А. Р. Данилин, Регуляризация задачи управления динамической системой в гильбертовом пространстве в условиях неопределенности, *Дифференц. уравнения*, 1994, том 30, номер 1, 172–174

ЯНВАРЬ 1994 г., ТОМ 30, № 1

УДК 517.983.54:517.977.55

А. Р. ДАНИЛИН

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В работе с позиции теории некорректных задач [1—3] рассмотрена задача программного управления линейной динамической системой в гильбертовом пространстве в условиях неопределенности [4, 5]. Задачи такого типа предсталвяют собой некорректные экстремальные задачи [1, 6, 7] на множествах, заданных приближенно [7, 8]. В отличие от названных работ рассматривается другой способ задания приближений.

1. Постановка задачи и основные соотношения. Пусть управляемый динамический процесс описывается следующей линейной системой в сепарабельном гильбертовом пространстве H:

$$\begin{gathered} \dot{x}=Ax+Bu,\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ u(\cdot)\in\mathcal{U}, \\ x(0)=x_0, \end{gathered} \tag{1.1}$$

здесь B — линейный ограниченный оператор из гильбертова пространства U в H, множество допустимых управлений $\mathcal{U}\subset L_2((0,1),U)$ — ограниченное и слабо замкнутое множество, а оператор A порождает компактную самосопряженную полугруппу [9, 10].

Рассмотрим следующую задачу: найти множество всех x_0, переводимых под действием некоторого (одного для всех) управления $u(\cdot)\in\mathcal{U}$ в множество F_0 в момент времени 1: $x(1)=f\in F_0$.

В силу сформулированных условий $x_0=Tf-Gu(\cdot)$, где

$$Tf=\sum_{k=1}^{\infty}\exp(\lambda_k)(f,e_e)e_k,$$

$$Gu(\cdot)=\sum_{k=1}^{\infty}e_k\int_0^1\exp(\lambda_k t)(Bu(t),e_k)\,dt,$$

$\{e_k\}$ — ортонормированная система собственных векторов оператора A, $\{\lambda_k\}$ — соответствующие собственные числа, $\lambda_{k+1}\geqslant\lambda_k$, $\lambda_k\to+\infty$, а $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в H.

Отметим, что T — линейный неограниченный самосопряженный оператор в H, а G — линейный, вообще говоря, неограниченный секвенциально слабо замкнутый оператор из $L_2((0,1),U)$ в H.

Таким образом, если $F_0\subset D(T)$, то любое $u(\cdot)\in\mathcal{U}\cap D(G)$ порождает целое множество начальных состояний: $X_0(u(\cdot))=T(F_0)-Gu(\cdot)$.

В дальнейшем будем считать, что $F_0\subset D(T)$, $\mathcal{U}\subset D(G)$ и множество $T(F_0)$ ограничено.

В качестве критерия управления возьмем уклонение множества $X_0(u(\cdot))$ от заданного элемента $\bar{x}_0$ (затраты на реализацию начального состояния пропорциональны отклонению от «естественного» начального состояния $\bar{x}_0$), т. е. функционал качества определим следующим образом:

$$J(u(\cdot))=\Phi(Gu(\cdot))=\sup\{\|Tf-Gu(\cdot)-\bar{x}_0\|:f\in F_0\}. \tag{1.2}$$

Учитывая выпуклость и полунепрерывность снизу относительно слабой топологии в H функционала Φ, получим, что задача оптимального управления

$$\operatorname{Arg\,min}\{J(u(\cdot)):u(\cdot)\in\mathcal{U}\} \tag{1.3}$$

разрешима. При этом если G взаимно однозначно, а $\mathcal{U}$ выпукло, то решение задачи (1.3) единственно.

Обозначим множество решений задачи (1.3) через $\mathcal{U}_0$. Отметим, что если $\mathcal{U}$ выпукло, то $\mathcal{U}_0$ выпукло и замкнуто.

Пусть теперь вместо F_0 нам известно множество $F_\delta: d(F_0, F_\delta) \leqslant \delta$, где $d(\cdot,\cdot)$ — псевдометрика Хаусдорфа [11].

Требуется по F_δ построить некоторое приближение решения задачи (1.3).

Основная трудность такого построения заключается в том, что множество $T(F_\delta)$, вообще говоря, неограничено, даже если F_0 одноточечно, поэтому задача (1.3) является некорректной по Адамару.

2. Слабая регуляризация задачи (1.3). В дальнейшем будем предполагать, что множество F_0 есть множество равномерной регуляризации оператора T [12, 13, 2], т. е. существует семейство линейных ограниченных операторов $\{T_\alpha : 0 < \alpha \leqslant \alpha_0\}$ таких, что

$$+\infty > \eta(\alpha) = \sup\{\|Tf - T_\alpha f\| : f \in F_0\} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{2.1}$$

Приближенное решение задачи (1.3) будем искать как решение вспомогательной задачи оптимального управления

$$\operatorname{Arg\,min}\{\sup\{\|T_\alpha f - Gu(\cdot) - \bar{x}_0\| : f \in F_\delta\} : u(\cdot) \in \mathscr{U}\} \tag{2.2}$$

при некоторой связи параметров α и δ [14].

Прежде всего отметим, что при всех $\delta > 0$ и $\alpha \in (0, \alpha_0]$ множество $T_\alpha(F_\delta)$ ограничено и задача (2.2) разрешима. При этом если $\mathscr{U}$ выпукло, а G взаимно однозначен, то решение задачи (2.2) единственно.

Обозначим решение задачи (2.2) через $\mathscr{U}(\alpha, \delta)$.

Теорема 1. *Если параметры α и δ связаны следующим образом: $\alpha = \alpha(\delta)$ так, что*

$$\alpha(\delta) \to 0, \quad \delta\|T_{\alpha(\delta)}\| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0, \tag{2.3}$$

то для любой последовательности $\{\delta_n\} : \delta_n \to 0$ произвольная последовательность $\{u_n(\cdot)\}$: $u_n(\cdot) \in \mathscr{U}(\alpha(\delta_n), \delta_n)$ слабо предкомпактна и все ее слабые частичные пределы лежат в $\mathscr{U}_0$.

В частности, если $\mathscr{U}_0 = \{u_0(\cdot)\}$, то $u_n(\cdot) \rightharpoonup u_0(\cdot)$.

Доказательство. Пусть $\{u_n(\cdot)\} : u_n(\cdot) \in \mathscr{U}(\alpha_n, \delta_n) \subset \mathscr{U}$, где $\alpha_n = \alpha(\delta_n)$, поэтому $\{u_n(\cdot)\}$ ограничена и, следовательно, слабо предкомпактна. Пусть $\hat{u}(\cdot)$ — ее слабый частичный предел. Не ограничивая общности доказательства, можно считать, что $u_n(\cdot) \rightharpoonup \hat{u}_0(\cdot)$.

Пусть $\Phi(x; \alpha, \delta) = \sup\{\|T_\alpha f - x - \bar{x}_0\| : f \in F_\delta\}$, тогда при всех $\delta > 0$, $\alpha \in (0, \alpha_0]$ и $x \in H$

$$\begin{aligned} &\Phi(x; \alpha, \delta) \leqslant \|T_\alpha\|\delta + \eta(\alpha) + \Phi(x), \\ &\Phi(x) \leqslant \|T_\alpha\|\delta + \eta(\alpha) + \Phi(x; \alpha, \delta). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Поэтому для любого $\bar{u}(\cdot) \in \mathscr{U}_0$ в силу определения $\bar{u}(\cdot)$, $u_n(\cdot)$ и соотношений (2.4)

$$J(\bar{u}(\cdot)) \leqslant J(u_n(\cdot)) \leqslant J(\bar{u}(\cdot)) + 2\gamma_n, \tag{2.5}$$

где $\gamma_n = \|T_{\alpha_n}\|\delta_n + \eta(\alpha_n)$. В силу соотношений (2.3) и (2.1), переходя в (2.5) к пределу, получим $J(u_n(\cdot)) \to J(\bar{u}(\cdot))$, т. е. $\{u_n(\cdot)\}$ — минимизирующая последовательность для задачи (1.3), поэтому ее слабый предел $\hat{u}(\cdot) \in \mathscr{U}_0$.

Покажем, что задача (2.2), вообще говоря, регуляризует задачу (1.3) лишь в слабой топологии.

Рассмотрим задачу (1.3) при следующих условиях:

$$U = H, \quad \mathscr{U} = \{1u : u \in H, \ \|u\| \leqslant 1\}, \quad F_0 = \{0\}, \quad \bar{x}_0 = 0,$$

$\lambda_k = k$, $B(e_k) = e_k\sqrt{k}/(\mu_k - 1)$, где $\mu_k = \exp(k)$. Тогда $G(e_k) = e_k/\sqrt{k}$, а множество решений задачи (1.3) состоит из одной точки 0.

Пусть $F_\delta = \{\delta e_{k(\delta)}\}$, где $k(\delta) = [1/\delta]$ — целая часть от $1/\delta$. В качестве регуляризующего семейства оператора T возьмем $T_\alpha = T(E + \alpha T)^{-1}$.

Так как $\|T_\alpha\| \leqslant 1/\alpha$, то, взяв $\alpha(\delta) = \sqrt{\delta}$, получим, что условия теоремы 1 выполнены. При $\delta_n = 1/n$ задача (2.2) имеет единственное решение $u_n = e_n\mu_n/(\sqrt{n} + \mu_n)$, таким образом, u_n сходится к 0 лишь в слабой топологии.

Добавив к функционалу $J(u(\cdot); \alpha, \delta)$ некоторый стабилизатор [1], можно добиться сильной регуляризации.

3. Сильная регуляризация задачи (1.3). Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\operatorname{Arg\,min}\{J(u(\cdot); \alpha, \delta) + \beta\|u(\cdot)\| : u(\cdot) \in \mathscr{U}\}, \tag{3.1}$$

где $0 < \beta$ — еще один параметр регуляризации.

Эта задача также разрешима при всех $\delta > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha \in (0, \alpha_0]$.

Обозначим решение задачи (3.1) через $\mathscr{U}(\alpha, \beta, \delta)$.

Теорема 2. *Если параметры α, β и δ связаны соотношениями $\alpha = \alpha(\delta)$, $\beta = \beta(\delta)$ так, что $\alpha(\delta) \to 0$, $\beta(\delta) \to 0$, $(\delta\|T_{\alpha(\delta)}\| + \eta(\alpha(\delta)))/\beta(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, то для любой последовательности $\{\delta_n\} : \delta_n \to 0$ произвольная последовательность $\{u_n(\cdot)\} : u_n(\cdot) \in \mathscr{U}(\alpha(\delta_n), \beta(\delta_n), \delta_n)$ предкомпактна и все ее частичные пределы лежат в $\mathscr{U}_0$.*

В частности, если $\mathscr{U}_0 = \{u_0(\cdot)\}$, то $u_n(\cdot) \to u_0(\cdot)$.

Доказательство этой теоремы проводится с использованием неравенств, аналогичных (2.4), техникой, характерной для применения стабилизаторов относительно слабой топологии в E-пространствах [2, 13].

4. Частные случаи. В простейшем случае, когда F_0 одноточечно, оно всегда есть множество равномерной регуляризации оператора T, и в качестве T_α можно взять, например, оператор [13]

$$T_\alpha = T(E + \alpha T)^{-1}, \ \alpha > 0. \tag{4.1}$$

Тогда $\|T_\alpha\| \leqslant 1/\alpha$, и поэтому соотношение $\alpha = \alpha(\delta)$, обеспечивающее слабую регуляризацию задачи (1.6) задачей (2.2), надо взять следующим образом: $\delta/\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, например, $\alpha(\delta) = \delta^a$, $0 < a < 1$.

Пусть теперь множество F_0 удовлетворяет следующему условию: $F_0 \subset \{f \in D(T^{1+\gamma}) : \|T^{1+\gamma} f\| \leqslant M\}$, где $\gamma > 0$ и M — известные числа.

Тогда [13] F_0 будет множеством равномерной регуляризации как для семейства $\{T_\alpha\}$ (4.1), так и для следующих семейств:

$$T_\alpha = T(E + \alpha T^{1+\gamma})^{-1}, \ \alpha > 0, \tag{4.2}$$

$$T_\alpha = T P_\alpha, \ \alpha > 0, \tag{4.3}$$

где P_α — оператор проектирования на подпространство $\langle e_1, \dots, e_{n(\alpha)} \rangle : \mu_{n(\alpha)} \leqslant 1/\alpha < \mu_{n(\alpha)+1}$, $\mu_n = \exp(\lambda_n)$.

Для регуляризирующего семейства (4.1) будем иметь $\eta(\alpha) \leqslant \alpha^\varepsilon (1-\varepsilon)^{1-\varepsilon} \varepsilon^\varepsilon = \alpha^\varepsilon K(\varepsilon)$, где $0 < \varepsilon < \max\{1, \gamma\}$. Таким образом, достаточным условием сильной регуляризации задачи (1.3) задачей (3.1) при $\alpha = \delta^a$, $\beta = \delta^b$ будут соотношения $a\varepsilon > b$ и $1 > a + b$.

Для регуляризующего семейства (4.2) имеем $\|T_\alpha\| \leqslant \alpha^{-1/(1+\gamma)} K_1(\gamma)$, а $\eta(\alpha) \leqslant \alpha^{\gamma/(1+\gamma)} K_1(\gamma)$, поэтому для слабой регуляризации задачи (1.3) при $\alpha = \delta^a$ достаточно выполнения условия $1 + \gamma > a$. Для сильной регуляризации при $\alpha = \delta^a$, $\beta = \delta^b$ достаточно выполнения соотношений $1 > b + a/(1+\gamma)$ и $\gamma a/(1+\gamma) > b$.

Для регуляризующего семейства (4.3) имеем $\|T_\alpha\| \leqslant 1/\alpha$, поэтому условия, обеспечивающие слабую регуляризацию, можно взять такие же, как и для семейства (4.1): $\alpha = \delta^a$, $0 < a < 1$. Так как $\eta(\alpha) \leqslant \alpha^\gamma M$, то достаточным условием сильной регуляризации задачи (1.3) будут при $\alpha = \delta^a$, $\beta = \delta^b$ соотношения $a\gamma > b$ и $1 > a + b$.

Литература

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979.

2. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М., 1978.

3. Лаврентьев М. М. О некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.

4. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., 1968.

5. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М., 1977.

6. Тихонов А. Н. // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162, № 4. С. 763—765.

7. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М., 1981.

8. Тихонов А. Н., Васильев Ф. П., Потапов М. М., Юрий А. Д. // Вестник МГУ. Сер. 15. 1977. № 1. С. 4—19.

9. Иосида К. Функциональный анализ. М., 1967.

10. Балакришнан А. В. Прикладной функциональный анализ. М., 1980.

11. Куратовский К. Топология. М., 1966. Т. 1.

12. Иванов В. К. // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7, № 3. С. 546—558.

13. Страхов В. Н. // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 8. С. 1490—1495.

14. Данилин А. Р. // Некоторые вопросы теории операторов. Свердловск, 1987. С. 20—28.

Свердловский государственный педагогический институт

Поступила в редакцию 13 октября 1989 г.