Задачи М2490–М2493, Ф2497–Ф2500, *Квант*, 2017, номер 12, 12–13

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2490, М2491а, б, в предлагались на XXXIX Турнире городов.

Задачи М2490–М2493, Ф2497–Ф2500

М2490. Было 100 дверей, у каждой свой ключ (отпирающий только эту дверь). Двери пронумерованы числами 1, 2, … …, 100, ключи тоже пронумерованы, но, возможно, с ошибками: номер ключа совпадает с номером двери или отличается на 1. За одну попытку можно выбрать любой ключ, любую дверь и проверить, подходит ли этот ключ к этой двери. Можно ли гарантированно узнать, какой ключ какую дверь открывает, сделав не более: а) 99 попыток; б) 75 попыток; в) 74 попыток?

А.Лебедев, А.Шаповалов

М2491. Кусок сыра надо разрезать на части с соблюдением таких правил:

1) вначале режем сыр на 2 куска, затем один из них режем еще на 2 куска, затем один из трех кусков опять режем на 2 куска и т.д.;

2) после каждого разрезания части могут быть разными по весу, но отношение веса любой части к весу любой другой должно быть строго больше заданного числа R.

а) Докажите, что при $R = 0{,}5$ можно резать сыр так, что процесс никогда не остановится (после любого числа разрезаний можно будет отрезать еще один кусок).

б) Докажите, что если $R > 0{,}5$, то процесс резки когда-нибудь остановится.

в) На какое наибольшее число кусков можно разрезать сыр, если $R = 0{,}6$?

г) Докажите, что если при данном R сыр можно разрезать на 11 кусков, то его также можно разрезать и на 12 кусков.

А.Толпыго

М2492. В неравнобедренном треугольнике ABC проведены медианы AA_0, BB_0, CC_0 и высоты AA_1, BB_1, CC_1. Пусть A_2 – точка пересечения окружностей, описанных около треугольников BA_1B_0 и CA_1C_0, отличная от точки A_1. Аналогично определим точки B_2 и C_2. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

Т.Ковалев, А.Львов (ученики 9 класса)

М2493. Внутри треугольника $A_1A_2A_3$ взяты точки $A_4, A_5, \ldots, A_n$ так, что среди точек $A_1, \ldots, A_n$ нет трех точек на одной прямой. Аналогично, внутри треугольника $B_1B_2B_3$ взяты точки $B_4, B_5, \ldots, B_n$ так, что среди точек $B_1, \ldots, B_n$ нет трех точек на одной прямой. Дан набор M трехэлементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть A – множество треугольников вида $A_iA_jA_k$, $i < j < k$, где $\{i, j, k\} \in M$, аналогично, B – множество треугольников вида $B_iB_jB_k$, $i < j < k$, где $\{i, j, k\} \in M$. Известно, что треугольники множества A образуют разбиение треугольника $A_1A_2A_3$. Докажите, что любая точка, лежащая внутри треугольника

$B_1B_2B_3$, не лежащая на сторонах треугольников множества B, покрыта нечетным количеством треугольников множества B.

А.Савин, А.Канель-Белов

Ф2497. В журнале «Физика в школе» было опубликовано такое условие задачи: «Свободно падающее с ускорением $g = 10$ м/с^2 тело спустя некоторое время после начала движения оказывается на высоте $h_1 = 300$ м над землей, а еще через время $\Delta t = 10$ с – на высоте $h_2 = 120$ м над землей. С какой высоты падало тело?» И был дан такой ответ: «$H \approx 1531$ м». Найдите две опечатки (по одному символу в каждой) в опубликованном материале.

У.Страшов

Ф2498. Стенки пластиковой бутылки от сильно газированного напитка могут выдержать давление (изнутри) $p = 10$ атм. В такую бутылку емкостью $V = 1$ л налили $V/2$ жидкого азота, закрыли бутылку пробкой и положили на асфальт, накрыв бутылку сверху пустым жестяным ведром емкостью 10 л и массой 1 кг. Через некоторое время произошел взрыв. Ведру достался 1% внутренней энергии газа внутри бутылки до взрыва. Оцените высоту подъема ведра над местом старта. Температура кипения жидкого азота при давлении $p = 10$ атм равна примерно $T = 100$ К. Плотность ρ жидкого азота примерно равна плотности воды $\rho_в = 1$ г/см^3.

А.Зотов

Ф2499. Длина круговой траектории протонов в Большом адронном коллайдере (БАК) равна $L = 26659$ м. Индукция магнитного поля, направленного перпендикулярно плоскости траектории, равна $B = 7{,}5$ Тл. Вычислите разницу между скоростью света и скоростью протонов в коллайдере.

С.Дмитриев

Ф2500. Сплошной прозрачный цилиндр, изготовленный из материала, коэффициент преломления которого зависит от расстояния r между местом в цилиндре и его осью симметрии по «закону»

$$n = 1 + (n_0 - 1)\cdot\left(1 - (r/r_0)^2\right).$$

Здесь r_0 – это радиус цилиндра, $n_0 = 1{,}2$. Узкий луч лазера падает перпендикулярно на торец цилиндра в направлении, параллельном оси цилиндра, в точку, расположенную на расстоянии $r_0/10$ от оси цилиндра. По какой траектории движется лазерный луч внутри цилиндра?

С.Муравьев

Решения задач М2478–М2481, Ф2485–Ф2488

М2478. *Дана «таблица умножения» $n \times n$, т.е. таблица, в которой на пересечении строки с номером k и столбца с номером m записно число km (на рисунке показана*

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

таблица умножения 6×6). Клетки таблицы покрасили в шахматном порядке так, что клетка с числом 1 – черная. Найдите сумму чисел во всех черных клетках.

Можно рассмотреть более общую «таблицу умножения» $m \times n$, строки которой помечены числами $a_1, a_2, \ldots, a_m$, столбцы – числами $b_1, b_2, \ldots, b_n$, а на пересечении строки с номером i и столбца с номером j записано произведение a_ib_j. Сумма всех чисел в таблице равна $(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$, это становится понятно из раскрытия скобок. Также заметим, что произведение знакопеременных сумм $(a_1 - a_2 + a_3 - \ldots)(b_1 - b_2 + b_3 - \ldots)$ даст разность суммы чисел, стоящих в черных клетках, и суммы чисел, стоящих в белых клетках. Действительно, каждое произведение a_ib_j после раскрытия ско-