



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Половко, Об одном численном методе решения нелинейных двухточечных краевых задач,
Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1986, том 26, номер 4, 614–617

<https://www.mathnet.ru/zvmmf4024>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

16 мая 2025 г., 02:34:21



НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.62

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

ПОЛОВКО Ю. А.

(Ленинград)

Предлагается численный метод решения двухточечных краевых задач для систем обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, основанный на сведении их к последовательности подзадач, решаемых методом редукции к задаче Коши.

При решении нелинейных краевых задач весьма актуальна проблема выбора начального приближения к решению, так как от его правильной оценки зависит сходимость большинства известных численных методов. Предлагаемый ниже алгоритм сочетает прием продолжения решения по параметру (метод вложения) и редукцию краевой задачи к задаче Коши (метод пристрелки). Это позволяет обойти проблему точности выбора начального приближения путем замены исходной краевой задачи последовательностью подзадач, для каждой из которых начальное приближение может быть выбрано достаточно близким к решению. Предлагаемый метод особенно полезен в тех случаях, когда вспомогательные начальные задачи, соответствующие данным краевым, проявляют неустойчивость по отношению к начальным условиям. Ниже дается изложение алгоритма и обосновывается его сходимость. Приводится пример, иллюстрирующий возможности метода.

1. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \dot{y} = f(t, y),$$

где $t \in [a, b]$, $y \in R^s$, $f \in R^s$, с краевыми условиями

$$(2) \quad y_i(a) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad y_i(b) = \beta_i, \quad i = i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_s.$$

Здесь индексы $i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_s$ различны между собой, но необязательно отличны от целых чисел $1, 2, \dots, k$. Пусть f непрерывна в области $\Omega(t, y)$ и имеет там непрерывные частные производные по y_i , $i = 1, 2, \dots, s$, до второго порядка включительно, причем $\|f\| < \kappa$, $(t, y) \in \Omega$. Введем в рассмотрение векторы $p_1 = (p_{1, k+1}, \dots, p_{1, s})$, $p_2 = (p_{2, 1}, \dots, p_{2, k})$, $p = (p_{1, k+1}, \dots, p_{1, s}, p_{2, 1}, \dots, p_{2, k})$, компонентами которых являются незадаанные значения искомых функций на концах промежутка интегрирования, а именно $p_{1j} = y_j(a)$, $j = k+1, k+2, \dots, s$, $p_{2j} = y_j(b)$, $r = i_j$, $j = 1, 2, \dots, k$. Пусть $\Omega_1(p_1)$ — сечение области Ω по $t = a$, $y_i = \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, k$; $\Omega_2(p_2)$ — сечение Ω по $t = b$, $y_i = \beta_i$, $i = i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_s$; $\Omega_3(p) = \Omega_1 \times \Omega_2$. Предполагается, что Ω_3 не пусто.

Выберем произвольно начальное значение компонент вектора $p_1 \in \Omega_1$ и проинтегрируем систему (1) от точки a до точки c_1 , $a \leq c_1 < b$, применяя какой-либо из численных методов. Обозначим найденное решение задачи Коши через $y_1(t, p_1^0)$. Выберем произвольную оценку вектора $p_2 \in \Omega_2$ и проинтегрируем систему (1) от точки b к точке c_2 , где $c_1 < c_2 \leq b$. Обозначим найденное решение $y_2(t, p_2^0)$. При этом предполагается, что промежутки $[a, c_1]$ и $[c_2, b]$ таковы, что $y_1(t, p_1^0)$ и $y_2(t, p_2^0)$ остаются в Ω при $t \in [a, c_1]$ и $t \in [c_2, b]$. Составим разность $d = y_1(c_1, p_1^0) - y_2(c_2, p_2^0)$, где $d \in R^s$. Построим систему непрерывных функций $g(t)$, $g \in R^s$, $t \in [0, c_2 - c_1]$, имеющих непрерывные производные в области определения, таких, что $g(0) = 0$, $g(c_2 - c_1) = d$. Вид этой системы функций достаточно произволен. В дальнейшем для простоты выкладок будем полагать ее линейной: $g(t) = td / (c_2 - c_1)$. На практике, как правило, применяется именно такой простой вид функций, однако в некоторых

случаях, для задач со сложной формой области определения $f(t, y)$, может возникнуть необходимость в изменении вида функций $g(t)$.

Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\begin{aligned} \Phi_m(\mathbf{p}) &= \mathbf{y}_1 \left(c_1 + \sum_{j=1}^m h_{1j}, \mathbf{p}_1 \right) - \mathbf{y}_2 \left(c_2 - \sum_{j=1}^m h_{2j}, \mathbf{p}_2 \right) - \\ &- g \left(c_2 - c_1 - \sum_{j=1}^m (h_{1j} + h_{2j}) \right), \quad h_{1j}, h_{2j} \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^n (h_{1j} + h_{2j}) &= c_2 - c_1, \quad 1 \leq m \leq n. \end{aligned}$$

Будем последовательно решать методом Ньютона n нелинейных систем уравнений

$$(3) \quad \Phi_m(\mathbf{p}) = 0, \quad m=1, 2, \dots, n.$$

В качестве начального приближения для системы $\Phi_1(\mathbf{p})=0$ возьмем $\mathbf{p}_n^1 = \mathbf{p}^0$, а для системы $\Phi_{m+1}(\mathbf{p})=0$ возьмем $\mathbf{p}_n^{m+1} = L_l(\mathbf{p}^j)$, $j=m-l, m-l+1, \dots, m$, где \mathbf{p}^j — решение задачи $\Phi_j(\mathbf{p})=0$, а $L_l(\mathbf{p}^j)$ — экстраполяция полином Лагранжа, рассчитанный по $(l+1)$ -й точке. Отметим, что при $m < n$ решение каждой подзадачи (3) не требует большой точности, а следовательно, и большого времени решения, ибо, как правило, не представляет самостоятельного интереса и осуществляется лишь с целью определить начальное приближение для следующей подзадачи. При $m=n$ система (3) примет вид

$$(4) \quad \Phi_n(\mathbf{p}) = \mathbf{y}_1(c_3, \mathbf{p}_1) - \mathbf{y}_2(c_3, \mathbf{p}_2) = 0, \quad c_1 \leq c_3 \leq c_2.$$

Интегральные кривые $\mathbf{y}_1(t, \mathbf{p}_1)$ и $\mathbf{y}_2(t, \mathbf{p}_2)$, удовлетворяющие (4) и (1), совпадают во внутренней точке $c_3 \in [a, b]$. При сделанных допущениях относительно вида функции f и значений граничных условий это означает, что они совпадают во всех точках промежутка $[a, b]$. По построению алгоритма, функция $\mathbf{y}_1(t, \mathbf{p}_1) = \mathbf{y}_2(t, \mathbf{p}_2) = \mathbf{y}(t)$ удовлетворяет также крайним условиям (2) и, следовательно, является искомым решением задачи (1), (2).

2. Найдем достаточное условие сходимости описанного выше алгоритма, полагая для простоты $l=0$. Рассмотрим уравнение (3). При сделанных предположениях оператор $\Phi_m(\mathbf{p})$ определен в Ω_3 и имеет там непрерывную вторую производную. Пусть существует линейный оператор $[\Phi_m'(\mathbf{p}^{m-1})]^{-1} = G$, $\|G\| \leq \delta$. Кроме того, предположим, что выполняется неравенство $\|\Phi_m''(\mathbf{p})\| \leq j$, $\mathbf{p} \in \Omega_0(\mathbf{p}^{m-1})$, где $\Omega_0(\mathbf{p}^{m-1})$ — замкнутый шар из Ω_3 с центром в точке \mathbf{p}^{m-1} . Оценим величину $\|\Phi_m(\mathbf{p}^{m-1})\|$. Имеем

$$\begin{aligned} \Phi_m(\mathbf{p}^{m-1}) &= \mathbf{y}_1 \left(c_1 + \sum_{j=1}^{m-1} h_{1j} + h_{1m}, \mathbf{p}_1^{m-1} \right) - \mathbf{y}_2 \left(c_2 - \sum_{j=1}^{m-1} h_{2j} - h_{2m}, \mathbf{p}_2^{m-1} \right) - \\ &- g \left(c_2 - c_1 - \sum_{j=1}^{m-1} (h_{1j} + h_{2j}) - h_{1m} - h_{2m} \right) = \\ &= \dot{\mathbf{y}}_1 \left(c_1 + \sum_{j=1}^{m-1} h_{1j} + \theta_1 h_{1m}, \mathbf{p}_1^{m-1} \right) h_{1m} - \dot{\mathbf{y}}_2 \left(c_2 - \sum_{j=1}^{m-1} h_{2j} - \theta_2 h_{2m}, \mathbf{p}_2^{m-1} \right) h_{2m} - \\ &- \dot{g} \left[c_2 - c_1 - \sum_{j=1}^{m-1} (h_{1j} + h_{2j}) + \theta_3 (h_{1m} + h_{2m}) \right] (h_{1m} + h_{2m}), \end{aligned}$$

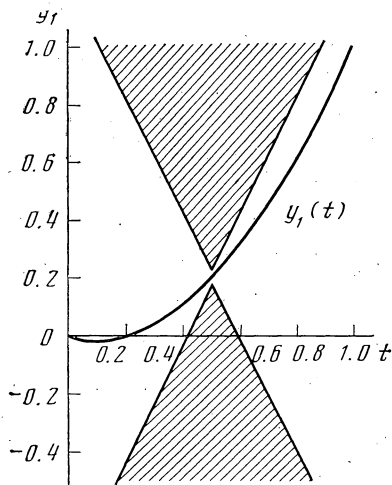
где $\theta \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 \leq 1$. Следовательно, $\|\Phi_m(\mathbf{p}^{m-1})\| \leq \kappa (h_{1m} + h_{2m}) + \|d\| (h_{1m} + h_{2m}) / (c_2 - c_1)$. Тогда, по теореме Канторовича [1], при сделанных предположениях для сходимости метода Ньютона достаточно выполнения условия

$$\gamma \delta^2 (h_{1m} + h_{2m}) [\kappa + \|d\| (c_2 - c_1)^{-1}] \leq 1/2,$$

которое можно записать и в виде

$$h_{1m} + h_{2m} \leq (c_2 - c_1) \{2\gamma \delta^2 [\sigma + \kappa(b-a)]\}^{-1}, \quad \sigma = \|\mathbf{y}_1(a, \mathbf{p}_1^0) - \mathbf{y}_2(b, \mathbf{p}_2^0)\|.$$

3. Сравним предлагаемый алгоритм по быстродействию с близкими ему по структуре алгоритмами [2], [3], также использующими сведение задачи (1), (2) к последовательности из q подзадач. Учитывая, что наиболее трудоемким этапом всех сравниваемых алгоритмов является решение соответствующих задач Коши, и полагая правые части каждого уравнения интегрируемых систем равносильными



$$R = \frac{T([2], [3])}{T} = \left\{ [s + (s-k)s] \sum_{j=1}^n h_{1j} \sum_{m=j}^n i_m + (s+k)s \sum_{j=1}^n h_{2j} \sum_{m=j}^n i_m \right\}^{-1} (s+k)s \sum_{l=1}^q h_l \sum_{m=l}^q i_m^*.$$

по трудоемкости вычисления, при $c_1=a$, $c_2=b$ получаем

Здесь T, T ([2], [3]) — время счета, необходимое для достижения требуемой точности при решении краевых задач описанным выше методом и методами [2], [3], i_m, i_m^* — число итераций, необходимое для получения решения подзадачи с номером m в предложенном выше алгоритме и в алгоритмах [2], [3] соответственно, h_l — величина шага при переходе от подзадачи

с номером $l-1$ к подзадаче с номером l в методах [2], [3]. Полагая, что сравнение производится в классе задач, для которых методы [2], [3] и описанный выше метод дают одинаковую скорость сходимости, примем $h_{1j}=h_{2j}=h_l=(a-b)/2n$, $i_m=i_m^*=i$, для всех m, j, l . В этом случае

$$R = \left[(s+2) \sum_{m=1}^n m i_m \right]^{-1} (k+1) \sum_{m=1}^{2n} m i_m^* \approx \frac{s+2}{4(k+1)}.$$

Таким образом, R может быть больше или меньше единицы, в зависимости от величин s и k . Методы [2], [3] требуют меньшего времени решения в задачах с большой размерностью s и с сильной неравномерностью распределения числа заданных граничных условий между концами промежутка интегрирования (малые k). В противном случае быстрее работает метод, предложенный выше ($R \approx 0.5$ при $k \approx s/2$ и любых s).

Выполнив при тех же допущениях аналогичные выкладки для алгоритма [4], получим

$$R = \frac{T([4])}{T} = \left(\sum_{m=1}^n m i_m \right)^{-1} i^* n = \frac{2}{n+1}.$$

Величина R монотонно убывает с ростом n , откуда следует, что в задачах с достаточно широкой областью сходимости их разбиение на ряд подзадач нецелесообразно и приводит к увеличению времени счета. В этом случае разумно применять метод [4], сформулированный, в отличие от описанного выше метода и методов [2], [3], [5], для более широкого класса краевых задач с нелинейными граничными условиями общего вида.

4. Рассмотрим следующий пример:

$$(5) \quad \dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = 2 + (2|t-0.5| + 0.025 - |y_1 - 0.2|)^{1/2}, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = 1.$$

Структура методов [2]–[5] не позволяет применить их к решению данной задачи. Действительно, при использовании метода [2] возникающие вспомогательные краевые задачи не будут иметь решения в пространстве R^2 , что связано с необходимостью интегрировать данную систему в области, где подкоренное выражение в правой части имеет отрицательное значение. Для применения метода [3], [5] необходимо, чтобы используемые в нем вспомогательные функции (траектории движения «мишени») с высокой точностью совпадали с решением (5), т. е. нужно

знать решение задачи априорно. Аналогичные затруднения возникают и при использовании метода [4]. В этом случае, чтобы не выйти при интегрировании за пределы области определения правой части, необходимо точное задание компонент вектора p , которые в действительности могут быть определены лишь в результате решения.

На фигуре показано решение системы (5), полученное при $c_1=0.1$, $c_2=0.9$, $p_1^0=0.0$, $p_2^0=2.0$, $n=20$, $h_{1j}=h_{2j}=0.02$, $j=1, 2, \dots, n$, $l=0$; заштрихована область отрицательных значений подкоренного выражения этой системы. При указанных значениях параметров решение получалось на промежутке изменения координаты точки сращения $c_3 \in [0.44, 0.56]$. При расчетах матрица Якоби вычислялась методом конечных разностей с шагом $H=0.002$, а для решения каждой подзадачи (3) использовался непрерывный аналог метода Ньютона с оптимальным шагом [6]. Вспомогательные функции $g(t)$ полагались линейными. Расчеты производились на ЭВМ БЭСМ-6.

Автор выражает глубокую благодарность Э. А. Тропцу за полезные обсуждения.

Литература

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
2. Roberts S. M., Shipman J. S. Continuation in shooting methods for two-point boundary value problems. — J. Math. Analysis and Applic., 1967, v. 18, p. 45–58.
3. Суханов А. А. О численном решении краевых задач оптимизации методом движущейся мишени. — В кн.: Алгоритмы и матем. обеспечение для физ. задач. Вып. 6. Л.: Физ.-техн. ин-т им. А. Ф. Иоффе, 1983, с. 143–157.
4. Винокуров В. А., Репников Н. Ф. Итерационный метод решения нелинейных краевых задач. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1981, т. 21, № 4, с. 897–906.
5. Суханов А. А. Метод решения нелинейных двухточечных краевых задач. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, т. 23, № 1, с. 228–231.
6. Ермаков В. В., Калигкин Н. Н. Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1981, т. 21, № 2, с. 491–497.

Поступила в редакцию 1.XI.1983
Переработанный вариант 1.VII.1985

УДК 519.642

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ II РОДА СО СТОХАСТИЧЕСКИМ ЯДРОМ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

АНТЮФЕЕВ В. С.

(Новосибирск)

Для интегрального оператора со стохастическим ядром рассматривается разложение функционального пространства в прямую сумму инвариантных подпространств. На основе этого разложения построена оценка метода Монте-Карло для решения уравнения II рода с таким оператором. Рассмотрен вопрос о точности расчета.

Рассмотрим уравнение

$$(1) \quad f = -Kf + \varphi,$$

где $K: H \rightarrow H$ — компактный интегральный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Предположим, что выполнены условия однозначной разрешимости уравнения (1). Пусть r_0, r_1, \dots — расположенные по убыванию модуля точки дискретного спектра оператора K . Если спектральный радиус $\rho(K) = |r_0| < 1$, то вычисление линейных функционалов от решения f методом Монте-Карло основано на представлении f рядом Неймана. При $|r_0| \neq 1$ этот ряд расходится и непосредственно строить статистическую оценку для функционала нельзя. В настоящей работе предлагается алгоритм, позволяющий преодолеть это затруднение в тех случаях, когда известны функции k_i , $i=1, 2, \dots, n$, образующие базис конечномерного собственного подпространства, соответствующего собственному значению r_0 . Не ограничивая общности, будем считать, что $r_0=1$.