Е. И. Моисеев, О задаче Неймана в кусочно-гладких областях,
Дифференц. уравнения, 1971, том 7, номер 9, 1655–1666

СЕНТЯБРЬ 1971 г., ТОМ VII, № 9

УДК 517. 946

О ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА В КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ОБЛАСТЯХ

Е. И. МОИСЕЕВ

В этой работе рассматривается классическое и обобщенное решение задачи Неймана для оператора Лапласа в области с кусочно-ляпуновской границей, доказывается их совпадение и исследуется поведение обобщенного решения вблизи границы области.

§ 1. КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Пусть D — m-мерная область, $\overline{D}=D\cup S$, где S — замкнутая поверхность, состоящая из кусков гиперповерхностей S_i, которые имеют размерность $(m-1)$ и принадлежат $A^{(1)}_{\varphi_1}$. Под классом $A^{(1)}_{\varphi_1}$ понимаем поверхности, дифференцируемые один раз и такие, что угол θ между нормалями в точках x и y удовлетворяет неравенству: $\theta\leqslant a\varphi_1(r_{xy})$, где $\varphi_1(r_{xy})\geqslant 0$ монотонная и такая, что $\int\limits_0^1\frac{d\xi}{\xi}\int\limits_0^\xi\frac{\varphi_1(t)}{t}dt<\infty$. Очевидно, в $A^{(1)}_{\varphi_1}$ содержатся поверхности Ляпунова. Пересечение $S_i\cap S_j$, имеющее конечную хаусдорфову меру порядка $(m-2)$, будем называть в дальнейшем ребром. Обычно классическая задача ставится так: найти $u(x)\in C^{(0)}(\overline{D})\cap C^{(2)}(D)$ и такую, что

$$\Delta u=\sum\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=f,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=\psi. \tag{1}$$

Граничное условие ставится всюду на S, за исключением ребер. f и ψ мы предполагаем дини-непрерывными, т. е. $|f(x)-f(y)|\leqslant a\varphi(r_{xy})$, $|\psi(x)-\psi(y)|\leqslant a\varphi(r_{xy})$ для любых x и y из области определения соответственно f и ψ, а $\varphi(t)\geqslant 0$ монотонная и такая, что $\int\limits_0^1\frac{\varphi(t)}{t}dt<\infty$.

Без ограничения общности можно рассматривать следующую задачу:

$$\Delta u=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=\psi, \tag{2}$$

где ψ и S удовлетворяют тем же предположениям.

Лемма 1. *Если решение задачи (2) существует, то оно непрерывно дифференцируемо вплоть до границы, исключая ребра.*

Доказательство. Докажем вначале, что $u(x)$ дини-непрерывна на любом внутреннем подмножестве S_i. Пусть $D_0\subset D$, $\overline{D}_0\cap S=\overline{D}_0\cap S_i=\Gamma_i$, $\partial D_0\in A^{(1)}_{\varphi_1}$ и не имеет общих точек с ребрами. Очевидно, в D $u(x)$ можно представить в виде

$$u(x)=\int\limits_{\partial D_0}\mu\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS$$

(см. приложение). Пусть $x,\ y\in\Gamma_i'\subset\Gamma_i$. Ясно, что

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\int\limits_{\partial D_0}\mu\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS=\frac{\partial}{\partial n_x}\int\limits_{\partial D_0}(\mu-\mu(x))\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS$$

дини-непрерывна на Γ_i, а также

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\int\limits_{\Gamma_i}\mu\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS,\quad \frac{\partial}{\partial n_x}\int\limits_{\Gamma_i}(\mu-\mu(x))\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS$$

дини-непрерывны на Γ_i'. Это значит, что для $x,\ y\in\Gamma_i'$ имеем

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_x}\int\limits_{\Gamma_i}\mu\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS-\frac{\partial}{\partial n_y}\int\limits_{\Gamma_i}\mu\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS-\right.$$

$$-(\mu(x)-\mu(y))\frac{\partial}{\partial n_x}\int\limits_{\Gamma_i}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS+\mu(y)\left(\frac{\partial}{\partial n_y}\int\limits_{\Gamma_i}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial n_x}\int\limits_{\Gamma_i}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS\right)\right|\leqslant a\varphi(r_{xy}).$$

Первый двучлен и последний двучлен дини-непрерывны на Γ_i', а $\left|\frac{\partial}{\partial n_x}\times\right.$ $\left.\times\int\limits_{\Gamma_i}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS\right|$ ограничено снизу, потому что $\frac{\partial}{\partial n_x}\int\limits_{\partial D_0\setminus\Gamma_i}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS$ отлично от нуля хотя бы в одной точке Γ_i', а значит, в некоторой окрестности точки, в которой, можно считать без ограничения общности, содержится Γ_i'. Значит, $|\mu(x)-\mu(y)|\leqslant a\varphi(r_{xy})$ для $x,\ y\in\Gamma_i'$. Будем обозначать в дальнейшем $K(x,\ R)$ шар радиуса R с центром в точке x. Введем срезающую функцию

$$\eta(x)=\begin{cases}1 & r_{xy}\geqslant 2R,\\ 0 & r_{xy}\leqslant R,\end{cases}\qquad \eta(x)\in C^{(\infty)},$$

y — фиксированная точка, принадлежащая Γ_i и такая, что $K(y,\ 2R)\cap S\subset\Gamma_i$. Далее имеем

$$\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_{\partial D_0}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS=0,\ \frac{\partial}{\partial n}\int\limits_{\partial D_0}\mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS\,_{\Gamma_i}=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_i};$$

$\left.\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_{\partial D_0}\eta(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS\right|_{\Gamma_i}$ существует и непрерывна (см. 2). Пусть $V(x)=$ $=\int\limits_{\partial D_0}\eta(\xi)\mu(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS$. Ясно, что $\frac{\partial V}{\partial n}$ существует и непрерывна на Γ_i тогда и только тогда, когда существует и непрерывна

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\left(\int\limits_{\partial D_0}[\mu(\xi)-\mu(x)][\eta(\xi)-\eta(x)]\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS\right)_{\Gamma_i}.$$

Для наперед заданного $\varepsilon>0$ можно указать такую δ-окрестность Σ точки $x\in\Gamma_i'\subset\Gamma_i$, причем δ не зависит от x, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_x}\int\limits_{\Sigma}[\mu(\xi)-\mu(x)][\eta(\xi)-\eta(x)]\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS\right|<\varepsilon.$$

Действительно, возьмем систему координат с центром в x и осью OX_m, направленной по внешней нормали, тогда

$$|\mu(\xi)-\mu(x)|\leqslant a\varphi(\rho),\quad |\eta(\xi)-\eta(x)|\leqslant a\rho,\quad \text{где } x,\ \xi\in\Sigma,\ \rho^2=\sum_{i=1}^{m-1}x_i^2.$$

Значит,

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_x}\int\limits_{\Sigma}[\mu(\xi)-\mu(x)][\eta(\xi)-\eta(x)]\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS\right|\leqslant$$

$$\leqslant A\int\limits_0^{\delta}\frac{\rho^{m-1}\varphi(\rho)}{\rho^m}\,d\rho\leqslant\varepsilon.$$

Отсюда ясно, что $\frac{\partial}{\partial n_x}\int\limits_{\partial D_0}\mu(\xi)\eta(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS$ существует и является непрерывной функцией на Γ_i. Так как

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_i}=\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_{\partial D_0}\eta\mu\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS+\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_{\partial D_0}\mu[1-\eta]\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS,$$

то, значит, $\frac{\partial}{\partial n}\int\limits_{\partial D_0}\mu[1-\eta]\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS$ существует и непрерывна на Γ_i, а в силу выбора η и на ∂D_0. Поэтому

$$\int\limits_{\partial D_0}\mu[1-\eta]\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS=\int\limits_{\partial D_0}\frac{\varkappa}{r^{m-2}}dS=W,$$

где $\frac{(m-2)\omega_m}{2}\varkappa+\int\limits_{\partial D_0}\varkappa\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS=\left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_{\partial D_0}$. Понятно, что $\frac{\partial W}{\partial n}$ дини-непрерывна на $\Gamma_i''\subset\Gamma_i\cap K(y,\ R)$; $\partial D_0\in A_{\varphi_1}^{(1)}$, значит, и $\int\limits_{\partial D_0}\varkappa\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS$ дини-непрерывен на ∂D_0. В силу известных свойств потенциал простого слоя W будет непрерывно дифференцируем до Γ_i''. Значит, $u(x)$ будет непрерывно-дифференцируема до Γ_i''. Лемма доказана.

Замечание 1. Если $S_i\in A^{(m+2)}$, то лемму 1 можно просто доказать, переходя в ортогональную систему координат.

Лемма 2. *Пусть $u(x)$ является решением задачи (2), тогда $u(x)\in W_2^{(1)}(D)$.*

Доказательство. Накроем ребра шарами радиуса r_1 так, чтобы расстояние между центрами шаров было равно r_1. Число шаров будет не больше L/r_1^{m-2}. Построим к каждому из них концентрический шар радиуса $r_2=2r_1$. Пусть поверхность S_h аппроксимирует S в смысле близкости нормалей, причем $S_h \in A^{(2)}$. Часть S_h вне шаров радиуса r_1 обозначим через C_h. Покажем, что существует такое M, не зависящее от r_1, что $\int\limits_{C_h} \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| dS \leqslant M$ при достаточно маленьких h. Покажем это сначала для части C_h, вырезанной ляпуновской сферой $K(y, R)$, где $y \in S_i$. Перейдем в систему координат с центром в y и осью OX_m, направленной по внутренней нормали; пусть $x_m = f(x')$ — уравнение части поверхности S_i, $x_m = f_h(x')$ — уравнение части поверхности C_h, $x' = (x_1, \ldots, x_{m-1})$. Подсчитаем нормальную производную от u к поверхности $x_m = f_h(x')$ в точке $x_0' \in C_h$. Для $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta_1 > 0$, что при $h < \delta_1$ $|\nabla f(x') - \nabla f_h(x')| < \varepsilon/u_1(r_1)$, где $u_1(r_1) = \max|\nabla u|$ в D без шаров радиуса r_1. Для того же $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta_2 > 0$, что при $h < \delta_2$ $\left|\frac{\partial u}{\partial n}(x_h') - \psi(x', f(x'))\right| < \varepsilon$, где $\frac{\partial u}{\partial n}(x_h')$ — производная в точке нормали на расстоянии h от x', взятая по направлению нормали. Затем для $\varepsilon > 0$ существует $\delta_3 > 0$, что при $|x' - x_0'| < \delta_3$ $|\nabla f(x') - \nabla f(x_0')| < \varepsilon/u_1(r_1)$; выбираем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Пусть $x_0 = (x_0', f_h(x_0'))$—точка поверхности $x_m = f_h(x')$, тогда существует точка $x = (x', f(x'))$ на поверхности $x_m = f(x')$ такая, что прямая $\overline{xx_0}$ является нормалью к поверхности $x_m = f(x')$ в точке x, причем $|x' - x_0'| < \delta$ $\left(\text{так как } \cos(OX_m, \nu_x) > \frac{1}{2},\ h < \delta\right)$,

$$\frac{\partial u}{\partial n_h} = \frac{\partial u}{\partial n}\cos(n, n_h) + \frac{\partial u}{\partial l}\sin(n, n_h),$$

где $\frac{\partial}{\partial n_h}$ — нормальная производная к поверхности $x_m = f_h(x')$ в точке x_0, $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по направлению $\overline{x_0 x}$, $\frac{\partial}{\partial l}$—производная по направлению, перпендикулярному к $\overline{x_0 x}$. Нетрудно видеть, что для $\varepsilon > 0$, $h < \delta(\varepsilon, r_1)$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n_h}\right| \leqslant |\psi| + \varepsilon + \frac{k\varepsilon u_1(r_1)}{u_1(r_1)} = |\psi| + \varepsilon(k+1),$$

где k — некоторое постоянное число. Так как это справедливо равномерно для любой

$$x_0 \in C_h, \text{ то } \int\limits_{C_h} \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| dS \leqslant M.$$

Далее, к каждому шару, применяя теорему Ландиса—Гервера (см. [3]), получим, что существуют такие поверхности Σ_k, отделяющие шар радиуса r_1 от концентрического, что

$$\int\limits_{\Sigma_k} \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| dS \leqslant C r_2^{m-2},$$

где C зависит только от размерности m. Теперь у нас получилась область

$D_\Sigma \subset D$, ограниченная частью поверхности C_h и частью $\bigcup_k \Sigma_k$,

$$\int_{\bigcup_k \Sigma_k} \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| dS \leqslant C r_2^{m-2} L / r_2^{m-2} = CL,$$

$$\int_{D_\Sigma} (\nabla u)^2 dx \leqslant \int_{C_h} |u| \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| dS + \int_{\bigcup_k \Sigma_k} |u| \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| dS \leqslant (M + CL) \max |u|.$$

Так как это справедливо при любом r_1, то

$$\int_D (\nabla u)^2 dx \leqslant (M + CL) \max |u|.$$

Лемма доказана.

Обобщенным решением задачи (2) будем называть $u(x) \in W_2^{(1)}(D)$, которая для любой $\eta(x) \in W_2^{(1)}(D)$ удовлетворяет равенству

$$\int_D \nabla u \nabla \eta dx = \int_S \psi \eta dS. \tag{3}$$

Теорема 1. *Если существует классическое решение задачи (2), то оно совпадает с обобщенным (3).*

Доказательство. Пусть существует классическое решение задачи (2). Очевидно, что равенство (3) достаточно доказать для $\eta \in C^{(1)}(\overline{D})$. Пусть D_n — подобласть D такая, что расстояние от любой точки D_n до любого ребра не меньше $1/n$.

Рассмотрим

$$\eta_n = \begin{cases} \eta(x) & x \in D_{n/2} \\ 0 & x \in D \setminus D_n \end{cases} \qquad \eta_n \in C^{(1)}(\overline{D}).$$

Пусть $|\eta(x)| \leqslant M$, тогда $|\nabla \eta_n| \leqslant nM$, $x \in (D \setminus D_{n/2})$. В силу леммы 1 формула (3) верна для η_n. Докажем, что она верна для η. Пусть $g(x) \in L_2(D)$, рассмотрим

$$\int_D g\left(\frac{\partial \eta_n}{\partial x_i} - \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\right) dx = \int_{(D \setminus D_{n/2})} g \frac{\partial \eta_n}{\partial x_i} dx - \int_{D \setminus D_{n/2}} g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx,$$

$$\left| \int_{D \setminus D_{n/2}} g \frac{\partial \eta_n}{\partial x_i} dx \right| \leqslant \sqrt{\int_{(D \setminus D_{n/2})} g^2 dx} \sqrt{\int_{(D \setminus D_{n/2})} \left(\frac{\partial \eta_n}{\partial x_i}\right)^2 dx} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_{D \setminus D_{n/2}} g^2 dx}\, Mn \sqrt{\operatorname{mes}(D \setminus D_{n/2})} \leqslant ML \sqrt{\int_{(D \setminus D_{n/2})} g^2 dx} \underset{n \to \infty}{\to} 0,$$

так как $\operatorname{mes}(D \setminus D_{n/2}) \leqslant L^2/n^2$, $\int_{D \setminus D_{n/2}} g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx \underset{n \to \infty}{\to} 0$. Значит, $\int_D g \left(\frac{\partial \eta_n}{\partial x_i} - \right.$ $\left. - \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) dx \to 0$ и, очевидно,

$$\int_S \psi (\eta_n - \eta) dS \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

т. е. $\int\limits_D \nabla u \nabla \eta dx = \int\limits_S \psi \eta dS$ для любой $\eta \in W_2^{(1)}(D)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если классическая задача (1) имеет решение, то только одно, причем достаточно требовать, чтобы* f, $\psi \in C^{(0)}$.

Следствие 2. *Если существует классическая собственная функция второй краевой задачи, то она является и обобщенной собственной функцией второй краевой задачи.*

Доказательство Пусть $u(x)$—классическая собственная функция, т. е.

$$\Delta u = -\chi u, \quad u \in C^{(2)}(D) \cap C^{(0)}(\bar{D}), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0.$$

Известно, что $v = \dfrac{\chi}{(m-2)\,\omega_m} \int\limits_D \dfrac{u}{r^{m-2}}\, dx$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_D \nabla v \nabla \eta dx - \chi \int\limits_D u \eta dx = \int\limits_S \frac{\partial v}{\partial n} \eta dS, \quad \eta \in W_2^{(1)}(D). \tag{4}$$

Рассмотрим $W = u - v$; очевидно, $\Delta W = 0$ в D, $\dfrac{\partial W}{\partial n}$ существует и $\left.\dfrac{\partial W}{\partial n}\right|_S = -\left.\dfrac{\partial v}{\partial n}\right|_S$, $W \in C^{(2)}(D) \cap C^{(0)}(\bar{D})$. Значит, W — классическое решение задачи

$$\Delta W = 0, \quad \left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_S = -\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_S.$$

Так как $\left(\dfrac{\partial v}{\partial n}\right)_S \in C^{(0,\alpha)}(S_i)$, то в силу теоремы 1

$$\int\limits_D \nabla W \nabla \eta dx = -\int\limits_S \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right) \eta dS$$

для любой $\eta \in W_2^{(1)}(D)$. В силу леммы 2

$$\int\limits_D \nabla u \nabla \eta dx - \int\limits_D \nabla v \nabla \eta dx + \int\limits_S \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right) \eta dS = 0$$

и, учитывая тождество (4), получим $\int\limits_D \nabla u \nabla \eta dx - \chi \int\limits_D u \eta dx = 0$ для любой $\eta \in W_2^{(1)}(D)$. Следствие 2 доказано.

§ 2. ПОВЕДЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

Рассмотрим более подробно обобщенное решение задачи (2) при тех же требованиях на ψ и S, что и в классической задаче. Известно, что обобщенное решение $u(x)$ задачи (2) существует, единственно и в D удовлетворяет уравнению Лапласа в обычном смысле (см. [4]).

Теорема 2. *Обобщенное решение задачи (2) непрерывно дифференцируемо вплоть до* S, *исключая ребра.*

Доказательство. Выделяем, как в лемме 1, $D_0 \subset D$. Нетрудно видеть, что $\dfrac{\partial u}{\partial n}(x) \in W_2^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(\partial D_0)$. Действительно, рассмотрим последовательность областей $D_0^{(n)} \subset D_0^{(n+1)} \subset \ldots \subset D_0$, тогда

$$\int\limits_{D_0^{(n)}} \nabla u \nabla \eta dx = \int\limits_{\partial D_0^{(n)}} \eta \frac{\partial u}{\partial n} dS, \quad \eta \in W_2^{(1)}(D).$$

Если $n \to \infty$, то $\int\limits_{D_0^{(n)}} \nabla u \nabla \eta dx \to \int\limits_{D_0} \nabla u \nabla \eta dx$ и, значит, $\int\limits_{\partial D_0^{(n)}} \frac{\partial u}{\partial n} \eta dS \to f(\eta)$, где $f(\eta)$ — некоторый функционал, действующий на $\eta(x)$, $x \in \partial D_0$. Из теорем вложения следует, что $\eta(x) \in W_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\partial D_0)$; наоборот, если $\eta(x) \in W_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\partial D_0)$, то ее можно продолжить на D_0 так, чтобы $\eta(x) \in W_2^{(1)}(D_0)$ (см. [5]). Поэтому областью определения $f(\eta)$ является все пространство $W_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\partial D_0)$. Ясно, что $f(\eta)$ аддитивный и однородный. Проверим непрерывность $f(\eta)$. Пусть $\eta_n \to \eta$ в $W_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\partial D_0)$. Для каждого $\eta_n(x)$ решаем задачу Дирихле:

$$\Delta v_n = 0, \quad v_n|_{\partial D_0} = \eta_n.$$

Обобщенное решение существует и при этом

$$\|v_n\|_{W_2^{(1)}(D_0)} \leqslant C_1 \|\eta_n\|_{W_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\partial D_0)}. \tag{5}$$

Так как $\int\limits_{D_0} \nabla u \nabla \eta_n dx = f(\eta_n)$, то из неравенства (5) следует, что $f(\eta_n) \to f(\eta)$ при $n \to \infty$. Значит, $f(\eta) = \int\limits_{\partial D_0} \psi_0 \eta dS$, где $\psi_0 \in W_2^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(\partial D_0)$ (см. [6]). ψ_0 совпадает с ψ на Γ_i и с $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D_0 \setminus \Gamma_i}$ на $\partial D_0 \setminus \Gamma_i$. Действительно, берем η, отличную от нуля на $\Gamma_i' \subset \Gamma_i$ и равную нулю в $D \setminus D_0$, а также в некоторой окрестности $\partial D_0 \setminus \Gamma_i$. Тогда $\int\limits_{S^{(n)}} \frac{\partial u}{\partial n} \eta dS \to \int\limits_{S} \psi \eta dS$, где $S^{(n)}$ — поверхности, аппроксимирующие $S = \bigcup\limits_i S_i$ (см. [4]). Но, с другой стороны,

$$\int\limits_{S^{(n)}} \frac{\partial u}{\partial n} \eta dS = \int\limits_{\partial D_0^{(n)}} \frac{\partial u}{\partial n} \eta dS \to \int\limits_{\partial D_0} \psi_0 \eta dS, \text{ т. е. } \psi = \psi_0 \text{ на } \Gamma_i.$$

Аналогично доказывается второе равенство.

Итак, мы доказали, что обобщенное решение задачи

$$\Delta v = 0, \ \frac{\partial v}{\partial n} = \psi_0, \ \psi_0 \in W_2^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(\partial D_0) \tag{6}$$

совпадает с u внутри D_0. Докажем, что v непрерывно дифференцируема до $\Gamma_i' \subset \Gamma_i$. Для этого берем последовательность $\psi_n \in C^{(1)}(\partial D_0)$, которая сходится в $W_2^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(\partial D_0)$ к ψ_0, причем $\psi_n|_{\partial D_0 \setminus k_n} = \psi_0|_{\partial D_0 \setminus k_n}$, где k_n — окрестность $(\overline{\Gamma}_i \setminus \Gamma_i)$, диаметр которой пропорционален $1/n$. Так как $\int\limits_{\partial D_0} \psi_0 dS = 0$, то всегда можно выбрать такие $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, что

$$\psi_n^* = (\psi_n + \alpha_n) \to \psi_0 \text{ в } W_2^{\left(-\frac{1}{2}\right)} \text{ и } \int\limits_{\partial D_0} \psi_n^* dS = 0.$$

Решаем теперь задачу

$$\Delta W_n = 0 \text{ в } D_0, \quad \frac{\partial W_n}{\partial n} = \psi_n^*, \tag{7}$$

очевидно, что $W_n = \int\limits_{\partial D_0} \frac{\varkappa_n}{r^{m-2}} dS$, где

$$\varkappa_n + \frac{2}{(m-2)\,\omega_m} \int\limits_{\partial D_0} \varkappa_n \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \right) dS = \frac{2}{(m-2)\,\omega_m} \psi_n^*.$$

Далее, здесь применим метод Неймана, причем $\int\limits_{\partial D_0} \psi_n^* \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \right) dS$ слабо сходятся в $W_2^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(\partial D_0)$; это можно показать, например, так: пусть $\eta \in W_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\partial D_0)$, тогда

$$\int\limits_{\partial D_0} \eta \left(\int\limits_{\partial D_0} \psi_n^* \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \right) dS_\xi \right) dS_x = \int\limits_{\partial D_0} \psi_n^* \left(\int\limits_{\partial D_0} \eta(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \right) dS_x \right) dS_\xi.$$

Нетрудно показать прямым счетом, что $\int\limits_{\partial D_0} \eta \frac{\partial}{\partial n_x} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \right) dS_x \in W_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\partial D_0)$, значит, $\int\limits_{\partial D_0} \psi_n^* \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \right) dS$ слабо сходятся в $W_2^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(\partial D_0)$. Из неравенства

$$\left| \int\limits_{D_0} \nabla W_n \nabla \eta \, dx \right| = \left| \int\limits_{\partial D_0} \psi_n^* \eta \, dS \right| \leqslant \|\psi_n^*\|_{W_2^{\left(-\frac{1}{2}\right)}} \|\eta\|_{W_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

следует, что W_n сходятся слабо в $W_2^{(1)}(D_0)$ к обобщенному решению задачи (6). С другой стороны, $\varkappa_n(x)$ сходятся равномерно на $\Gamma_i' \subset \partial D_0 \cap S$. Это можно показать так:

$$|\varkappa_n(x) - \varkappa_l(x)| \leqslant \left| \frac{2}{(m-2)\,\omega_m} \int\limits_{k_n} (\psi_n^* - \psi_l^*) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^{m-2}} \right) dS \right| + \ldots$$

$$\left| \int\limits_{k_n} (\psi_n^* - \psi_l^*) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{x\xi}^{m-2}} \right) dS_\xi \right| \leqslant \varepsilon \text{ при } n,\ l > N(\varepsilon) \text{ для } x \in \Gamma_i',$$

так как скорость сходимости ряда Неймана не зависит от n и l, то $|\varkappa_n(x) - \varkappa_l(x)| \leqslant \varepsilon$ для $n,\ l > N(\varepsilon)$ при $x \in \Gamma_i'$. Мы получили, что $\varkappa_n(x) \to \varkappa(x)$ для $x \in \Gamma_i'$, причем $\varkappa(x)$ будет дини-непрерывной на Γ_i', так как $\varkappa_n(x)$ равномерно по n дини-непрерывны на Γ_i':

$$\int\limits_{\partial D_0} \frac{\varkappa_n}{r^{m-2}}\, dS = \int\limits_{\Gamma_i'} \frac{\varkappa_n}{r^{m-2}}\, dS + \int\limits_{\partial D_0 \setminus \Gamma_i'} \frac{\varkappa_n}{r^{m-2}}\, dS. \tag{8}$$

Первое слагаемое в равенстве (8) дает в пределе при $n \to \infty$ непрерывно-дифференцируемую функцию в D_0 до $\Gamma_i'' \subset \Gamma_i'$. Второе слагаемое является непрерывно-дифференцируемой функцией в окрестности Γ_i'', и эти производные сходятся равномерно при $n \to \infty$. Значит, $u(x)$ будет непрерывно-дифференцируемой функцией до Γ_i''. Теорема 2 доказана.

Замечание. Аналогичные результаты можно получить для уравнения

$$Lu = \sum_{i,\, j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + cu = f \text{ в } D,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| = \varphi, \quad \nu \text{ — конормаль, } c \leqslant 0,$$

$$a_{ij} \in C^{(1,\, \alpha)}, \quad c \in C^{(0,\, \alpha)}, \quad f \in C^{(0,\, \alpha)}, \quad \varphi \in C^{(0,\, \alpha)},$$

граничное условие задается по поверхности всюду, за исключением ребер, которые имеют конечную хаусдорфову меру порядка $(m-2)$, $u \in C^{(0)}(\bar{D}) \cap C^{(2)}(D)$.

§ 3. ПРИЛОЖЕНИЕ

Все результаты по теории потенциала, которые используются в этой работе, нетрудно получить самому читателю, опираясь на теорему единственности решения задачи Неймана для областей типа Ляпунова — Дини. Эта теорема впервые доказана в работе Б. Н. Химченко (см [1]). Докажем ее без предварительного изучения свойств супергармонических функций.

Теорема 3. *Решение задачи*

$$\Delta u = 0 \text{ в } D,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0, \quad u \in C^{(0)}(\bar{D}) \cap C^{(2)}(D), \quad S = \partial D \in A_\varphi^{(1)}$$

есть только постоянная.

Доказательство. Пусть $u(x)$ принимает в точке $x_0 \in \partial D$ минимальное значение $u(x_0) = u_0$. Перейдем в сферическую систему координат, причем ось OX_1 совпадает с внутренней нормалью, а начало координат отстоит от точки x_0 на расстоянии $+1$.

Рассмотрим барьер: $w = \gamma\,[r \cos\varphi_1 + 1 - Cv] + u_0$, где

$$v(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}) = \frac{1}{\omega_m} \int\limits_0^{\pi} \ldots$$

$$\ldots \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)\, f(\cos\varphi_1')\, \sin^{m-2}\varphi_1' \ldots \sin\varphi_{m-2}'\, d\varphi_1' \ldots d\varphi_{m-1}'}{[1 - 2r\cos\delta + r^2]^{m/2}},$$

$$\cos\delta = \cos\varphi_1' \cos\varphi_1 + \sin\varphi_1' \sin\varphi_1 \cos\varphi_2' \cos\varphi_2 + \ldots + \sin\varphi_1 \sin\varphi_1' \ldots$$

$$\ldots \sin\varphi_{m-2} \sin\varphi_{m-2}' \cos(\varphi_{m-1}' - \varphi_{m-1}),$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{2}}\,\varphi\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right),\quad \varphi(t)\geqslant 0,\ \text{монотонная и}\ \int\limits_0^1\frac{\varphi(t)}{t}\,dt<\infty.$$

Ясно, что $\Delta w=0$, $w(1,\pi,0,\ldots,0)=\gamma[-1+1-C\cdot 0]+u_0=u_0$. Нормальная производная w в точке $(1,\pi,0,\ldots,0)$ равна

$$\frac{w(r,\pi,0,\ldots,0)-u_0}{(1-r)}=\frac{\gamma}{(1-r)}\left[(1-r)-Cv(r,\pi,0,\ldots,0)\right]=$$

$$=\gamma-\frac{C\gamma v(r,\pi,0,\ldots,0)}{(1-r)}\geqslant\gamma-C\gamma M>0\quad\text{при}\ C<1/M,$$

$$\text{так как}\ \frac{v(r,\pi,0,\ldots,0)}{(1-r)}=\frac{(1+r)C_1}{\omega_m}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(x)(1-x^2)^{\frac{m-3}{2}}dx}{[1+2rx+r^2]^{m/2}}=$$

$$=\left(\text{делаем замену}\ v=\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)=(1+r)C_1\int\limits_0^1\frac{v^2\varphi(v)v^{m-3}(1-v^2)^{\frac{m-3}{2}}dv}{\left[(1-r)^2+4rv^2\right]^{m/2}}\leqslant$$

$$\leqslant C_1\int\limits_0^1\frac{\varphi(v)v^{m-1}}{v^m}\,dv\leqslant M;$$

постоянная C_1 здесь и в дальнейшем меняется от равенства к равенству, но зависит только от размерности m. Значит, если мы докажем, что w на параболоиде вращения $x_1=\rho\psi(\rho)-1$ положительна, то все будет доказано; $\rho=\sqrt{\sum\limits_{i=2}^{m}x_i^2}$, $r\sin\varphi_1=\rho$, $1+r\cos\varphi_1=\rho\psi(\rho)$; $\psi(t)\geqslant 0$, монотонная, $\int\limits_0^1\frac{\psi(t)}{t}\,dt<\infty$ и такая, что $\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\to 0$ при $t\to 0$.

Для этого рассмотрим $v(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1})$ на этом параболоиде, причем в силу выбора $f(\cos\varphi_1')$ можно положить $\varphi_2=\varphi_3=\ldots=\varphi_{m-1}=0$, тогда

$$I=\left.\frac{v}{(1-r^2)}\right|_{x_1=\rho\psi(\rho)-1}=$$

$$=C_1\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{f(\cos\varphi_1')\sin^{m-2}\varphi_1'\sin^{m-3}\varphi_2'd\varphi_1'd\varphi_2'}{\left[1-2r(\cos\varphi_1'\cos\varphi_1+\sin\varphi_1'\sin\varphi_1\cos\varphi_2')+r^2\right]^{\frac{m}{2}}}=$$

(делаем замену $x=\cos\varphi_1'$)

$$=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_0^{\pi}\frac{f(x)(1-x^2)^{\frac{m-3}{2}}\sin^{m-3}\varphi_2'd\varphi_2'dx}{\left[1-2x(\psi\rho-1)-2\rho\sqrt{1-x^2}\cos\varphi_2'+\rho^2+(\rho\psi-1)^2\right]^{m/2}}=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_0^{\pi}\frac{f(x)(1-x^2)^{\frac{m-3}{2}}\sin^{m-3}\varphi_2'd\varphi_2'dx}{[a^2-b^2\cos\varphi_2']^{m/2}},$$

где $a^2=1-2x(\psi\rho-1)+\rho^2+(\rho\psi-1)^2$, $b^2=2\rho\sqrt{1-x^2}$ рассмотрим

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^{m-3}\varphi_2' d\varphi_2'}{[a^2 - b^2\cos\varphi_2']^{m/2}} \left(\text{делаем замену } \operatorname{tg}\frac{\varphi_2'}{2} = u\right) =$$

$$= C_1 \int_0^{\infty} \frac{u^{m-3}du}{(1+u^2)^{\frac{m}{2}-2}[a^2 - b^2 + a^2u^2 + b^2u^2]^{m/2}} =$$

$$= \frac{C_1}{(a^2+b^2)^{m/2}} \int_0^{\infty} \frac{u^{m-3}du}{(1+u^2)^{\frac{m}{2}-2}[k^2+u^2]^{m/2}} = (\text{делаем замену } u = vk,$$

$$k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\Bigg) = \frac{C_1}{(a^2+b^2)^{m/2-1}(a^2-b^2)} \int_0^{\infty} \frac{v^{m-3}dv}{(1+k^2v^2)^{m/2-1}(1+v^2)^{\frac{m}{2}}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{C_1}{(a^2+b^2)^{\frac{m}{2}-1}(a^2-b^2)} \int_0^{\infty} \frac{v^{m-3}dv}{(1+v^2)^{\frac{m}{2}-2}[1+v^2]^{\frac{m}{2}}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{C_1}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)^{m/2-1}},$$

т. е. $I \geqslant C_1 \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)(1-x^2)^{\frac{m-3}{2}}dx}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)^{\frac{m}{2}-1}} \geqslant \left(\text{делаем замену } \sqrt{\frac{1+x}{2}} = u\right)$

$$\geqslant C_1 \int_0^{\psi^2} \frac{u^{m-1}\varphi(u)\,du\,(1-u^2)^{\frac{m-3}{2}}}{\left[(2u-\rho)^2+\rho^2\psi^2\right]\left[(2u+\rho)^2+\rho^2\psi^2\right]^{\frac{m}{2}-1}} \geqslant$$

$$\geqslant C_1 \int_0^{\psi^2} \frac{u^{m-1}\varphi(u)\,du}{\left[(2u-\rho)^2+\rho^2\psi^2\right]\left[(2u+\rho)^2+\rho^2\psi^2\right]^{m/2-1}} =$$

(делаем еще одну замену $v\rho = u$)

$$= C_1 \int_0^{\frac{\psi^2}{\rho}} \frac{v^{m-1}\varphi(\rho v)\,dv}{\left[(2v-1)^2+\psi^2\right]\left[(2v+1)^2+\psi^2\right]^{m/2-1}} \geqslant$$

$$\geqslant C_1 \int_0^{A} \frac{v^{m-1}\varphi(\rho v)\,dv}{\left[(2v-1)^2+\psi^2\right]\left[(2v+1)^2+\psi^2\right]^{\frac{m}{2}-1}} \geqslant$$

$$\geqslant C_1 \int_0^{A} \frac{v^{m-1}\varphi(\rho v)\,dv}{\left[(2v-1)^2+\psi^2\right]} \geqslant$$

(обозначаем $2v - 1 = l$, $A > 1/2$, $1 > \varepsilon > 0$)

$$\geqslant C_1 \int_{-1+\varepsilon}^{2A-1} \frac{(l+1)^{m-1}\varphi\left(\frac{l+1}{2}\rho\right)dl}{[l^2+\psi^2]} \geqslant \frac{C_1\varphi\left(\frac{\varepsilon\rho}{2}\right)}{\psi(\rho)} \geqslant \frac{C_1\varphi(\rho)}{\psi(\rho)}.$$

Отсюда следует, что

$$w|_{x_1=\rho\psi(\rho)-1} \leqslant \gamma\left[\rho\psi(\rho) - C\cdot C_1\varphi(\rho) + \frac{CC_1\varphi(\rho)\rho^2}{\psi(\rho)}\right] \leqslant 0$$

при достаточно малых ρ. Значит, мы получили, что $\frac{\partial u}{\partial n} > 0$ в точке минимума x_0, но этого быть не может по условию задачи: $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$. Теорема 3 доказана.

Литература

1. Химченко Б. Н. Дифференц. уравнения, **5**, № 10, 830—840, 1969.
2. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применения к основным задачам математической физики. ГИТТЛ, 1953.
3. Ландис Е. М. УМН, **18**, вып. 1, 3—62, 1963.
4. Соболев С. П. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1962.
5. Слободецкий Л. И., Бабич В. М. ДАН СССР, **106**, № 4, 1965.
6. Березанский Ю. М. УМН, **18**, вып. 1, 63—96, 1963.
7. Качан П. Б. Изв. вузов, № 5, 1962.
8. Слободецкий Л. И. Ученые записки ЛГПИ, **197**, 1958.
9. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. ИЛ, 1957.

Поступила в редакцию
4 мая 1970 г.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова