, d\xi + O(h), \tag{21}$$

из (20′) получим разложение

$$\delta_k = h^s \cdot C \cdot \int_{x_0}^{x_k} \Omega(\xi, x_k) \Psi(\xi, y(\xi)) \, d\xi + O(h^{s+1}). \tag{22}$$

Таким образом доказана следующая

Т е о р е м а 2. *Если вектор-функция $f$ по всем аргументам обладает первой $s+1$ непрерывной частотной производной, то для погрешности метода, определяемого одной из формул типа Рунге — Кутта, $s$-й степени, имеет место асимптотическое разложение* (22).

Последнюю теорему можно сформулировать несколько по-иному:

Т е о р е м а 3. *Если вектор-функция $f$ по всем аргументам обладает первой $s+1$ непрерывной частной производной, то погрешность метода, определяемого одной из формул типа Рунге — Кутта, $s$-й степени, может быть найдена в виде решения системы уравнений:*

$$\frac{du}{dx} = \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{y=y(x)} \cdot u + h^s \cdot C\Psi(x, y(x)) + O(h^{s+1}),$$

отвечающего нулевым начальным условиям (ср. с аналогичной теоремой из [2]).

5. Результаты, полученные в предшествующих пунктах, имеют также силу для любого метода, определяемого каждой из двусторонних формул типа Рунге — Кутта.

*Поступила в редакцию*
*9.04.1962*

### Цитированная литература

1. И. С. Б е р е з и н, Н. П. Ж и д к о в. Методы вычислений. Т. 2. М., Физматгиз, 1959.
2. А. Н. Т и х о н о в, А. Д. Г о р б у н о в. Асимптотические разложения погрешности разностного метода решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, № 4, 537—548.