

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В. Ф. Колчин, В. П. Чистяков

ВВЕДЕНИЕ

Комбинаторные задачи и методы занимают значительное место в исследованиях по теории вероятностей. Среди многочисленных работ в этой области можно выделить несколько направлений: комбинаторные задачи в теории случайных процессов, задачи, связанные со случайными отображениями и случайными графами, задачи размещения частиц по ячейкам.

В последнее десятилетие заметные усилия были направлены на изучение задач о случайном размещении частиц по ячейкам. Пусть n дробинok независимо друг от друга бросают в N ящиков. Как распределена случайная величина $\mu_0(n, N)$, равная числу пустых ящиков? Этой «классической задаче о дробинках» можно дать несколько наглядных интерпретаций. Например, при случайном отображении множества из n точек в себя каждая из n точек случайно переходит в одну из этих n точек. Этому отображению соответствует случайный граф с n вершинами, каждая из которых случайным образом соединяется дугой с одной из вершин. Величина $\mu_0(n, n)$ в этом случае является числом вершин нулевой кратности (не имеющих ни одного прообраза). Известны и другие формулировки этой и близких ей задач: задача о днях рождения [96, 120, 124, 130, 132], задача о коллекционировании [68, 72, 84, 142, 143] и другие. Мы будем использовать терминологию статистической физики и говорить о размещении частиц по ячейкам.

Внимание к задачам о размещении частиц является отражением общего повышения интереса к комбинаторным задачам, который вызван, с одной стороны, возросшими перечис-

лительными возможностями вычислительных машин, а с другой стороны, — развитием методов асимптотического анализа. В задачах о размещении частиц нашли применение почти все основные асимптотические методы теории вероятностей.

Величина $\mu_0(n, N)$ может быть представлена в виде суммы индикаторов, связанных с ячейками:

$$\mu_0(n, N) = \xi_1 + \dots + \xi_N, \quad (1)$$

где $\xi_i = 1$, если ячейка с номером i пуста, и $\xi_i = 0$ в остальных случаях, $i = 1, \dots, N$. Однако при исследовании предельного поведения суммы (1) при $n, N \rightarrow \infty$ хорошо развитая теория суммирования независимых слагаемых неприменима в силу зависимости случайных величин ξ_1, \dots, ξ_N . При исследовании предельных распределений в задачах о размещении частиц используются различные методы: метод перевала [33, 34, 44—47, 53, 56], метод моментов [52, 111, 112, 135, 150], суммирование независимых случайных величин [138], суммирование зависимых случайных величин [52, 141], сведение к условным распределениям независимых случайных величин [35, 36, 96, 145].

Прикладная важность задач о размещении частиц подтверждается работами, в которых описываются применения этих моделей в статистической физике [90], вычислительной технике [16, 92], теории автоматов [59], в математической статистике [13, 15, 51, 61], астрономии, биологии [116, 119], а также тем фактом, что эти задачи не раз переоткрывались различными авторами в теоретических [136] и особенно в прикладных исследованиях [16, 92].

Разнообразие и сложность используемых методов с одновременной простотой и наглядностью формулировок делают задачи о размещении частиц хорошими объектами для демонстрации асимптотических методов теории вероятностей в преподавательской практике.

В этом обзоре мы будем касаться главным образом теоретических работ, относящихся к задачам о размещении частиц и к случайным отображениям конечных множеств. Первая глава содержит обзор работ по классической схеме размещения частиц, вторая посвящена различным обобщениям этой схемы. Третья глава охватывает работы по случайным отображениям конечных множеств. К задачам размещения частиц примыкают и некоторые вопросы общей теории случайных графов. Мы не включили в обзор эти работы, поскольку теория случайных графов заслуживает подробного самостоятельного изложения. Мы также не рассматриваем большой класс комбинаторных задач, связанных со случайными процессами, которые в значительной мере отражены в монографии Л. Такача [58].

КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О РАЗМЕЩЕНИИ

§ 1. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ И МОМЕНТЫ

Пусть n частиц независимо друг от друга размещаются по N ячейкам так, что для каждой частицы вероятность попасть в i -ую ячейку равна a_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Такую схему размещения частиц по ячейкам мы будем называть полиномиальной. Полиномиальную схему размещения в случае

$$a_1 = a_2 = \dots = a_N = \frac{1}{N}$$

будем называть равновероятной. Обозначим $\mu_r(n, a_1, \dots, a_N)$ и $\mu_r(n, N)$ число ячеек, содержащих ровно по r частиц, в полиномиальной и равновероятной схемах. Иногда мы будем эти величины обозначать просто μ_r . Значения m_r случайных величин μ_r связаны соотношениями

$$\sum_{r=0}^n m_r = N, \quad \sum_{r=0}^n r m_r = n. \quad (1.1)$$

Точные формулы совместных распределений любого набора $\mu_{r_1}, \dots, \mu_{r_s}$ при больших n, N довольно сложны. Даже в равновероятной схеме, чтобы получить совместные распределения при $s < n$, приходится суммировать вероятности]

$$P\{\mu_r = m_r, r = 0, 1, \dots, n\} = \frac{N!n!}{N^n \prod_{r=0}^n [(r!)^{m_r} m_r!]}, \quad (1.2)$$

где m_r удовлетворяют (1.1). Нетрудно показать, что

$$P\{\mu_0(n, N) = k\} = C_N^k \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n P\{\mu_0(n, N - k) = 0\},$$

где

$$P\{\mu_0(n, N) = 0\} = \sum_{k=1}^N (-1)^k C_N^k \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n. \quad (1.3)$$

Точные формулы для распределений числа пустых ячеек μ_0 (или для числа занятых $N - \mu_0$), а также для других величин, связанных с полиномиальным размещением, приводились во многих работах (см., например, [53, 68, 84, 114]). Во многих приложениях используются распределения величин μ_r при больших n, N . В связи с этим представляет интерес получение предельных распределений при $n, N \rightarrow \infty$. Исследование предельных распределений облегчается наличием

достаточно простых выражений для производящих функций, связанных с распределениями μ_r .

Положим

$$\begin{aligned} & \Phi_{r_1, \dots, r_s}(z, x_1, \dots, x_s, a_1, \dots, a_N) = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} z^n M x_1^{\mu_{r_1}(n, a_1, \dots, a_N)} \dots x_s^{\mu_{r_s}(n, a_1, \dots, a_N)}, \end{aligned}$$

В работе Б. А. Севастьянова и В. П. Чистякова [53] получена формула

$$\begin{aligned} & \Phi_{r_1, \dots, r_s}(z, x_1, \dots, x_s, a_1, \dots, a_N) = \\ & = \prod_{k=1}^N \left[e^{z N a_k} + \sum_{i=1}^s \frac{(z N a_k)^{r_i}}{r_i!} (x_i - 1) \right]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Отсюда при $s=1$ и $r_1=r$ находим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} z^n M x^{\mu_r(n, a_1, \dots, a_N)} = \prod_{k=1}^N \left[e^{z N a_k} + \frac{(z N a_k)^r}{r!} (x - 1) \right], \quad (1.5)$$

а в равновероятной схеме

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} z^n M x^{\mu_r(n, N)} = \left(e^z + \frac{z^r}{r!} (x - 1) \right)^N. \quad (1.6)$$

Формулу (1.4) можно использовать для получения вероятностных производящих функций в виде контурного интеграла. Например, из (1.5) находим, что

$$M x^{\mu_r(n, N)} = \frac{n!}{N^n 2\pi i} \oint \left(e^z + \frac{z^r}{r!} (x - 1) \right)^N \frac{dz}{z^{n+1}}. \quad (1.7)$$

Асимптотическое поведение (1.7) можно исследовать методом перевала. Из равенства (1.6), положив $r=0$ и $x=0$, нетрудно получить (1.3). Дифференцируя (1.4) по переменным x_1, x_2, \dots, x_s в точке $x_1 = x_2 = \dots = x_s = 1$, нетрудно получить формулы моментов

$$M \mu_r = \sum_{k=1}^N C_n^r a_k^r (1 - a_k)^{n-r},$$

$$M \mu_r (\mu_r - 1) = \sum_{k \neq l} \frac{n!}{(r!)^2 (n-2r)!} a_k^r a_l^r (1 - a_k - a_l)^{n-2r}, \quad (1.8)$$

$$M \mu_r \mu_t = \sum_{k \neq l} \frac{n!}{r! t! (n-r-t)!} a_k^r a_l^t (1 - a_k - a_l)^{n-r-t}.$$

В частности, для μ_0

$$M\mu_0 = \sum_{k=1}^N (1 - a_k)^n, \quad M\mu_0^{[k]} = \sum_{i_1, \dots, i_k}^* (1 - a_{i_1} - \dots - a_{i_k})^n, \quad (1.9)$$

где знаком \sum^* обозначено суммирование по всем наборам (i_1, i_2, \dots, i_k) , у которых координаты различны, и

$$x^{[k]} = x(x-1)\dots(x-k+1).$$

Если $n, N \rightarrow \infty$, $a_1 = \dots = a_N = \frac{1}{N}$ и $\alpha = \frac{n}{N} \leq a_1 < \infty$, то

$$M\mu_r \sim Np_r, \quad \text{cov}(\mu_r, \mu_t) \sim N\sigma_{rt}, \quad (1.10)$$

где

$$p_r = \frac{\alpha^r}{r!} e^{-\alpha}, \quad \sigma_{rr} = p_r \left[1 - p_r - \frac{p_r}{\alpha} (\alpha - r)^2 \right], \quad (1.11)$$

$$\sigma_{rt} = -p_r p_t \left[1 + \frac{(\alpha - r)(\alpha - t)}{\alpha} \right], \quad r \neq t.$$

Асимптотические формулы (1.10) получены Б. А. Севастьяновым и В. П. Чистяковым в работе [53]. В этой же работе показано, что определитель матрицы $\|\sigma_{r,t,j}\|$, $i, j = 1, \dots, s$, положителен при любом $\alpha > 0$. Асимптотические формулы в полиномиальной схеме для (1.8) получены при $n, N \rightarrow \infty$ в предположении, что

$$0 \leq Na_k \leq C < \infty, \quad \frac{n}{N} = \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1], \quad 0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 < \infty,$$

в работе В. П. Чистякова [62], И. И. Викторовой и В. П. Чистякова [14].

§ 2. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ЧИСЛА ПУСТЫХ ЯЧЕЕК В РАВНОВЕРОЯТНОЙ СХЕМЕ

В этом и следующем параграфах мы будем предполагать, что $n, N \rightarrow \infty$ и $a_1 = a_2 = \dots = a_N = \frac{1}{N}$. Если для $M\mu_0$ и $D\mu_0$ существуют конечные или бесконечные пределы, то в зависимости от соотношения между n, N возможны следующие случаи:

- 1) $M\mu_0 \rightarrow \lambda, D\mu_0 \rightarrow \lambda$, 2) $M\mu_0 \rightarrow \infty, D\mu_0 \rightarrow \infty$,
- 3) $M\mu_0 \rightarrow \infty, D\mu_0 \rightarrow \lambda$.

Заметим, что случай $M\mu_0 \rightarrow \lambda, D\mu_0 \rightarrow \infty$ невозможен в силу неравенства $M\mu_0 \geq D\mu_0$. Кроме того, из условия $M\mu_0 \rightarrow \lambda$ следует, что $D\mu_0 \rightarrow \lambda$. Можно явно указать связь между n, N в этих случаях. Приведём все предельные распределения для

μ_0 . Связь между n , N укажем явно. Справедливы следующие утверждения. При n , $N \rightarrow \infty$

$$1) \quad P \{ \mu_0 - (N - n) = k \} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ если } \frac{n^2}{2N} \rightarrow \lambda; \quad (1.12)$$

$$2) \quad P \left\{ \frac{\mu_0 - M\mu_0}{\sqrt{D\mu_0}} < x \right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad (1.13)$$

если выполнено хотя бы одно из условий $\frac{n^2}{N} \rightarrow \infty$, $\frac{1}{N} e^{\frac{n}{N}} \rightarrow 0$;

$$3) \quad P \{ \mu_0 = k \} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (1.14)$$

если $\frac{n}{N} - \log N \rightarrow \log \lambda$.

Соотношение (1.14) легко доказывается методом моментов; (1.12) было установлено Бекешши [74]. Асимптотическая нормальность μ_0 в предположении $0 < c_1 \leq \frac{n}{N} \leq c_2 < \infty$ была доказана методом моментов Вейссом [150]; в этом же предположении утверждение об асимптотической нормальности μ_0 следует из более общей теоремы, полученной Б. А. Севастьяновым и В. П. Чистяковым [53] методом перевала. Реньи [138] дал три доказательства асимптотической нормальности μ_0 . Эти доказательства проводятся соответственно в предположениях:

- 1) $\frac{n^2}{N} \rightarrow \infty$, $\frac{n}{N_1} < c < \infty$,
- 2) $0 < c_1 \leq \frac{n}{N} \leq c_2 < \infty$,
- 3) $\frac{n}{N} \geq c_1 > 0$, $\frac{1}{N} e^{\frac{n}{N}} \rightarrow 0$

и, таким образом, полностью исчерпывают допустимую область изменения n/N в (1.13). В предположениях $\frac{n^2}{N} \rightarrow \infty$ и $\frac{1}{N} e^{\frac{n}{N}} \rightarrow 0$ другое доказательство было дано Бекешши [73].

Будем теперь рассматривать $\mu_0(n, N)$ как случайную функцию $\mu_0(n)$, зависящую от параметра n . В работе Б. А. Севастьянова [49] показано, что случайная функция $\mu_0(n)$ при соответствующей нормировке и соответствующем изменении параметра сходится к пуассоновскому процессу или к стационарному гауссовскому. Пусть n , $N \rightarrow \infty$ так, что величины $\frac{n^2}{2N} = \theta$ ограничены. Величину θ принимаем за новый временной параметр. В этих условиях конечномерные распреде-

ления процесса $\mu_0(n) - (N - n)$ сходятся к конечномерным распределениям пуассоновского процесса $\eta(\theta)$ с $M\eta(\theta) = \theta$.

Если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\log \frac{n}{N}$ ограничен, то за новый временной параметр принимается $\theta = \frac{n}{N}$. Доказано, что конечномерные распределения процесса

$$\xi(\theta) = \frac{\mu_0(n) - M\mu_0}{\sqrt{N}}$$

сходятся к конечномерным распределениям гауссовского марковского процесса $\eta(\theta)$ с корреляционной функцией $e^{-\theta'}(1 - (1 + \theta)e^{-\theta})$, $\theta' \geq \theta$. Процесс $\xi(\theta)$ определён в точках вида $\theta = \frac{n}{N}$. Доопределим его в промежутках между этими точками линейно. Тогда распределение $g(\xi(\theta))$ сходится к распределению $g(\eta(\theta))$, где g — непрерывный функционал на пространстве непрерывных функций.

Пусть теперь $n, N \rightarrow \infty$ так, что величина $\frac{n}{N} - \log N$ ограничена. Введём новое время θ с помощью равенства $\frac{n}{N} - \log N = -\log \theta$. В этом случае конечномерные распределения процесса $\mu_0(n)$ сходятся к конечномерным распределениям пуассоновского процесса. Приведённые здесь результаты Б. А. Севастьянова в случае сходимости к гауссовскому процессу распространены Ю. В. Болотниковым [8] на случаи,

когда $\frac{n}{N} \rightarrow \infty$, $\frac{1}{N} e^{\frac{n}{N}} \rightarrow 0$ и когда $\frac{n}{N} \rightarrow \infty$, $\frac{n^2}{N} \rightarrow \infty$.

§ 3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ μ_r В РАВНОВЕРОЯТНОЙ СХЕМЕ

Результаты, приведённые в § 2 для μ_0 ((1.12) — (1.14)), переносились многими авторами на μ_r с $r > 0$; Эрдёш и Реньи [100] показали, что при $n, N \rightarrow \infty$ и $\frac{n}{N} = a_N \pm \log N + r \log \log N$ ($a_N \rightarrow a$) случайная величина $\mu_r(n, N)$ распределена в пределе по закону Пуассона с параметром $\lambda = \frac{1}{r!} e^{-a}$. Сходимость к распределению Пуассона при $n^r/N^{r+1} \rightarrow \text{const}$ доказана в работе [33]. Асимптотическая нормальность μ_r была доказана Бекешши [74]. Используя методы Вейсса [150], Харрис и Парк [112] показали, что при $\frac{n}{N} \rightarrow a$, $n, N \rightarrow \infty$ моменты случайной величины $(\mu_r - M\mu_r)/\sqrt{D\mu_r}$ сходятся к моментам нормального распределения. Получен ряд результатов, относящихся к многомерным распределениям. В работе Кастольди [83] аппроксимируется совместное распределение $\mu_{r_1}(n, N), \dots, \mu_{r_s}(n, N)$.

Б. А. Севастьянов и В. П. Чистяков [53] получили следующий результат. При $n, N \rightarrow \infty$ и $0 < \alpha_0 \leq \frac{n}{N} \leq \alpha_1 < \infty$ равномерно по $|u_i| \leq c < \infty$ и $\frac{n}{N} \in [\alpha_0, \alpha_1]$ имеет место равенство

$$P\{\mu_{r_1}(n, N) = k_1, \dots, \mu_{r_s}(n, N) = k_s\} = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s B_{ij} \mu_i \mu_j\right)}{(2\pi N)^{s/2} B} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right),$$

где $u_i = \frac{k_{r_i} - N p_{r_i}}{B \sqrt{N}}$, p_{r_i} определены формулами (1.11), B^2 — определитель матрицы $\|\sigma_{r_i r_j}\|$, B_{ij} — алгебраические дополнения элементов $\sigma_{r_i r_j}$. Определители B^2 , B_{ij} вычислены в явном виде.

Результаты Б. А. Севастьянова [49] о сходимости к случайным процессам Ю. В. Болотников [7] перенёс на $\mu_r(n, N)$ с произвольным $r > 0$.

Наиболее полные результаты в исследовании одномерных распределений $\mu_r(n, N)$ получил В. Ф. Колчин [33, 34]. Положим

$$\alpha = \frac{n}{N}, \lambda_r = N p_r, \lambda_{00} = \lambda_0 - N + n, \lambda_{10} = \frac{n - \lambda_1}{2},$$

$$\lambda_{11} = \lambda_{10} - \frac{1}{2};$$

$$\Pi_{1r}(x) = \Pi(\lambda_r, x); \Pi(\lambda, x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x \geq 0; \quad \Pi(\lambda, x) = 0, \quad x < 0;$$

$$\Pi_{2r}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{rr}}} e^{-\frac{u_r^2}{2}}, \quad u_r = \frac{x - \lambda_r}{\sqrt{\sigma_{rr}}},$$

где p_r, σ_{rr} определены (1.11).

Асимптотическое поведение распределений $\mu_r (r \geq 2)$ при $n, N \rightarrow \infty$ можно представить следующей таблицей:

Характер изменения α	$\alpha \rightarrow 0$ $N = o(N)$ $\lambda_r \rightarrow 0$	$\alpha \rightarrow \infty$ $\alpha = o(N)$ λ_r ограничено	$\alpha \rightarrow \infty$ $\lambda_r \rightarrow \infty$	$\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ $\lambda_r \rightarrow \infty$	$\alpha \rightarrow 0$ $\lambda_r \rightarrow \infty$	$\alpha \rightarrow 0$ λ_r ограничено
Предельные распределения	Π_{1r}	Π_{1r}	Π_{1r}, Π_{2r}	Π_{2r}	Π_{1r}, Π_{2r}	Π_{1r}

Эта таблица описывает и поведение μ_0 и μ_1 при $\alpha \rightarrow 0$, если в ней положить $r = 0$ или $r = 1$. При $n, N \rightarrow \infty$ и $\alpha \rightarrow 0$ распределение случайной величины $\mu_0 - N + n$ сближается с распределением Пуассона $\Pi(\lambda_{00}, x)$; если, кроме того, $\lambda_{00} \rightarrow \infty$, то распределение μ_0 сближается с нормальным распределением $\Pi_{20}(x)$. Особый случай составляет поведение распределения случайной величины μ_1 при $n, N \rightarrow \infty$ и $\alpha \rightarrow 0$. При $\lambda_{10} = o(n^{1/2})$ распределение асимптотически сосредоточено

в точках $n - 2k, k = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]$, и

$$P\{\mu_1 = n - 2k\} = \Pi(\lambda_{10}, k)(1 + o(1));$$

при $n = o(\lambda_{10}^2)$ распределение сосредоточено в точках $k=0, \dots, n$ и

$$P\{\mu_1 = n - 2k\} = \frac{1}{2} \Pi(\lambda_{10}, k)(1 + o(1)),$$

$$P\{\mu_1 = n - [2k - 1]\} = \frac{1}{2} \Pi(\lambda_{10}, k)(1 + o(1)).$$

При λ_{10} , имеющих порядок $n^{1/2}$, происходит переход распределения с одного носителя на другой. Исследование этого перехода проведено в работе [34]. В каждой области изменения параметра α получены локальные теоремы и явно выписано несколько первых остаточных членов. Эти результаты позволили исследовать поведение расстояния по вариации между распределением μ_r и предельными. В результате можно указать ближайшее к μ_r предельное распределение. Обозначим ρ_{ir} расстояние по вариации между распределением μ_r и распределением Π_{ir} . В [33] доказано, что при $r = 0, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < \alpha < \infty} \min_l \rho_{lr} = \\ & = \left(\frac{c_1 c_2^2}{9n} \right)^{1/3} (\log n + (3r + 1) \log \log n)^{2/3} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log n} \right) \right) \end{aligned}$$

и для $r = 1$

$$\begin{aligned} & \sup_{\sqrt{\frac{\log n}{n}} \leq \alpha < \infty} \min_l \rho_{l1} = \\ & = \left(\frac{c_1 c_2^2}{9n} \right)^{1/3} (\log n + 4 \log \log n)^{2/3} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log n} \right) \right), \end{aligned}$$

где $c_1 = \sqrt{2}(\pi e)^{-\frac{1}{2}}$, $c_2 = (3\sqrt{2\pi})^{-1} \left(1 + 4e^{-\frac{3}{2}} \right)$.

П. Ф. Беляевым [5] изучаются предельные при $n, N \rightarrow \infty$ многомерные распределения чисел s -цепочек (последовательностей из s исходов).

§ 4. ЗАДАЧИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ЗАПОЛНЕНИЯ В РАВНОВЕРОЯТНОЙ СХЕМЕ

В этом параграфе мы будем считать, что в равновероятной схеме испытания проводятся до тех пор, пока не наступит то или иное событие, связанное с заполнением ячеек. Тогда число испытаний будет случайной величиной. Обозначим $\nu_m(N, k)$ число испытаний, после которых впервые k ячеек будут содержать не менее m частиц каждая. Справедливы следующие результаты.

Если $m = \text{const}$, а величины $N, k \rightarrow \infty$ так, что $N - k \leq C < \infty$, то

$$P \left\{ \frac{\nu_m(N, k)}{N} - \log N - (m-1) \log \log N - \log \frac{1}{(m-1)!} \leq x \right\} = \\ = \sum_{r=0}^{N-k} \frac{1}{r!} (e^{-x})^r e^{-e^{-x}} + o(1), \quad (1.15)$$

при этом

$$M\nu_m(N, N) = N (\log^2 N + (m-1) \log \log N + \\ + \gamma + \log \frac{1}{(m-1)!} + O\left(\frac{\log \log N}{\log N}\right)), \quad (1.16)$$

$$D\nu_m(N, N) = N^2 \left(\frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{\log \log \log N}{\log \log N}\right) \right), \quad (1.17)$$

где γ — константа Эйлера.

Если $m = \text{const}$, а величины $N, k \rightarrow \infty$ так, что $\lambda = \frac{k}{N} = \text{const} < 1$, то случайная величина $\nu_m(N, k)$ асимптотически нормальна с параметрами

$$M\nu_m = N u_m(\lambda) - \lambda u'_m(\lambda) + \frac{1}{2} \lambda (1 - \lambda) u''_m(\lambda) + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$D\nu_m = N [\lambda (1 - \lambda) (u'_m(\lambda))^2 - u_m(\lambda)] + O(1),$$

где $u_m(\lambda)$ — положительный корень уравнения

$$1 - \sum_{r=0}^{m-1} \frac{u^r}{r!} e^{-u} = x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.18)$$

при $x = \lambda$.

Соотношение (1.15) в случае $k = N$ было доказано в работе Эрдёша и Реньи [100], а в общем случае — Бекешши [75]. Формула (1.16) получена в работах [82, 100, 134], при этом константа $\gamma - \log(m-1)!$ была вычислена впервые в [100], а остаточный член — в [82]. Формула для дисперсии (1.17) получена в [82]. Второе утверждение доказано в [75]. Приведённые выше результаты обобщают результаты Бартона и Дейвид [71], относящиеся к равновероятной схеме. Иссле-

дования асимптотического поведения величины $\nu_m(N, k)$ в областях $k/N \rightarrow 0$ и $k/N \rightarrow 1$, $N - k \rightarrow \infty$, а также в случае, когда $N \rightarrow \infty$ и $m \rightarrow \infty$, было проведено в работе Г. И. Ивченко [24]. В результате получена полная картина асимптотического поведения случайной величины $\nu_m(N, k)$ для всего спектра значений k , $1 \leq k \leq N$, при любом конечном $m \geq 2$, а также найдены её предельные распределения, когда $m \rightarrow \infty$, но $\frac{m}{\log N} \leq C < \infty$, в каждом из следующих случаев: $k = \text{const}$, $N - k = \text{const}$, $\frac{k}{N} = \text{const} < 1$. Полное исследование всех предельных распределений величины $\nu_m(N, k)$ при $m = 1$ проведено в работе [72] (см. также [26]). Для исследования распределений $\nu_m(N, k)$ используется соотношение

$$P\{\nu_m(N, k) \leq n\} = P\{\xi_{m-1}(n, N) \leq N - k\},$$

где $\xi_m(n, N) = \nu_0(n, N) + \nu_1(n, N) + \dots + \nu_m(n, N)$. Асимптотическое поведение ξ_m достаточно полно изучено в [23]. Предельное поведение $\nu_m(N, 1)$ при $N = \text{const}$ и $m \rightarrow \infty$ рассматривалось в [153].

§ 5. ПОРЯДКОВЫЕ СТАТИСТИКИ В РАВНОВЕРОЯТНОЙ СХЕМЕ

Обозначим η_i число появлений i -го исхода в n независимых испытаниях с N исходами. Располагая η_1, \dots, η_N в убывающем порядке, построим вариационный ряд $\eta_{(1)}, \dots, \eta_{(N)}$. Характер предельных распределений членов вариационного ряда при $n, N \rightarrow \infty$ зависит от поведения параметра $n/N \log N$. Если $\frac{n}{N \log N} \rightarrow 0$ при $n, N \rightarrow \infty$, то распределение каждого члена ряда асимптотически сосредоточено в одной или двух точках. С ростом параметра $\frac{n}{N \log N}$ предельные распределения всё больше и больше расплываются. Если $\frac{n}{N \log N} \rightarrow x > 0$, то предельными для $\eta_{(N-m+1)}$ при любом фиксированном $m = 1, 2, \dots$; служат распределения, сосредоточенные на всех целых неотрицательных точках, разброс этого распределения растёт с ростом x . Аналогично ведут себя члены вариационного ряда $\eta_{(m)}$ при любом фиксированном $m = 1, 2, \dots$. Критическим для них является значение $x = 1$. Если $\frac{n}{N \log N} \rightarrow x$, то при $x \leq 1$ распределения сосредоточены в одной или двух точках, а при $x > 1$ — на всех целых точках. Если $\frac{n}{N \log N} \rightarrow x < \infty$, то предельные распределения „остальных“ членов вариационного ряда сосредоточены в одной или двух точках.

При $\frac{n}{N \log N} \rightarrow \infty$ при соответствующей центрировке и нормировке крайние члены вариационного ряда имеют в пределе распределение, обладающее плотностью.

Приведём формулировки теорем о предельном поведении максимального члена $\eta_{(N)}$. Обозначим $\alpha = \frac{n}{N}$; $p_k = \alpha^k e^{-\alpha}/k!$, $k=0, 1, \dots$. Если $n, N \rightarrow \infty$, $\frac{\alpha}{\log N} \rightarrow 0$ и $r = r(n, N)$ выбрано так, что $r > \alpha$ и $N p_r \rightarrow \lambda$, где λ — положительная постоянная, то

$$\begin{aligned} P\{\eta_{(N)} = r - 1\} &= e^{-\lambda} + o(1), \\ P\{\eta_{(N)} = r\} &= 1 - e^{-\lambda} + o(1). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Если $n, N \rightarrow \infty$, $\frac{\alpha}{\log N} \rightarrow x$, $r = r(n, N)$ выбрано так, что $r > \alpha$ и $N p_r \rightarrow \lambda$, где λ и x — положительные постоянные, то

$$P\{\eta_{(N)} \leq r + k\} = \exp\{-\lambda \gamma^{k+1} (1 - \gamma)^{-1}\}, \quad (1.20)$$

где γ — корень уравнения $\gamma + x(\log \gamma - \gamma + 1) = 0$ в интервале $0 < \gamma < 1$.

Если $n, N, \frac{\alpha}{\log N} \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} P \left\{ \frac{\eta_{(N)} - \alpha - u \left(\left(\log N - \frac{1}{2} \log \log N \right) / \frac{\alpha}{\log N} \right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{\alpha}{2 \log N}}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \log 4\pi \leq z \right\} \rightarrow e^{-e^{-z}}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

где $u(w)$ — функция в интервале $0 \leq w < \infty$, задаваемая уравнением

$$-u + (1 + u) \log(1 + u) = w.$$

Утверждения (1.19) и (1.20) доказаны И. И. Викторовой и Б. А. Севастьяновым [12], сходимость распределения $\eta_{(N)}$ к двойному экспоненциальному распределению установлена И. И. Викторовой [11], там же описано поведение других крайних членов вариационного ряда в случае, когда $\frac{\alpha}{\log N} \rightarrow \infty$. Подробное исследование всех членов вариационного ряда в случае, когда $\frac{\alpha}{\log N}$ стремится к некоторой постоянной, проведено Г. И. Ивченко [23]. Исследование вариационного ряда $\eta_{(1)}, \dots, \eta_{(N)}$ в этих работах сводится к изучению асимптотического поведения случайных величин $\xi_m(n, N) = \mu_0(n, N) + \dots + \mu_m(n, N)$ в равновероятной схеме размещения частиц по ячейкам, поскольку, например, $P\{\eta_{(N)} \leq m\} = P\{\xi_m(n, N) = N\}$. Другой подход к изучению крайних

членов вариационного ряда использован В. Ф. Колчиним в статье [36]. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ — независимые одинаково распределённые случайные величины, имеющие распределение Пуассона с параметром α , и $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_N^{(r)}$ — независимые случайные величины, для которых

$$P\{\xi_i^{(r)} = k\} = P\{\xi_i = k \mid \xi_i \leq r\}, \quad i = 1, \dots, N; \quad k = 0, 1, \dots, r.$$

Используя связь полиномиального распределения с условным распределением пуассоновских величин с фиксированной суммой, легко находим, что

$$P\{\eta_{(N)} \leq r\} = (P\{\xi_1 \leq r\})^N \frac{P\{\xi_1^{(r)} + \dots + \xi_N^{(r)} = n\}}{P\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\}}. \quad (1.22)$$

Отношение вероятностей в правой части (1.22), как показано в [36], стремится к единице и, следовательно, распределение максимума в равновероятной схеме, как и следовало ожидать, асимптотически совпадает с распределением максимума N независимых случайных величин ξ_1, \dots, ξ_N , имеющих распределение Пуассона с параметром α . Это соображение дает возможность единообразно получить предельные теоремы для крайних членов вариационного ряда, изучая квантили распределения Пуассона с растущим параметром.

§ 6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СХЕМЕ

В этом параграфе мы часто будем предполагать, что при $n, N \rightarrow \infty$ выполнено условие

$$Na_k \leq C < \infty, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (1.23)$$

Результаты, сформулированные в § 2 (соотношения (1.12) — (1.14)), переносятся на полиномиальные размещения. Кроме того, для μ_0 в полиномиальной схеме возникают новые предельные распределения. Если $n, N \rightarrow \infty$, выполнено условие (1.23) и

$$\frac{n^2}{2} \sum_{k=1}^N a_k^2 \rightarrow \lambda = \text{const},$$

то

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty} P\{\mu_0 - (N - n) = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (1.24)$$

Если выполнено условие (1.23) и $0 < a_0 \leq \frac{n}{N} \leq a_1 < \infty$, то

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\mu_0 - M\mu_0}{\sqrt{D\mu_0}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (1.25)$$

Если $n, N \rightarrow \infty$, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_N$ и

$$M\mu_0 = \sum_{k=1}^N (1 - a_k)^n \rightarrow m, \quad (1 - a_k)^n \rightarrow \gamma_k, \quad 0 \leq \gamma_k \leq 1, \quad (1.26)$$

где m, γ_k — некоторые постоянные, то

$$Mx^{\mu_0} \rightarrow e^{-\lambda(x-1)} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \gamma_k + \gamma_k x), \quad \lambda = m - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \geq 0. \quad (1.27)$$

Утверждения (1.24) и (1.25) доказаны В. П. Чистяковым [62, 63]. Утверждение (1.27) доказано В. П. Чистяковым в [63] в предположении, что выполнено (1.26) и что $\frac{n}{N^2} \rightarrow 0$. Б. А. Севастьянов [52] доказал (1.27) при $\lambda = m$ без предположения $\frac{n}{N^2} \rightarrow 0$. Это утверждение при $\lambda = m$ является следствием более общей теоремы Б. А. Севастьянова, полученной методом моментов. Методом моментов (1.27) доказывается и в общем случае. Холст [118] распространил (1.25) на более широкую область изменения n/N . Он показал, что условие $\frac{n}{N} \geq \alpha_0$ можно заменить на $\frac{n}{N} \rightarrow 0$ и $\frac{n^2}{N} \rightarrow \infty$. При более сильных, чем (1.23), ограничениях на a_k утверждение (1.25) было сформулировано Китабатакэ [123].

И. И. Викторова и В. П. Чистяков [14] доказали сходимость совместного распределения

$$\frac{\mu_{r_1} - M\mu_{r_1}}{\sqrt{N}}, \dots, \frac{\mu_{r_s} - M\mu_{r_s}}{\sqrt{N}} \quad (1.28)$$

при $N \rightarrow \infty$ в предположении, что $\frac{n}{N} \in [\alpha_0, \alpha_1]$ и выполнено (1.23), к нормальному распределению. Если условие (1.23) заменить на

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \left(1 + \frac{b_k^{(N)}}{4\sqrt{N}} \right), \quad k = 1, \dots, N, \quad |b_k^{(N)}| \leq K < \infty, \\ b_N^2 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (b_k^{(N)})^2 \rightarrow b^2 > 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

то для (1.28) справедлива локальная теорема. Локальная теорема сформулирована в [13]. Полное доказательство приводится в кандидатской диссертации И. И. Викторовой «Критерий «пустых ящиков» и его обобщения».

Теоремы о сходимости к случайным процессам функции $\mu_0(n)$ в полиномиальной схеме получены Ю. В. Болотниковым [9]. Задачи, связанные с последовательным заполнением

в полиномиальной схеме, рассматривались в работах [67, 82, 118, 147].

Рассмотрим при $N \rightarrow \infty$ предельное поведение величины $v_1(N, k)$, введенной в § 4. Мы будем предполагать, что выполнено условие (1.23). Если

$$\frac{k^2}{2} \sum_{i=1}^N a_i^2 \rightarrow \lambda < \infty, \quad (1.30)$$

то распределение величины $v_1(N, k) - k$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ . Заметим, что (1.30) эквивалентно условию $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k^2}{N} < \infty$. Эти условия сходимости к закону Пуассона, а также достаточные условия асимптотической нормальности $v_1(N, k)$ в предположении $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{k}{N} < 1$ получены

Холстом [118]. При более сильных предположениях на a_k чем (1.23), Брайтон [82] получил асимптотические формулы для $Mv_m(N, N)$ и $Dv_m(N, N)$.

§ 7. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ μ_r , СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Для проверки статистической гипотезы H_0 о том, что выборка, состоящая из независимых наблюдений x_1, x_2, \dots, x_n , взята из непрерывного распределения $F(x)$, применяется так называемый критерий „пустых ящиков“ (см., например, [51]). Он состоит в следующем. Точки $z_0 = -\infty < z_1 < \dots < z_{N-1} < z_N = \infty$ выбираются так, что $F(z_k) - F(z_{k-1}) = \frac{1}{N}$, $k = 1, \dots, N$. Критерий строится на основе статистики μ_0 , равной числу интервалов (z_{k-1}, z_k) , в которые не попало ни одного наблюдения. Ясно, что $\mu_0(n, N)$ является числом пустых ячеек (или ящиков) в задаче о размещении. Если $\mu_0 \leq C$, то гипотеза H_0 принимается, а если $\mu_0 > C$, то H_0 отвергается. Константа C определяется заданием ошибки 1-го рода. При конкурирующей гипотезе вероятности попадания в интервалы уже могут быть разными. Воспользовавшись результатами (1.13) и (1.25), можно вычислить ошибки 1-го и 2-го рода критерия пустых ящиков при больших n, N . При небольших n, N ($2 \leq N \leq 10$, $5 \leq n \leq 50$) Ксорго и Гутман [87] для ошибки 1-го рода 0,01 и 0,05 составили таблицу значений C , используя точную формулу распределения вероятностей $\mu_0(n, N)$. В работах [86, 87, 152] изучается двухвыборочный критерий пустых ящиков, заключающийся в следующем. Наблюдения первой выборки образуют разбиение числовой пря-

мой на ячейки. Далее находится число ячеек, не содержащих наблюдений второй выборки. По числу пустых ячеек решается, считать обе выборки распределенными по одному и тому же закону или нет.

Естественные обобщения обычного критерия пустых ящиков получаются, если наряду со статистикой μ_0 использовать набор статистик μ_r , $r = 0, 1, \dots$. Пусть при гипотезе H_0 вероятности $a_k = \frac{1}{N}$, $k = 1, \dots, N$, а при гипотезе H_1 вероятности a_k удовлетворяют (1.29). В работе И. И. Викторовой и В. П. Чистякова [13] показано, что оптимальный критерий, различающий H_0 и H_1 по набору статистик $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r$, при больших n , N определяется линейной статистикой $c_{0r}\mu_0 + \dots + c_{rr}\mu_r$; найдены коэффициенты c_{kr} статистики оптимального критерия и вычислены ошибки 1-го и 2-го рода.

Исследование статистических критериев и некоторые другие задачи приводят к изучению линейных функций от μ_r . Г. И. Ивченко [23] изучал суммы $\xi_m = \mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_m$ в равновероятной схеме. Харрис и Парк [111] изучали величину

$$W = \left\{ \sum_{r=0}^n w_r \mu_r(n, N) \right\}$$

в равновероятной схеме. Выбирая специальным образом w_r , можно получить статистики критерия пустых ящиков μ_0 , отношения наибольшего правдоподобия

$$\lambda = \sum_{k=0}^N n_k \log n_k - n \log \frac{n}{N} = \sum_{r=0}^n (r \log r) \mu_r - n \log \frac{n}{N}$$

и

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^N \frac{\left(n_k - \frac{n}{N} \right)^2}{\frac{n}{N}} = \frac{N}{n} \sum_{r=0}^n r^2 \mu_r - n.$$

Здесь n_k — числа наблюдений в k -й ячейке. В работе [111] найдены асимптотические формулы для MW , DW и получены достаточные условия асимптотической нормальности W . Величины w_r , входящие в λ и χ^2 , удовлетворяют этим условиям. Предельные распределения статистики χ^2 в полиномиальной схеме при $N \rightarrow \infty$ исследуются С. Х. Туманяном [60, 61] и Ю. И. Медведевым [41]. Локальная нормальная теорема для сумм квадратов частот при $N \rightarrow \infty$ получена в работе В. Ф. Колчина [38]. Различные приложения задач о размещении указываются Холстом в [119] и в работах [64, 88, 92, 116].

§ 8. НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ЗАДАЧИ

1. **Группы ячеек.** Пусть в равновероятной схеме N ячеек разбиты на s групп и N_i — число ячеек в i -й группе. Обозначим μ_{0i} число пустых ячеек в i -й группе. Г. И. Ивченко и Ю. И. Медведев [25] изучают предельное поведение вектора $(\mu_{01}, \dots, \mu_{0s})$ в двух случаях:

$$\frac{n}{N} = \log \frac{N}{n}, \quad \frac{n}{N} = \text{const.}$$

Число частиц, которое надо бросить, чтобы заполнилась хотя бы одна из групп ячеек, изучается в [70].

2. **Частицы нескольких типов.** Т. Ю. Попова [42] рассматривала следующую схему. Пусть в N ячеек независимо бросают n_1 частиц 1-го типа, n_2 частиц 2-го типа. Частица k -го типа попадает в i -ую ячейку с вероятностью $a_i^{(k)}$, $k=1, 2$; $i=1, \dots, N$. Обозначим $\mu_0^{(k)}(n_k) = \mu_0^{(k)}$ число ячеек, не содержащих частиц k -го типа, а $\mu_0^{(3)}(n_1 + n_2) = \mu_0^{(3)}$ — число ячеек, не содержащих частиц 1-го и 2-го типов. Рассматривается предельное поведение вектора $(\mu_0^{(1)}, \mu_0^{(2)}, \mu_0^{(3)})$ при $n_1, n_2, N \rightarrow \infty$ и $Na_i^{(k)} \leq C < \infty$.

3. **Суммы, связанные с размещениями.** Рассматривается полиномиальная схема с N ячейками и числом испытаний n . Ячейке с номером k приписывается число δ_k ($k=1, \dots, N$). Обозначим η_n сумму δ_k , соответствующих ячеек, в которых содержится не больше r частиц. При $\delta_1 = \dots = \delta_N = 1$, $r=0$ имеем $\eta_n = \mu_0$. Холст [117] доказал асимптотическую нормальность вектора

$$\eta_{n_1}, \eta_{n_1 + n_2}, \dots, \eta_{n_1 + \dots + n_d},$$

когда $N, n_1, \dots, n_d \rightarrow \infty$. В частном случае $r=0$ эту задачу рассматривал Розен [142]. В этой работе он использовал свои результаты о суммах зависимых величин [141]. В [143] содержатся результаты, относящиеся к «последовательному заполнению» в задачах с суммами η_n .

4. **Оценки параметров в задачах о размещении.** В [94] для равновероятной схемы получена оценка максимального правдоподобия для числа ячеек. Еще одна задача, связанная с оценкой параметра, рассматривается в [81].

5. **Бесконечное число ячеек.** В [89, 121] рассматривается следующая схема: n частиц размещаются независимо друг от друга в ячейки с номерами $i=1, 2, \dots$. Вероятность попадания в i -ую ячейку равна p_i . Изучается при $n \rightarrow \infty$ число занятых ячеек и число ячеек, имеющих четное число частиц.

ОБОБЩЕНИЕ СХЕМ РАЗМЕЩЕНИЯ

§ 1. СХЕМА РАЗМЕЩЕНИЯ ЧАСТИЦ КОМПЛЕКТАМИ

Пусть в N ячеек бросают независимо n' комплектов частиц, по s частиц в каждом. Частицы каждого комплекта размещаются в ячейках по одной, причем все возможные размещения считаются равновероятными. Пусть $n = n's$ — общее число частиц. Обозначим $\mu'_r(n, N)$ число ячеек, в которых оказалось после описанного выше испытания ровно r частиц. Очевидно, что при $s = 1$ величина $\mu'_r(n, N)$ совпадает с соответствующей величиной $\mu_r(n, N)$ в равновероятной схеме (см. гл. 1, § 7). В работе Б. А. Севастьянова [48] показано, что все интегральные предельные распределения при $n, N \rightarrow \infty$, $s = \text{const}$ для величины $\mu_r(n, N)$ совпадают с предельными распределениями $\mu'_r(n, N)$ и, следовательно, все интегральные теоремы для $\mu_r(n, N)$, упомянутые в § 3 гл. 1, переносятся на $\mu'_r(n, N)$. Это утверждение сохраняется и в том случае, когда числа частиц s_i в разных комплектах разные, но $s_i \leq s < \infty$. Бекешши [76] получил асимптотические формулы для $M\mu'_0(n, N)$, $D\mu'_0(n, N)$. В этой же работе доказывается сходимость $\mu'_0(n, N)$ к закону Пуассона. Задачи последовательного заполнения рассматривались Бекешши [77], Г. И. Ивченко и Ю. И. Медведевым [26]. Обозначим $v_m(N, k, s)$ число брошенных комплектов, после которого впервые k ячеек будет содержать не менее m частиц. Очевидно, что при $s = 1$ величина $v_m(N, k, 1)$ совпадает с величиной $v_m(N, k)$, введенной в § 4 гл. 1. Бекешши [77] получил асимптотические формулы для $Mv_1(N, N, s)$, $Dv_1(N, N, s)$ при $N \rightarrow \infty$, $s = \text{const}$. Г. И. Ивченко и Ю. И. Медведев [26] получили все предельные распределения при $N \rightarrow \infty$ для $v_1(N, k, s)$, а также асимптотические формулы для $Mv_1(N, k, s)$, $Dv_1(N, k, s)$, которые при $k = N$ являются более точными, чем соответствующие формулы в [77].

§ 2. СЛУЧАЙНЫЕ МАТРИЦЫ

Случайное расположение единиц в матрице размером $n \times n$ изучается в работе Г. В. Балакина [1]. Задается число единиц $N = [n \log e^n]$, случайно расставленных в клетках матрицы M . При $n \rightarrow \infty$ рассматривается вероятность $P(n, x, k, l)$ того, что матрица M имеет ровно k незанятых единицами строк и l столбцов, и вероятность $P_k(n, x)$ того,

что в матрице M содержится $n - k$ максимально возможных единиц в независимых позициях (т. е. в разных строках и столбцах). Вероятность $P_0(n, x)$ при фиксированном x была получена в [101].

Рассмотрим матрицу $A = \|a_{ij}\|$ с n строками и N столбцами. Пусть a_{ij} — независимые случайные величины, принимающие значения из поля $GF(q)$, содержащего q элементов, с вероятностями

$$P(a_{ij} = 0) = 1 - q_N, \quad P(a_{ij} = a) = \frac{q_N}{q-1}, \quad | \quad a \neq 0, \quad a \in GF(q). \quad (2.1)$$

При $q = 2$ в предположении, что вероятности $P(a_{ij} = 1)$ удовлетворяют неравенствам

$$\frac{(\log N)^{1+\varepsilon}}{N} \leq P(a_{ij} = 1) \leq 1 - \frac{(\log N)^{1+\varepsilon}}{N},$$

в работах И. Н. Коваленко [28], М. В. Козлова [31] найдено асимптотическое поведение вероятности того, что матрица A имеет максимально возможный ранг. В [30] И. Н. Коваленко при более жестком условии $\delta \leq P(a_{ij} = 1) \leq 1 - \delta$ ($\delta = \text{const}$) нашел распределение ранга матрицы A над полем $GF(2)$. Г. В. Балакиным [2] для поля $GF(q)$ рассмотрен случай

$$q_N = \frac{\log N + x}{N}, \quad (2.2)$$

где x — фиксированное число. Позднее для поля $GF(2)$ И. Н. Коваленко [29] получил обобщение некоторых результатов Г. В. Балакина, заменив в (2.1) и (2.2) x на x_{ij} , где $|x_{ij}| \leq T = \text{const}$, а также заменив предположение $a = \frac{N}{n} = \text{const}$ предположением об ограниченности величин $a_N = \frac{N}{n}$. В работе М. В. Козлова [32] изучается случайная величина ζ , которая является наибольшим целым числом таким, что любые ζ столбцов матрицы $\|a_{ij}\|$ линейно независимы как элементы векторного пространства над $GF(2)$.

В [98] рассматривается случайная матрица с n' строками и N столбцами. Строки матрицы независимо друг от друга заполняются нулями и единицами. В i -й строке размещается s_i единиц. Все возможные размещения считаются равновероятными. Пусть N_p — число столбцов с заданным расположением p единиц. При $s_i = s$ сумма N_p по всем расположениям p равна величине $\mu'_r(sn', N)$, введенной в § 1 гл. 2. В [98] при $N \rightarrow \infty$ и различных предположениях о поведении $s_i = s_i(N)$ получены для N_p предельные распределения (нормальное, пуассоновское, биномиальное).

§ 3. РАВНОВЕРОЯТНОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ СО СЛУЧАЙНЫМ ЧИСЛОМ ЧАСТИЦ

Будем предполагать, что частицы размещаются по N ячейкам согласно равновероятной схеме и что общее число частиц является случайной величиной ν . Случайная величина ν не зависит от расположения частиц в ячейках. Обозначим μ_r число ячеек, содержащих ровно r частиц. Такая схема размещения рассматривается в работе Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведева, Б. А. Севастьянова [27]. В этой работе получены следующие теоремы:

1) Если при $N \rightarrow \infty$ функция распределения величины ν/N слабо сходится к $\Psi(x)$, то распределение вероятностей величины μ_r/N слабо сходится к распределению величины

$$p_r(\xi) = \frac{\xi^r}{r!} e^{-\xi}$$

где $P\{\xi < x\} = \Psi(x)$.

2) Если при $N \rightarrow \infty$ случайная величина ν асимптотически нормальна с параметрами $(aN, \sigma\sqrt{N})$, то μ_r асимптотически нормальна с параметрами $(a_1 N, \sigma_1\sqrt{N})$, где a_1 и σ_1 в явном виде выражены через a и σ .

3) Если при $N \rightarrow \infty$ [распределение случайной величины $\frac{\nu^r}{r!} N^{r-1}$ слабо сходится к $\Psi(x)$, то при $r \geq 2$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{\mu_r = k\} = \int_0^{\infty} \frac{x^k}{k!} e^{-x} d\Psi(x).$$

4) Если при $N \rightarrow \infty$

$$P_i\left\{\frac{\nu - N \log N - rN \log \log N}{N} < x\right\} \rightarrow \Psi(x),$$

то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{\mu_r = k\} = \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{r!} e^{-x}\right)^k}{k!} \exp\{-e^{-x}/r!\} d\Psi(x).$$

§ 4. МАРКОВСКИЕ РАЗМЕЩЕНИЯ

Рассмотрим простую однородную цепь Маркова с N состояниями. Обозначим $\mu_0(n)$ число состояний, не появившихся после n испытаний. П. Ф. Беляев [3] доказал следующую теорему: Если вероятности перехода a_{ij} при $n, N \rightarrow \infty$ удовлетворяют соотношению

$$a_{ij} = \frac{1}{N} \left(1 + \frac{a_{ij}}{\log N}\right); \quad i, j = 1, \dots, N, \quad |a_{ij}| \leq C_1,$$

и

$$\frac{n}{N} = \log N - \log \chi, \quad |\chi| \leq C_2 < \infty,$$

то

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty} \left[P \{ \mu_0(n) = m \} - \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \right] = 0,$$

где

$$\lambda = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{A_j} \right) \chi, \quad A_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_{ij}.$$

В [4] П. Ф. Беляев обобщил этот результат на случай s -сложных цепей Маркова. Роль ячеек в этой схеме играют s -цепочки (последовательности из s номеров состояний). Предполагается, что вероятности перехода удовлетворяют соотношению

$$P(i | j_1, \dots, j_s) = \frac{1}{N} \left(1 + \frac{a(j_1, \dots, j_s, i)}{\log N} \right), \quad |a(j_1, \dots, j_s, i)| \leq C < \infty.$$

Время между последовательными реализациями данной s -цепочки в простой цепи Маркова изучается в [22]. В. Ф. Колчин и В. П. Чистяков [40] рассмотрели следующую схему размещения n частиц по N ячейкам. Ячейки разбиты на s групп. Выбор группы определяется цепью Маркова, а внутри группы частицы размещаются по равновероятной схеме. При $s = \text{const}$ и $n, N \rightarrow \infty$ доказана асимптотическая нормальность величины $\mu_0(n)$. При $s = 2$ получен ряд новых предельных распределений, которых не было в полиномиальной схеме. Несомненный интерес представляло бы доказательство асимптотической нормальности $\mu_0(n)$ в марковской модели размещения частиц при достаточно общих условиях.

В работе П. Ф. Беляева [6] рассматриваются некоторые вопросы, связанные с анализом распределения статистики наиболее мощного критерия для двух простых гипотез в сложной однородной цепи Маркова с большим числом состояний. Предполагается, что параметры цепи близки к параметрам равновероятной схемы.

Глава III

СЛУЧАЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — конечное множество и T — однозначное отображение X в себя. Отображение T можно представить ориентированным графом G_T , вершинами которого являются элементы множества X , и вершина x_i графа G_T

соединена дугой с вершиной x_j , если $Tx_i = x_j$. Каждая компонента графа G_T содержит ровно один цикл; если в G_T убрать все дуги, которые соединяют вершины, входящие в циклы, то останется граф, все компоненты которого представляют собой деревья.

Пусть R — некоторый комплекс ограничений на характер отображений T , $\mathfrak{M}_n(R)$ — множество всех отображений X в себя, удовлетворяющих ограничениям R , $M_n(R)$ — число отображений в $\mathfrak{M}_n(R)$. При изучении класса отображений $\mathfrak{M}_n(R)$ часто задают равномерное распределение вероятностей на этом классе, приписывая каждому отображению $T \in \mathfrak{M}_n(R)$ вероятность $\frac{1}{M_n(R)}$, и рассматривают свойства случайного отображения T , выбираемого из $\mathfrak{M}_n(R)$ в соответствии с этим распределением. При этом случайному отображению T соответствует случайный граф G_T . Строение графа G_T достаточно полно характеризуется наборами чисел $\{\xi_{ij}^{(n)}\}$ и $\{\lambda_k^{(n)}\}$, где $\xi_{ij}^{(n)}$ — число компонент объема j , содержащих цикл объема i , а $\lambda_k^{(n)}$ — число деревьев объема k . Эти случайные величины и выражаемые через них основные характеристики случайного графа G_T такие, как число компонент $\xi^{(n)}$, объемы этих компонент, число точек $\lambda^{(n)}$, лежащих на циклах, и другие, достаточно хорошо изучены для различных классов случайных отображений. Ясно, что нахождение распределений вероятностей, например, случайных величин $\xi_{ij}^{(n)}$ равносильно отысканию чисел $M_n(\{k_{ij}\}, R)$ и $M_n(R)$, где $M_n(\{k_{ij}\}, R)$ — число отображений X в себя, для которых $\xi_{ij}^{(n)} = k_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$. Поэтому несмотря на вероятностную терминологию, при равномерном распределении эта задача по существу является перечислительной задачей комбинаторного анализа и вероятностный подход обеспечивает лишь удобную форму изложения и помогает применить хорошо развитые в теории вероятностей методы асимптотического исследования.

§ 1. КЛАСС ВСЕХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Наиболее естественным классом случайных отображений является класс \mathfrak{M}_n всех однозначных отображений X в себя, в котором каждому из n^n отображений приписана одинаковая вероятность. Ясно, что равномерное распределение вероятностей на классе \mathfrak{M}_n можно реализовать с помощью случайного выбора образа каждой из точек множества X . Если выбор образов x_1, \dots, x_n производится независимо и образом каждой точки с равной вероятностью может быть любая из точек x_1, \dots, x_n , то каждое из отображений $T \in \mathfrak{M}_n$ появится при таком построении с одинаковой вероятностью. Такое по-

строение случайного отображения можно рассматривать как схему размещения n частиц (роль которых играют n дуг, исходящих из вершин x_1, \dots, x_n) в n ячеек (их роль играют вершины x_1, \dots, x_n , в которые каждая из n дуг входит с одинаковой вероятностью). Поэтому свойства некоторых характеристик случайного отображения $T \in \mathfrak{M}_n$ можно исследовать, опираясь на результаты задачи о размещении частиц по ячейкам. Одним из таких свойств является кратность вершины — число дуг, входящих в эту вершину в графе G_T , или число прообразов этой вершины при отображении T . Распределение числа вершин $\mu_r(n)$ кратности r в случайном отображении $T \in \mathfrak{M}_n$ совпадает с распределением числа ящиков $\mu_r(n, n)$, содержащих ровно r частиц в равновероятной схеме размещения частиц по ячейкам. Прямое сведение к задаче о размещении частиц позволяет перенести результаты, касающиеся вариационного ряда в равновероятной полиномиальной схеме, на вариационный ряд кратностей вершин графа G_T . Более сложным является исследование случайных величин типа $\xi_r^{(n)}$ и $\lambda_r^{(n)}$ которые в отличие от кратностей вершин представляют собой нелокальные характеристики графа G_T . В [139] получены производящие функции для чисел всех отображений, чисел отображений с заданным числом компонент, чисел неразложимых отображений (с одной компонентой) и чисел отображений с заданным числом точек, лежащих на циклах. Хотя эти производящие функции дают возможность получить точные выражения для соответствующих чисел, наибольший интерес представляют проводимые с их помощью асимптотические исследования. Приведем основные результаты.

Число циклов $\xi^{(n)}$ случайного отображения $T \in \mathfrak{M}_n$ асимптотически нормально со средним $\frac{1}{2}(\log 2n + C) + o(1)$, где $C = 0,577 \dots$ — постоянная Эйлера, и дисперсией $\frac{1}{2} \log n + O(1)$.

Число циклов $\xi_r^{(n)}$ фиксированной длины r при $n \rightarrow \infty$ имеет в пределе распределение Пуассона с параметром $\frac{1}{r}$. Эти результаты следуют из того, что в случайном отображении $T \in \mathfrak{M}_n$

$$P\{\lambda^{(n)} = l\} = \frac{l(n-1)!}{n^l(n-l)!}$$

где $\lambda^{(n)}$ — число деревьев или число вершин, входящих в циклы, и случайная величина $\lambda^{(n)}$ при $n \rightarrow \infty$ имеет в пределе распре-

деление с плотностью $xe^{-\frac{x^2}{2}}$. Этот результат получен в [110]. Приведенное выше выражение для $M\xi^{(n)}$ указано в [126].

Обзор результатов о случайных отображениях конечных множеств приведен в статье В. Е. Степанова [56]. В этой статье среди ряда других результатов о случайных отображениях содержится исследование длины максимального цикла в случайном отображении $T \in \mathfrak{M}_n$, а также изучены основные характеристики случайных деревьев графа G_T .

§ 2. КЛАССЫ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В ряде работ были рассмотрены случайные отображения $T \in \mathfrak{M}_n(R)$, где в качестве R выступали различные естественные ограничения на характер деревьев графа G_T . Для таких классов отображений В. Е. Степановым [56] предложен единый подход для получения производящих функций случайных величин $\xi_j^{(n)}$ и $\lambda_k^{(n)}$. Эти производящие функции выражаются через производящую функцию

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{n!} x^n,$$

где R_n — число корневых деревьев с n вершинами, удовлетворяющих-ограничениям R .

Случайные отображения ограниченной кратности изучены в статье А. А. Грушо [21]. В этом случае ограничения R налагаются на число дуг, входящих в каждую из вершин графа G_T , изучается класс отображений, в котором каждая вершина G_T имеет кратность, не превосходящую t . Показано, что число $\mu_r(n)$ точек кратности r в случайном отображении из этого класса асимптотически нормально, число $\lambda_k^{(n)}$ точек, лежащих на циклах, и число $\lambda_k^{(n)}$ деревьев объема k при соответствующей нормировке имеют в пределе распределение

с плотностью $x e^{-\frac{x^2}{2}}$. Назовем порядком вершины длину цикла той компоненты G_T , в которой лежит данная вершина. В статье изучено предельное поведение числа вершин фиксированного порядка, а также ряда других величин, связанных с порядком. Отметим, что ограничения на кратность при $t \geq 2$ не влияют на предельное поведение числа $\xi^{(n)}$ компонент графа G_T , как и при отсутствии ограничений величина $\xi^{(n)}$ асимптотически нормальна с параметрами

$$\left(\frac{1}{2} \log n, \quad \frac{1}{2} \log n \right).$$

Случайные отображения с ограничениями на длины циклов и высоту изучены в серии статей В. Н. Сачковым. Высотой вершины x в графе G_T называется наименьшее m такое, что $T^m x$ принадлежит циклу. В статье [47] изучаются случайные отображения из класса \mathfrak{M}_n^h всех отображений, каждая из вер-

шин которых имеет высоту, не превосходящую h . Получено асимптотическое выражение для числа всех отображений класса \mathfrak{M}_n^h . Показано, что вектор $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{h-1})$, где ξ_r — число вершин, имеющих высоту r , асимптотически нормален. Число компонент $\xi^{(n)}$ случайного отображения из этого класса асимптотически нормально, а число $\xi_r^{(n)}$ циклов длины r имеет в пределе распределение Пуассона с параметром $\frac{1}{r}$.

В [45] рассмотрен класс $\mathfrak{M}_n(h)$ всех отображений T , для которых $T^{h+1} = T^h$. Для отображения $T \in \mathfrak{M}_n(h)$ [граф G_T состоит из циклов единичной длины с присоединенными к ним деревьями, вершины которых имеют высоты, не превосходящие h ; вершины, лежащие на циклах, являются неподвижными точками отображения T . Показано, что в случайном отображении $T \in \mathfrak{M}_n(h)$ число $\xi^{(n)}$ компонент (или число неподвижных точек) асимптотически нормально. Случай $h=1$ был рассмотрен ранее в [44].

Класс отображений с наиболее общими ограничениями на длины циклов и высоты вершин рассмотрен В. Н. Сачковым в статье [46]. В этой статье приведен общий метод получения производящих функций чисел отображений с ограничениями на циклы, из которых единообразно получаются известные результаты для чисел отображений с k точками, лежащими на цикле [137, 139], для чисел отображений с j компонентами [139], чисел отображений с k циклическими элементами, в которых ни один элемент не переходит в себя. Подробно изучается класс всех отображений, циклы которых не превосходят s , а высоты не превосходят h . Получено асимптотическое выражение числа таких отображений. Для случайного отображения из этого класса изучено асимптотическое поведение числа $\lambda^{(n)}$ точек, лежащих на циклах, и с помощью результатов о величинах $\lambda^{(n)}$ показано, что число циклов $\xi^{(n)}$ асимптотически нормально.

§ 3. СЛУЧАЙНЫЕ ПОДСТАНОВКИ

Наиболее полно исследован класс S_n взаимно однозначных отображений или класс случайных подстановок. Производящая функция чисел $M_n(\{k_i\})$ подстановок, имеющих ровно k_i циклов длины i , получена В. Л. Гончаровым [19, 20] и равна

$$\sum_{\{k_i\}} \frac{M_n(\{k_i\})}{n!} x^n \prod_i u_i^{k_i} = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n x^n}{n!}. \quad (3.1)$$

Приведем основные результаты асимптотического исследования величин, связанных с цикловой структурой случайной

подстановки, которые получены с помощью производящей функции (3.1). Число $\xi^{(n)}$ циклов случайной подстановки степени n при $n \rightarrow \infty$ асимптотически нормально с параметрами $(\log n, \log n)$, при этом

$$M\xi^{(n)} = \log n + C + o(1),$$

где C — постоянная Эйлера. Заметим, что этот результат использовался в исследованиях различных классов отображений для доказательства асимптотической нормальности числа компонент случайного отображения при известном поведении распределения числа $\lambda^{(n)}$ точек, лежащих на циклах. Обозначим $\xi_r^{(n)}$ — число циклов длины r в случайной подстановке степени n . При фиксированных i_1, \dots, i_m случайные величины $\xi_{i_1}^{(n)}, \dots, \xi_{i_m}^{(n)}$ асимптотически независимы и распределены по закону

Пуассона с параметрами $\frac{1}{i_1}, \dots, \frac{1}{i_m}$. Эти результаты получены В. Л. Гончаровым в статьях [19, 20]. Там же найдено предельное распределение максимального члена вариационного ряда, составленного из длин циклов случайной подстановки.

Несмотря на то, что цикловая структура случайной подстановки была, по существу, исчерпывающе изучена В. Л. Гончаровым, эта тематика продолжала привлекать внимание исследователей. Красивый подход к изучению класса случайных подстановок реализован в статье Шепфа и Ллойда [144]. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона, и

$$M\xi_r = \frac{z^r}{r!},$$

где z — некоторый параметр. Тогда

$$P\{\xi_i^{(n)} = k_i, \quad i = 1, \dots, n\} = P\left\{\xi_i = k_i,$$

$$i = 1, \dots, n \mid \sum_{i=1}^n i\xi_i = n\right\}.$$

Используя эту связь случайных величин $(\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)})$, описывающих цикловую структуру случайной подстановки, с независимыми случайными величинами (ξ_1, \dots, ξ_n) , авторы изучают предельное поведение крайних членов вариационного ряда, составленного из длин циклов случайной подстановки. Для распределений этих случайных величин, а также для моментов любого порядка получены асимптотические выражения при $n \rightarrow \infty$. Для $\frac{1}{n} Mx_n$, где x_n — длина максимального цикла, получено значение 0,6243... (см. также [106]).

Идеи работы [144] развиваются и обобщаются в статье [66]. Другой подход к изучению предельного поведения максимального члена вариационного ряда x_n содержится в статье В. Е. Степанова [56]. Предельные распределения членов вариационного ряда изучались В. Ф. Колчиным [37], подробнее подход, применяемый в этой работе, излагается в следующем параграфе.

Новый подход к изучению асимптотических свойств множества взаимнооднозначных отображений S_n с равномерным распределением предложен в статье А. М. Вершика и А. А. Шмидта [10]. Основное отличие этого подхода от всех предшествующих состоит в том, что удастся указать пространство элементарных событий, на котором вероятностные меры, индуцируемые равномерным распределением на S_n , слабо сходятся к предельному распределению. Таким образом, предельные распределения различных характеристик случайной подстановки оказывается возможным вычислять с помощью этого предельного распределения. Опишем одно из приведенных в статье построений. Обозначим $x_i(T)$ относительную длину i -го по величине (в порядке убывания) цикла случайной подстановки T . Отображение $\{x_1(T), \dots, x_n(T), 0, 0, \dots\}$ множества S_n с равномерным распределением в множество Γ всех последовательностей $\{x_i\}$ с неотрицательными невозрастающими элементами, сумма которых равна единице, порождает на Γ вероятностное распределение ν_n . Основной результат состоит в том, что на Γ существует распределение вероятностей ν , являющееся слабым пределом для ν_n , что позволяет получить многие известные результаты о предельных распределениях различных характеристик случайных подстановок.

Большой интерес представляет изучение групповых свойств случайной подстановки T как элемента симметрической группы S_n . Исследования в этой области имеют менее законченный характер по сравнению с изложенными выше результатами, относящимися, по существу, к поведению элементов множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ при случайном отображении. Наиболее характерными в этой области являются исследования порядка $O_n(T)$ случайной подстановки T степени n . Порядок подстановки T равен общему наименьшему кратному длин циклов этой подстановки. В связи с изучением порядка Эрмита и Туран в статье [102] рассмотрели предельное поведение числа $k(T)$ циклов различной длины в случайной подстановке. В [104] этими же авторами показано, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\log O_n(T) - \frac{1}{2} \log^2 n}{\sqrt{\frac{1}{3} \log^3 n}} \leq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Локальные теоремы о числе $f_p(n)$ подстановок $T \in S_n$, имеющих простой порядок p , приведены в статьях [85, 131]. Отметим, что для максимального порядка, $G(n) = \max_{T \in S_n} O_n(T)$

справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(n)}{\sqrt{n \log n}} = 1.$$

Другое доказательство асимптотической нормальности $\log O_n(T)$ содержится в [78]. Подход, предложенный в статье [10], также позволяет получить этот результат.

Обозначим P_n вероятность того, что группа, порожденная двумя случайными подстановками из S_n , совпадает с S_n . Диксон [93] доказал, что $P_n \rightarrow 0,75$ при $n \rightarrow \infty$.

Аналогичные вопросы для элементов симметрической полугруппы всех преобразований X в себя обсуждаются в [91]. Некоторые вопросы, связанные с групповыми свойствами случайных элементов симметрической группы, обсуждаются в статьях [10, 46] и для элементов симметрической полугруппы — в статьях [44, 45, 46, 109, 113].

Значительные трудности возникают при попытке рассмотреть классы отображений с распределениями, отличными от равномерного. Отметим в этом направлении статью В. Е. Степанова [57], где изучаются случайные отображения, в которых одна из вершин отличается от остальных и является притягивающим центром: образы точек x_i , $i = 1, \dots, n$, при случайном отображении T множества $X = (x_1, \dots, x_n)$ в себя выбираются в соответствии с распределением

$$P\{Tx_i = x_n\} = \frac{\lambda}{n + \lambda - 1}, \quad P\{Tx_i = x_j\} = \frac{1}{n + \lambda - 1}, \\ j = 1, \dots, n - 1, \quad \lambda \geq 1.$$

Изучаются различные характеристики случайного отображения из этого класса. Например, если $n \rightarrow \infty$ и $\frac{\lambda}{\sqrt{n}} \rightarrow \infty$,

то вероятность неразложимости T равна $\frac{\lambda}{n + \lambda} (1 + o(1))$.

§ 4. ЕЩЕ ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАЗМЕЩЕНИИ ЧАСТИЦ И СЛУЧАЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Если в схеме размещения частиц по ячейкам не требовать, чтобы заполнения ячеек могли быть получены путем последовательного размещения частиц с простыми вероятностными связями между последовательными размещениями, то естественно назвать обобщенной схемой размещения n частиц по N ячейкам любой набор N целочисленных неотрицательных случайных величин η_1, \dots, η_N таких, что $\eta_1 + \dots + \eta_N = n$,

и интерпретировать η_i как число частиц в ячейке с номером i . В равновероятной схеме размещения частиц

$$P\{\eta_i = k_i, i = 1, \dots, N\} = \frac{n!}{N^n k_1! \dots k_N!}, \quad (3.2)$$

$$k_1 + \dots + k_N = n,$$

и случайные величины $\mu_r(n, N)$, обычно изучаемые в этой схеме, в пределе имеют либо распределение Пуассона, либо нормальное распределение. В обобщенной схеме интересно было бы выяснить, от каких свойств совместного распределения величин η_1, \dots, η_N зависят асимптотические свойства $\mu_r(n, N)$. В статье В. Ф. Колчина [35] с этой точки зрения рассмотрен случай, когда

$$P\{\eta_i = k_i, i = 1, \dots, N\} = P\{\xi_i = k_i, i = 1, \dots, N \mid \xi_1 + \dots + \xi_N = n\}, \quad (3.3)$$

где ξ_1, \dots, ξ_N — независимые одинаково распределенные целочисленные неотрицательные случайные величины. Если в качестве их общего распределения взять закон Пуассона, то распределение (3.3) совпадает с полиномиальным распределением (3.2) и мы получаем равновероятную схему размещения частиц по ячейкам. В классе обобщенных задач размещения с распределением (3.3)

$$P\{\mu_r(n, N) = k\} = C_N^k p_r^k (1 - p_r)^{N-k} \frac{P\{\xi_1^{(r)} + \dots + \xi_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{P\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\}},$$

где $p_r = P\{\xi_1 = r\}$, а $P\{\xi_i^{(r)} = k\} = P\{\xi_i = k \mid \xi_i \neq r\}$ и $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_N^{(r)}$ независимы и одинаково распределены. Таким образом, изучение случайных величин $\mu_r(n, N)$ сводится к получению локальных теорем для сумм независимых целочисленных величин в схеме серий. Этот подход реализован в статье [35] для обобщенной и обычной равновероятной схем размещения частиц по ячейкам.

Представление (3.3) полиномиального распределения в виде условного распределения независимых пуассоновских величин с фиксированной суммой использовано в [96] для изучения обратных задач размещения частиц, в [36] — для изучения крайних членов вариационного ряда в равновероятной полиномиальной схеме, в [145] — для изучения статистики χ^2 , а в [38] — для получения локальной предельной теоремы для статистики

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \eta_i (\eta_i - 1)$$

в полиномиальной схеме.

В связи с представлением полиномиального распределения в виде условного распределения представляет интерес подход, изложенный в статье Стека [145]. В этой статье изучаются общие условия сходимости условных распределений случайных величин ξ_n при фиксированных значениях случайных величин η_n в случае, когда совместное распределение (ξ_n, η_n) слабо сходится к предельному. Упомянутые выше результаты о предельном поведении статистики χ^2 в полиномиальной схеме, когда $n, N \rightarrow \infty$, являются следствием общей теории, развитой в этой статье. В связи с задачей о сходимости условных распределений, упомянем статьи И. И. Гихмана [17, 18], Дуосса и Карлина [97] и цикл статей Лиггетта [127, 128, 129], в которых изучается сходимость условных распределений последовательных сумм независимых случайных величин.

В статье В. Ф. Колчина [37] рассмотрен класс обобщенных схем размещения частиц по ячейкам со случайным числом ячеек. В этот класс включаются некоторые задачи о случайных отображениях: роль ячеек играют компоненты графа G_T случайного отображения T , роль частиц — вершины этого графа.

Рассмотрим случайное отображение $T \in \mathfrak{M}_n(R)$, где ограничения R таковы, что они выполняются для всего графа G_T , если они выполняются для каждой его компоненты. Заметим, что ограничения R , налагаемые на структуру графа G_T в статьях [21, 44—47, 56], обладают этим свойством: их выполнение достаточно проверить для каждой компоненты графа G_T . Обозначим $I_n(R)$ число связных графов с n вершинами, обладающих свойством R . Тогда

$$P\{\mu_r^{(n)} = k_r, r = 1, \dots, n\} = \frac{n!}{M_n(R)} \prod_{r=1}^n \frac{I_r^{k_r}(R)}{(r!)^{k_r} k_r!}, \quad (3.4)$$

где $\mu_r^{(n)}$ — число компонент с r вершинами и целые неотрицательные k_1, \dots, k_n таковы, что $\sum_{r=1}^n r k_r = n$. Рассмотрим обобщенную схему размещения частиц со случайным числом ν_n ячеек, в которой ξ_1, \dots, ξ_N из (3.3) независимы и одинаково-распределены,

$$P\{\xi_1 = k\} = \frac{I_k(R) x^k}{k! A(x)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(R) x^n}{n!}, \quad x - \text{параметр, } 0 < x < 1, \text{ и}$$

$$P\{\nu_n = N\} = \frac{P\{\xi_1 + \dots + \xi_N = n\} n! A^N(x)}{N! x^N M_n(R)}, \quad (3.6)$$

Тогда совместное распределение случайных величин $\mu_1(n, \nu_n), \dots, \mu_n(n, \nu_n)$ в этой схеме совпадает с совместным распределением (3.4) случайных величин $\mu_1^{(n)}, \dots, \mu_n^{(n)}$; при этом ν_n есть число компонент случайного отображения $T \in \mathfrak{M}_n(R)$. Этот подход проведен в [37] при исследовании цикловой структуры подстановок. Получена локальная теорема для числа циклов и показано, что средние члены вариационного ряда длин циклов имеют логарифмически нормальное распределение. В этом случае в представлении (3.5) и (3.6) $M_n(R) = n!$, $A(x) = -\log(1-x)$ и случайные величины ξ_1, \dots, ξ_N в (3.3) имеют распределение логарифмического ряда. Другие классы случайных отображений также допускают представления с помощью этой схемы, так для класса \mathfrak{M}_n всех однозначных отображений [91, 110, 122] $M_n(R) = n^n$ и $A(x) = \log \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!}$.

§ 5. СЛУЧАЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И РАЗБИЕНИЯ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

Рассмотрим класс S_n взаимно однозначных отображений множества $X = \{1, 2, \dots, n\}$ на себя. Если каждый элемент множества X обладает ровно одним из r признаков, то X естественным образом разбивается на r множеств.

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_r, \quad (3.7)$$

где $X_i \cap X_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Случайным $R(x_1, \dots, x_r)$ -разбиением назовем разбиение, с равными вероятностями выбираемое из класса $R(x_1, \dots, x_r)$ всех разбиений (3.7), в которых мощность X_i равна x_i , $i = 1, \dots, r$. Случайным $T(z_1, \dots, z_m)$ -отображением назовем отображение, с равными вероятностями выбираемое из класса $T(z_1, \dots, z_m)$ взаимно однозначных отображений X на себя, циклы которых имеют длины $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_m$. Для случайного $T(z_1, \dots, z_m)$ -отображения T и случайного $R(x_1, \dots, x_r)$ -разбиения $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_r$ положим

$$\xi_{i,j} = N(TX_i \cap X_j),$$

где $N(A)$ — число элементов множества A . Матрицу $E = \|\xi_{i,j}\|$, $i, j = 1, \dots, r$, назовем случайной $(T(z_1, \dots, z_m), R(x_1, \dots, x_r))$ -матрицей. Обозначим $K = \|k_{i,j}\|$ матрицу с неотрицательными целыми элементами $k_{i,j}$, удовлетворяющими условиям $\sum_{j=1}^r k_{i,j} = x_i$, $\sum_{i=1}^r k_{i,j} = x_j$.

В статье Б. А. Севастьянова [50] найден закон распределения случайной $(T(z_1, \dots, z_m), R(x_1, \dots, x_r))$ -матрицы,

В частности, показано, что закон распределения случайной $(T(n), R(x_1, \dots, x_r))$ -матрицы выражается следующей формулой:

$$P\{\Xi = K\} = \frac{\prod_{l=1}^r x_l (x_l - 1)!}{(n-1)! \prod_{i,j=1}^r k_{ij}!} \Delta_r, \quad (3.8)$$

где Δ_r — определитель матрицы $\|x_i \delta_{ij} - k_{ij}\|$, $i, j = 1, \dots, r-1$; $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ii} = 1$. В статье приведены также выражения для факториальных моментов случайных величин ξ_{ij} . В этой статье отмечено интересное свойство распределения случайной $(T(z_1, \dots, z_m), R(x_1, \dots, x_r))$ -матрицы. Для любых отображения $T^* \in T(z_1, \dots, z_m)$ и разбиения $R^* \in R(x_1, \dots, x_r)$

$$P\{\Xi = K\} = P\{\Xi = K | T = T^*\} = P\{\Xi = K | R = R^*\}.$$

Взяв в качестве T^* подстановку

$$T^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix},$$

замечаем, что распределение (3.8) случайной матрицы Ξ связано со случайным размещением r групп элементов X_1, \dots, X_r в n равноотстоящих точках окружности, величина ξ_{ij} равна числу элементов множества X_i , за которыми при движении по окружности в фиксированном направлении расположены элементы из X_j . Серии элементов одного типа при случайном размещении на окружности изучались в [69]. Случайные величины типа ξ_{ij} при расположении элементов двух типов в целых точках отрезка прямой рассматривались в статьях [146] и [148]; формула для распределения Ξ при расположении n элементов r типов в целых точках отрезка прямой приводилась в [151]. В статье Н. В. Смирнова, О. В. Сарманова и В. К. Захарова [55] приведено доказательство этой формулы. Число цепочек длины n , составленных из элементов r типов с k_{ij} элементами типа j , следующими за элементами типа i , использовано в этой работе для доказательства локальной предельной теоремы для чисел переходов в цепи Маркова с r состояниями.

В [43] О. В. Сарманов и В. К. Захаров, опираясь на результаты работы [55], указали решение задачи Н. В. Смирнова о числе $M^{(n)}(x_1, \dots, x_r)$ способов расположения элементов множеств X_1, \dots, X_r в цепочку, при которых $\xi_{ii} = 0$, $i = 1, \dots, r$. Эта задача рассматривалась в ряде последующих

работ. В [65, 79, 99] рассматриваются частные случаи задачи Н. В. Смирнова, в [125] найдено выражение для производящей функции

$$\sum_{\{x_1, \dots, x_r\}} M^{(n)}(x_1, \dots, x_r) z_1^{x_1} \dots z_r^{x_r} = \sum_{i=1}^r \frac{z_i}{1+z_i} \left| \left(1 - \sum_{i=1}^r \frac{z_i}{1+z_i} \right) \right|.$$

Формула (3.8) для распределения случайной матрицы \mathbb{E} используется в некоторых задачах математической статистики [15, 50, 146, 148]. Рассмотрим одну из таких задач. Пусть a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n — числовые последовательности и

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

— случайная подстановка со значениями из множества S_n подстановок степени n . Некоторые задачи теории ранговых критериев [15] приводят к изучению случайной величины

$$\eta_n = \sum_{i=1}^n a_i b_{t_i}.$$

Первые результаты об асимптотической нормальности статистики η_n в случае, когда T с равными вероятностями выбирается из множества всех подстановок степени n , получены методом моментов Вальдом и Вольфовицем [149]. Ослабление условий Вальда и Вольфовица и некоторые обобщения приведены в статьях [95, 105, 115]. Доказательства асимптотической нормальности η_n в этих работах опирались на метод моментов и использовали излишне сильные предположения относительно последовательностей a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_n . В работе Мотоо [133] для асимптотической нормальности η_n получено условие типа Линдберга. Гаек [15, 107] показал, что это условие типа Линдберга:

$$\frac{1}{n} \sum_{|b_{ij}| > \tau} \delta_{ij}^2 \rightarrow 0 \text{ для любого } \tau > 0,$$

где

$$\delta_{ij} = \frac{(a_i - \bar{a})(b_j - \bar{b})}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 \sum_{i=1}^n (b_i - \bar{b})^2 \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.9)$$

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \quad \bar{b} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i.$$

является необходимым и достаточным условием асимптотической нормальности η_n , когда при $n \rightarrow \infty$ выполнены условия бесконечной малости слагаемых

$$\frac{\max_{1 \leq l \leq n} (a_l - \bar{a})^2}{\sum_{l=1}^n (a_l - \bar{a})^2} \rightarrow 0, \quad \frac{\max_{1 \leq l \leq n} (b_l - \bar{b})^2}{\sum_{l=1}^n (b_l - \bar{b})^2} \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

Метод доказательства основан на аппроксимации η_n специальной суммой независимых случайных величин. В [39] предложен подход к изучению асимптотического поведения η_n , опирающийся на точное распределение случайной матрицы \tilde{E} . Для асимптотической нормальности η_n получены достаточные условия типа Ляпунова.

Несмотря на то, что полученное Гаеком условие (3.9) является необходимым и достаточным для асимптотической нормальности η_n , изучение статистик типа η_n нельзя считать законченным, так как условие типа Линдеберга является необходимым лишь при выполнении условий (3.10) бесконечной малости слагаемых. Кроме того, представляют интерес условия асимптотической нормальности в случаях, когда подстановка T выбирается из некоторых подклассов S_n . Подход, предложенный в статье [39], позволяет, опираясь на результаты Б. А. Севастьянова [50] о распределении случайной $(T(n), R(x_1, \dots, x_r))$ -матрицы, установить условие асимптотической нормальности η_n в случае, когда T с равными вероятностями выбирается из класса подстановок, имеющих ровно один цикл.

Заметим, что в случае, когда $a_1 = \dots = a_k = 1, a_{k+1} = \dots = a_n = 0$, случайная величина $\eta_n = \sum_{l=1}^n a_l b_{l_l} = \sum_{l=1}^k b_{l_l}$ есть

сумма элементов выборки без возвращения объема k из генеральной совокупности (b_1, \dots, b_n) . Исследования этой суммы проводились в статьях, посвященных выборкам из конечных популяций [108, 140].

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Балакин Г. В., О случайных матрицах. Теория вероятностей и ее применения, 1967, 12, № 2, 346—353 (РЖМат, 1968, 7В21)
2. —, Распределение ранга случайных матриц над конечным полем. Теория вероятностей и ее применения, 1968, 13, № 4, 631—641 (РЖМат, 1969, 4В33)
3. Беляев П. Ф., О вероятности неоявления заданного числа исходов. Теория вероятностей и ее применения, 1964, 9, № 3, 541—547 (РЖМат, 1965, 2В61)
4. —, О вероятности неоявления заданного числа s -цепочек в сложных цепях Маркова. Теория вероятностей и ее применения, 1965, 10, № 3, 547—551 (РЖМат, 1966, 1В46)

5. — , О совместном распределении частот длинных z -цепочек в мультиномиальной схеме с равновероятными исходами. Теория вероятностей и её применения, 1969, 14, № 3, 540—546 (РЖМат, 1970, 5В30)
6. — , О распределении статистики наиболее мощного критерия для двух простых гипотез в сложных цепях Маркова. Теория вероятностей и её применения, 1967, 12, № 4, 741—746 (РЖМат, 1968, 5В85)
7. **Болотников Ю. В.**, Сходимость к гауссовскому и пуассоновскому процессам величин $\mu_r(n)$ в классической задаче о дробинках. Теория вероятностей и её применения, 1968, 13, № 1, 39—50 (РЖМат, 1968, 11В40)
8. — , Сходимость к гауссовскому процессу числа пустых ячеек в классической задаче размещения частиц по ячейкам. Мат. заметки, 1968, 4, № 1, 97—103 (РЖМат, 1969, 1В36)
9. — , Предельные процессы в неравновероятной схеме размещения частиц по ячейкам. Теория вероятностей и её применения, 1968, 13, № 3, 534—542 (РЖМат, 1969, 8В19)
10. **Вершик А. М., Шмидт А. А.**, Симметрические группы высокой степени. Докл. АН СССР, 1972, 206, № 2, 269—272 (РЖМат, 1973, 3В38)
11. **Викторова И. И.**, Об асимптотическом поведении максимума в равновероятной полиномиальной схеме. Мат. заметки, 1969, 5, № 3, 305—316 (РЖМат, 1969, 8В8)
12. — , **Севастьянов Б. А.**, О предельном поведении максимума в полиномиальной схеме. Мат. заметки, 1967, 1, № 3, 331—338 (РЖМат, 1967, 10В23)
13. — , **Чистяков В. П.**, Некоторые обобщения критерия пустых ящиков. Теория вероятностей и её применения, 1966, 11, № 2, 306—313 (РЖМат, 1967, 2В104)
14. — , — , Асимптотическая нормальность в задаче о дробинках с произвольными вероятностями попадания в ящики. Теория вероятностей и её применения, 1965, 10, № 1, 162—167 (РЖМат, 1965, 8В17)
15. **Гаек Я., Шидак З.**, Теория ранговых критериев. Перев. с англ. М., «Наука», 1971, 376 с. (РЖМат, 1972, 3В163К)
16. **Галушкин А. И., Тюхов Б. П., Чигринов В. Г.**, О сходимости одного метода случайного поиска при отыскании локальных и глобального экстремумов многоэкстремальной функции. Тр. Моск. ин-та электрон. машиностр., 1971, вып. 23, 205—209 (РЖМат, 1972, 5В208)
17. **Гихман И. И.**, Некоторые предельные теоремы для условных распределений. Докл. АН СССР, 1953, 91, № 5, 1003—1006 (РЖМат, 1954, 3020)
18. — , О некоторых предельных теоремах для условных распределений и о связанных с ними задачах математической статистики. Укр. мат. ж., 1953, 5, № 4, 413—433 (РЖМат, 1955, 1870)
19. **Гончаров В. Л.**, О распределении циклов в перестановках. Докл. АН СССР, 1942, 35, № 9, 299—301
20. — , Из области комбинаторики. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1944, 8, № 1, 3—48
21. **Грушо А. А.**, Случайные отображения ограниченной кратности. Теория вероятностей и её применения, 1972, 17, № 3, 440—449 (РЖМат, 1972, 11В30)
22. **Иванков С. А.**, О числе повторений в цепях Маркова. Теория вероятностей и её применения, 1965, 10, № 3, 557—560 (РЖМат, 1966, 1В47)
23. **Ивченко Г. И.**, О предельных распределениях порядковых статистик полиномиальной схемы. Теория вероятностей и её применения, 1971, 16, № 1, 94—107 (РЖМат, 1971, 9В76)
24. — , Предельные теоремы в задаче о размещении. Теория вероятностей и её применения, 1971, 16, № 2, 292—305 (РЖМат, 1971, 11В60)
25. — , **Медведев Ю. И.**, Некоторые многомерные теоремы в классической задаче о размещении. Теория вероятностей и её применения, 1965, 10, № 1, 156—162 (РЖМат, 1965, 7В20)

26. —, —, Асимптотическое поведение числа комплектов частиц в классической задаче о размещении. Теория вероятностей и её применения, 1966, 11, № 4, 701—708 (РЖМат, 1967, 4В22)
27. —, —, Севастьянов Б. А., Размещение случайного числа частиц по ячейкам. Мат. заметки, 1967, 1, № 5, 549—554 (РЖМат, 1968, 6В17)
28. Коваленко И. Н., Об одной предельной теореме для определителей в классе булевых функций. Докл. АН СССР, 1965, 161, № 3, 517—519 (РЖМат, 1965, 8В18)
29. —, О распределении линейного ранга случайной матрицы. Теория вероятностей и её применения, 1972, 17, № 2, 354—359 (РЖМат, 1972, 9В15)
30. —, О предельном распределении числа решений случайной системы линейных уравнений в классе булевых функций. Теория вероятностей и её применения, 1967, 12, № 1, 51—61 (РЖМат, 1968, 2В41)
31. Козлов М. В., О ранге матриц со случайными булевыми элементами. Докл. АН СССР, 1966, 169, № 5, 1013—1016 (РЖМат, 1966, 12В12)
32. —, Предельная теорема для одной характеристики случайной булевой матрицы. Теория вероятностей и её применения, 1971, 16, № 1, 83—93 (РЖМат, 1971, 9В75)
33. Колчин В. Ф., Скорость приближения к предельным распределениям в классической задаче о дробинках. Теория вероятностей и её применения, 1966, 11, № 1, 144—156 (РЖМат, 1966, 11В15)
34. —, Один случай равномерных локальных предельных теорем с переменной решеткой в классической задаче о дробинках. Теория вероятностей и её применения, 1967, 12, № 1, 62—72 (РЖМат, 1967, 9В29)
35. —, Один класс предельных теорем для условных распределений. Liet. mat. rinkiny, Лит. мат. сб., 1968, 8, № 1, 53—63 (РЖМат, 1969, 4В20)
36. —, О предельном поведении крайних членов вариационного ряда в полиномиальной схеме. Теория вероятностей и её применения, 1969, 14, № 3, 476—487 (РЖМат, 1970, 4В26)
37. —, Одна задача о размещении частиц по ячейкам и циклы случайных подстановок. Теория вероятностей и её применения, 1971, 16, № 1, 67—82 (РЖМат, 1971, 6В39)
38. —, О распределении одной статистики в полиномиальной схеме. Тр. Моск. ин-та электрон. машиностр., 1972, вып. 32
39. —, Чистяков В. П., Об одной комбинаторной предельной теореме. Теория вероятностей и её применения, 1973, 18, № 4, 767—777
40. —, —, Новые предельные распределения в задаче о размещении. Тр. Моск. ин-та электрон. машиностр., 1972, вып. 32
41. Медведев Ю. И., Некоторые теоремы об асимптотическом распределении статистики χ^2 . Докл. АН СССР, 1970, 192, № 5, 987—989 (РЖМат, 1970, 11В19)
42. Попова Т. Ю., Предельные теоремы в одной модели размещения частиц двух типов. Теория вероятностей и её применения, 1968, 13, № 3, 542—548 (РЖМат, 1969, 8В20)
43. Сарманов О. В., Захаров В. К., Комбинаторная задача Н. В. Смирнова. Докл. АН СССР, 1967, 176, № 3, 530—532 (РЖМат, 1968, 4В11)
44. Сачков В. Н., Асимптотическая нормальность распределения числа циклических элементов идемпотентов симметрической полугруппы. Тр. Моск. ин-та электрон. машиностр., 1971, вып. 14, 180—190 (РЖМат, 1971, 10В31)
45. —, Распределение числа неподвижных точек элементов симметрической полугруппы с условием $\sigma^{h+1} = \sigma^h$ и число деревьев высоты, не превосходящей h . Теория вероятностей и её применения, 1971, 16, № 4, 676—687 (РЖМат, 1972, 3В19)
46. —, Отображения конечного множества с ограничениями на контуры и высоту. Теория вероятностей и её применения, 1972, 17, № 4, 679—694 (РЖМат, 1973, 4В55)

47. — , Случайные отображения ограниченной высоты. Теория вероятностей и её применения, 1973, 18, № 1, 122—132 (РЖМат, 1973, 6В8)
48. Севастьянов Б. А., Предельные теоремы в одной схеме размещения частиц по ячейкам. Теория вероятностей и её применения, 1966, 11, № 4, 696—700 (РЖМат, 1967, 4В21)
49. — , Сходимость к гауссовскому и пуассоновскому процессам распределения числа пустых ящиков в классической задаче о дробинках. Теория вероятностей и её применения, 1967, 12, № 1, 144—154 (РЖМат, 1967, 9В30)
50. — , Случайные отображения и разбиения конечных множеств. Теория вероятностей и её применения, 1972, 17, № 1, 129—142 (РЖМат, 1972, 5В12)
51. — , Критерий «пустых ящиков» и его обобщения. Тбилисис университети გამოკხენები მათემატიკის ინსტიტუტი. შრომები, ტრ. ინ-ტ прикл. матем. Тбилисск. ун-та, 1969, № 2, 229—233 (РЖМат, 1970, 6В154)
52. — , Предельный закон Пуассона в схеме сумм независимых случайных величин. Теория вероятностей и её применения, 1972, 17, № 4, 733—738 (РЖМат, 1973, 4В53)
53. — , Чистяков В. П., Асимптотическая нормальность в классической задаче о дробинках. Теория вероятностей и её применения, 1964, 9, № 2, 223—237 (РЖМат, 1965, 3В15)
54. — , — , Письмо в редакцию (по поводу статьи «Асимптотическая нормальность в классической задаче о дробинках»). Теория вероятностей и её применения, 1964, 9, № 3, 568 (РЖМат, 1965, 3В16)
55. Смирнов Н. В., Сарманов О. В., Захаров В. К., Локальная предельная теорема для чисел переходов в цепи Маркова и её применения. Докл. АН СССР, 1966, 167, № 6, 1238—1241 (РЖМат, 1966, 9В39)
56. Степанов В. Е., Предельные распределения некоторых характеристик случайных отображений. Теория вероятностей и её применения, 1969, 14, № 4, 639—653 (РЖМат, 1970, 8В38)
57. — , Случайные отображения с одним притягивающим центром. Теория вероятностей и её применения, 1971, 16, № 1, 148—157 (РЖМат, 1971, 10В30)
58. Такач Л., Комбинаторные методы в теории случайных процессов. Перев. с англ. М., «Мир», 1971, 264 стр. (РЖМат, 1971, 7В65К)
59. Трахтенброт Б. А., Бардзинь Я. М., Конечные автоматы. (Поведение и синтез). М., «Наука», 1970, 400 стр. (РЖМат, 1970, 9В330К)
60. Тумаян С. Х., Асимптотическое распределение критерия χ^2 при одновременном возрастании объема наблюдений и числа групп. Теория вероятностей и её применения, 1956, 1, № 1, 131—145 (РЖМат, 1957, 5013)
61. — , Об асимптотическом распределении критерия χ^2 . Докл. АН СССР, 1954, 94, № 6, 1011—1012 (РЖМат, 1954, 4862)
62. Чистяков В. П., К обоснованию вычисления мощности критерия пустых ящиков. Теория вероятностей и её применения, 1964, 9, № 4, 718—724 (РЖМат, 1965, 6В81)
63. — , Дискретные предельные распределения в задачах о дробинках с произвольными вероятностями попадания в ящики. Мат. заметки, 1967, 1, № 1, 9—16 (РЖМат, 1967, 8В15)
64. Ailam G., The asymptotic distribution of the measure of random sets and application to the classical occupancy problem and suggestion for curve fitting. Ann. Math. Stat., 1970, 41, № 2, 427—439 (РЖМат, 1971, 12В72)
65. Alter R., Lientz B. P., Applications of a generalized combinatorial problem of Smirnov. Nav. Res. Log. Quart., 1969, 16, № 4, 543—547 (РЖМат, 1970, 11В266)
66. Balakrishnan V., Sankaranarayanan G., Suyambulingom C., Ordered cycle lengths in a random permutation. Pacif. J. Math., 1971, 36, № 3, 603—613 (РЖМат, 1972, 1В4)

67. **Barton D. E., David F. N.**, Sequential occupancy. *Biometrika*, 1959 46, № 1-2, 218—223 (PЖMar, 1960, 9219)
68. —, —, A collector's problem. *Trab. estadist.*, 1959, 10, № 2, 75—88 (PЖMar, 1961, 3B9)
69. —, —, Runs in a ring. *Biometrika*, 1958, 45, № 3-4, 572—578 (PЖMar, 1959, 11268)
70. —, —, Sequential occupancy with classification. *Biometrika*, 1968, 55, № 1, 229—241 (PЖMar, 1969, 4B11)
71. —, —, Combinatorial chance. London, Griffin, 1962
72. **Baum L. E., Billingsley P.**, Asymptotic distributions for the coupon collector's problem. *Ann. Math. Stat.*, 1965, 36, № 6, 1835—1839 (PЖMar, 1967, 4B23)
73. **Békéssy A.**, Egy elosztási problémára vonatkozó határeloszlástétel új bizonyítása. *Magy. tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl.*, 1962, 12, № 4, 329—334 (PЖMar, 1964, 7B45)
74. —, On classical occupancy problems. I. *Magy. tud. akad. Mat. kutató int. közl.*, 1963, 8, № 1-2, 59—71 (PЖMar, 1964, 8B36)
75. —, On classical occupancy problems. II. (Sequential occupancy). *Magy. tud. akad. Mat. kutató int. közl.*, 1964, 9, № 1-2, 133—141 (PЖMar, 1965, 7B19)
76. —, A lottójátékkal kapcsolatos néhány cellabetöltési problémáról. I. *Mat. lapok*, 1964, 15, № 4, 317—329 (PЖMar, 1966, 5B22)
77. —, A lottójátékkal kapcsolatos néhány cellabetöltési problémáról. II. *Mat. lapok*, 1965, 16, № 1-2, 57—66 (PЖMar, 1966, 7B27)
78. **Best M. R.**, The distribution of some variables on a symmetric groups. *Proc. Kon. ned. akad. wetensch.*, 1970, A73, № 5, 385—402; *Indag. math.*, 1970, A32, № 5, 385—402 (PЖMar, 1971, 7B62)
79. **Bhaskarananda C. N.**, A problem in arrangement. *Math. Stud.*, 1968 (1969), 36, № 1-4, 237—239 (PЖMar, 1971, 1B266)
80. **Billingsley P.**, Convergence of probability measures. New York, Wiley, 1968, XII, 253-pp. (PЖMar, 1970, 9B15)
81. **Blyth C. R., Curme G. L.**, Estimation of a parameter in the classical occupancy problem. *Biometrika*, 1960, 47, № 1-2, 180—185 (PЖMar, 1961, 5B32)
82. **Brayton R. K.**, On the asymptotic behavior of the number of trials necessary to complete a set with random selection. *J. Math. Anal. and Appl.*, 1963, 7, № 1, 31—61 (PЖMar, 1964, 4B4)
83. **Castoldi L.**, Attorno a un problema probabilistico di occupazione. *Atti Accad. Ligure*, 1954 (1955), 11, 119—126 (PЖMar, 1962, 1B8)
84. **Chartier F.**, Le problème du collectionneur. *Rev. statist. appl.*, 1959, 7, № 1, 63—82 (PЖMar, 1960, 3257)
85. **Chowla S., Herstein I. N., Moore K.**, On recursions with symmetric groups. *Can. J. Math.*, 1951, 3, 328—334
86. **Csorgo M., Guttman I.**, On the consistency of the two-sample empty cell test. *Can. Math. Bull.*, 1964, 7, № 1, 57—63 (PЖMar, 1964, 12B105)
87. —, —, On the empty cell test. *Technometrics*, 1962, 4, № 2, 235—247 (PЖMar, 1964, 7B229)
88. **Dacey M. F.**, A hypergeometric family of discrete probability distributions: properties and applications to location models. *Geogr. Anal.*, 1969, 1, № 3, 283—317 (PЖMar, 1970, 5B8)
89. **Darling D. A.**, Some limit theorems associated with multinomial trials. *Proc. 5th Berkeley Simpos. Math. Statist. and Probabil.*, 1965—1966, Vol. 2, Part 1. Berkeley—Los Angeles, 1967, 345—350 (PЖMar, 1970, 3B24)
90. **Decomps B., Kastler A.**, Répartition de N particules entre g cellules. Loi des fluctuations. *C. r. Acad. sci.*, 1963, 256, № 5, 1087—1089 (PЖMar, 1963, 11B214)
91. **Dénes J.**, Some combinatorial properties of transformations and their

- connections with the theory of graphs. *J. Combin. Theory*, 1970, 9, № 2, 108—116 (PJKMar, 1971, 4B410)
92. Denning P. J., Schwartz S. C., Properties of the working set model. Princeton Univ. Dep. Elec. Eng. Comput. Sci. Lab. Tech. Rept., 1970, № 93, 34 pp. (PJKMar, 1972, 1B446)
 93. Dixon D., The probability of generating the symmetric group. *Math. Z.*, 1969, 110, № 3, 199—205 (PJKMar, 1970, 3B262)
 94. Driml M., Ullrich M., Maximum likelihood estimate of the number of types. *Acta techn. ČSAV*, 1967, 12, № 3, 300—303 (PJKMar, 1968, 8B94)
 95. Dwass M., The large-sample power of rank order tests in the two-sample problem. *Ann. Math. Stat.*, 1956, 27, № 2, 352—374 (PJKMar, 1959, 4989)
 96. —, More birthday surprises. *J. Combin. Theory*, 1969, 7, № 3, 258—261 (PJKMar, 1970, 7B33)
 97. —, Karlin S., Conditioned limit theorems. *Ann. Math. Stat.*, 1963, 34, № 4, 1147—1167 (PJKMar, 1965, 1B16)
 98. Eicker P. J., Siddiqui M. M., Mielke P. W., Jr., A matrix occupancy problem. *Ann. Math. Stat.*, 1972, 43, № 3, 988—996 (PJKMar, 1972, 12B25)
 99. Eifer L. Q., Reid K. B., Jr., Roselle D. P., Sequences with adjacent elements unequal. *Aequat. math.*, 1971, 6, № 2-3, 256—262 (PJKMar, 1972, 3B248)
 100. Erdős P., Rényi A., On a classical problem of probability theory. *Magy. tud. akad. Mat. kutató int. közl.*, 1961, 6, № 1-2, 215—220 (PJKMar, 1962, 6B2)
 101. —, —, On random matrices. *Magy. tud. akad. Mat. kutató int. közl.*, 1963 (1964), 8, № 3, 455—461 (PJKMar, 1965, 3B19)
 102. —, Turan P., On some problems of a statistical group-theory. I. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1965, 4, № 2, 175—186 (PJKMar, 1966, 6B18)
 103. —, —, On some problems of a statistical group-theory. II. *Acta math. Acad. sci. hung.*, 1967, 8, № 1-2, 151—163 (PJKMar, 1968, 10B50)
 104. —, —, On some problems of a statistical group-theory. III. *Acta math. Acad. sci. hung.*, 1967, 18, № 3-4, 309—320 (PJKMar, 1969, 1B40)
 105. Fraser D. A. S., A vector form of the Wald—Wolfowitz—Hoeffding theorem. *Ann. Math. Stat.*, 1956, 27, № 2, 540—543 (PJKMar, 1958, 528)
 106. Golomb S. W., Random permutations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1964, 70, № 6, 747
 107. Hájek J., Some extensions of Wald—Wolfowitz—Noether theorem. *Ann. Math. Stat.*, 1961, 32, № 2, 506—523 (PJKMar, 1962, 8B55)
 108. —, Limiting distributions in simple random sampling from a finite population. *Magy. tud. akad. Mat. kutató int. közl.*, 1960, 5, № 3, 361—374 (PJKMar, 1961, 10B17)
 109. Harris B., A note on the number of idempotent elements in symmetric semigroups. *Amer. Math. Mon.*, 1967, 74, № 10, 1234—1235 (PJKMar, 1968, 7A226)
 110. —, Probability distributions related to random mappings. *Ann. Math. Stat.*, 1960, 31, № 4, 1045—1062 (PJKMar, 1961, 12B12)
 111. —, Park C. J., The distribution of linear combinations of the sample occupancy numbers. *Proc. Kon. ned. akad. wetensch.*, 1971, A74, № 2, 121—134; *Indag. math.*, 1971, 33, № 2, 121—134 (PJKMar, 1971, 12B69)
 112. —, —, The limiting distribution of the sample occupancy numbers from the multinomial distribution with equal cell probabilities. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 1971, 23, № 1, 125—133 (PJKMar, 1971, 12B70)
 113. —, Schoenfeld L., The number of idempotent elements in symmetric semigroups. *J. Combin. Theory*, 1967, 3, № 2, 122—135 (PJKMar, 1968, 11A149)

114. Hetz W., Klinger H., Untersuchungen zur Frage der Verteilung von Objekten auf Plätze. *Metrika*, 1958, 1, № 1, 3—20 (PJKMar, 1960, 5608)
115. Hoeffding W., A combinatorial limit theorem. *Ann. Math. Stat.*, 1951, 22, № 4, 558—566
116. Holst L., A note on finding the size of a finite population. *Biometrika*, 1971, 58, № 1, 228—229 (PJKMar, 1971, 11B159)
117. —, Asymptotic normality in a generalized occupancy problem. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1972, 21, № 2, 109—120 (PJKMar, 1972, 4B16)
118. —, Limit theorems for some occupancy and sequential occupancy problems. *Ann. Math. Stat.*, 1971, 42, № 5, 1671—1680 (PJKMar, 1972, 5B24)
119. —, Asymptotic results connected with generalisations of occupancy problems. *Acta Univ. Upsal. Abstrs Uppsala Diss. Fac. Sci.*, 1972, № 198, 12 pp. (PJKMar, 1972, 11B101)
120. Hubert J., Narayana T. V., A note on the birthday problem. *Bull. Inst. politehn. Iasi*, 1969, 15, № 1-2, 1/113—1/118 (PJKMar, 1970, 10B3)
121. Karlin S., Central limit theorems for certain infinite urn schemes. *J. Math. and Mech.*, 1967, 17, № 4, 373—401 (PJKMar, 1968, 7B19)
122. Katz L., Probability of indecomposability of a random mapping function. *Ann. Math. Stat.*, 1953, 26, № 3, 512—517 (PJKMar, 1956, 8976)
123. Kitabatake Satoshi, A remark on a non-parametric test. *Math. Jap.*, 1958, 5, № 1, 45—49 (PJKMar, 1961, 7B50)
124. Klamkin M. S., Newman D. J., Extensions of the birthday surprise. *J. Combin. Theory*, 1967, 3, № 3, 279—282 (PJKMar, 1968, 9B242)
125. Klarner D. A., The number of Hamiltonian paths and cycles on k -colored graphs. *Proc. Kon. ned. akad. wetensch.*, 1969, A72, № 4, 384—387; *Indag. math.*, 1969, 31, № 4, 384—387 (PJKMar, 1970, 5B301)
126. Kruskal M. D., The expected number of components under a random mapping function. *Amer. Math. Mon.*, 1954, 61, № 6, 392—397 (PJKMar, 1955, 5177)
127. Liggett T. M., An invariance principle of conditioned sums of independent random variables. *J. Math. and Mech.*, 1968, 18, № 6, 559—570 (PJKMar, 1969, 12B22)
128. —, Weak convergence of conditioned sums of independent random vectors. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1970, 152, № 1, 195—213 (PJKMar, 1971, 12B45)
129. —, Convergence of sums of random variables conditioned on a future change of sign. *Ann. Math. Stat.*, 1970, 41, № 6, 1978—1982 (PJKMar, 1971, 12B46)
130. McKinney E. H., Generalized birthday problem. *Amer. Math. Mon.*, 1966, 73, № 4, 385—387 (PJKMar, 1967, 1B5)
131. Moser L., Wymann M., On the solutions of $x^d = 1$ in symmetric groups. *Can. J. Math.*, 1955, 7, № 2, 159—168 (PJKMar, 1956, 2801)
132. Mosteller F., Understanding the birthday problem. *Math. Teacher*, 1962, 55, № 5, 322—325 (PJKMar, 1963, 3B92)
133. Motoo Minoru, On the Hoeffding's combinatorial central limit theorem. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 1957, 8, № 3, 145—154 (PJKMar, 1961, 8B27)
134. Newman D. J., Shepp L., The double dixie cup problem. *Amer. Math. Mon.*, 1960, 67, № 1, 58—61 (PJKMar, 1961, 3B7)
135. Okamoto Masashi, On a non-parametric test. *Osaka J. Math.*, 1952, 4, 77—85
136. Pauše Z., On the distribution of the number of absent outcomes. *Glas. mat.*, 1967, 2, № 2, 273—276 (PJKMar, 1968, 11B30)
137. Rabin H., Sitgreaves R., Probability distributions related to random transformations of a finite set. *Tech. report № 19A. Stanford Univ., Stanford*, 1954
138. Rényi A., Three new proofs and a generalization of a theorem of Irving

- Weiss. Magy. tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1962, 7, № 1-2, 203—214 (PЖMat, 1963, 8B121)
139. Riordan J., Enumeration of linear graphs for mappings of finite sets. Ann. Math. Stat., 1962, 33, № 1, 178—185 (PЖMat, 1963, 8A130)
 140. Rosén B., Limit theorems for sampling from finite populations. Ark. mat., 1964, 5, № 5, 383—424 (PЖMat, 1965, 8B49)
 141. —, On the central limit theorem for sums of dependent random variables. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1967, 7, № 1, 48—82 (PЖMat, 1968, 7B15)
 142. —, Asymptotic normality in a coupon collector's problem. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1969, 13, № 3-4, 256—279 (PЖMat, 1970, 6B30)
 143. —, On the coupon collector's waiting time. Ann. Math. Stat., 1970, 41, № 6, 1952—1969 (PЖMat, 1971, 12B71)
 144. Shepp L. A., Lloyd S. P., Ordered cycle lengths in a random permutation. Trans. Amer. Math. Soc., 1966, 121, № 2, 340—357 (PЖMat, 1968, 2B23)
 145. Steck G. P., Limit theorems for conditional distributions. Univ. Calif. Publ. Statist., 1957, 2, № 12, 237—284 (PЖMat, 1958, 5915)
 146. Stevens W. L., Distribution of groups in sequence alternative. Ann. Eugenics, 1939, 9, 10—17
 147. Uppuluri V. R. R., Carpenter J. A., A generalization of the classical occupancy problem. J. Math. Anal. and Appl., 1971, 34, № 2, 316—324 (PЖMat, 1972, 3B6)
 148. Wald A., Wolfowitz J., On the test whether two samples are from the same population. Ann. Math. Stat., 1940, 11, № 1, 147—162
 149. —, —, Statistical tests based on permutations of the observations. Ann. Math. Stat., 1944, 15, № 4, 358—372
 150. Weiss I., Limiting distributions in some occupancy problems. Ann. Math. Stat., 1958, 29, № 3, 878—884 (PЖMat, 1959, 8237)
 151. Whittle P., Some distribution and moment formulae for the Markov chain. J. Roy. Statist. Soc., 1955, B17, № 2, 235—242 (PЖMat, 1957, 4221)
 152. Wilks S. S., A combinatorial test for the problem of two samples from continuous distributions. Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability, 1960, Vol. 1. Berkeley—Los Angeles, Univ. California Press, 1961, 707—717 (PЖMat, 1962, 12B67)
 153. Young D. H., A note on a sequential occupancy problem. Biometrika, 1968, 55, № 3, 591—593 (PЖMat, 1969, 8B21)
-