Н. Б. Ильинский, Задача построения подземного контура гидросооружения по эпюре выходных скоростей,
Тр. сем. по обратн. краев. задачам, 1964, выпуск 2, 21–25

https://www.mathnet.ru/kukz626

ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ПОДЗЕМНОГО КОНТУРА ГИДРОСООРУЖЕНИЯ ПО ЭПЮРЕ ВЫХОДНЫХ СКОРОСТЕЙ

Н. Б. ИЛЬИНСКИЙ

В последнее время авторами ряда работ решались задачи об определении формы контура основания гидротехнического сооружения по заданной на *искомом контуре* эпюре скоростей или эпюре фильтрационного давления. Систематическое изложение этих задач содержится в работе [1].

Н. И. Дружинин (на II Всесоюзном съезде механиков) указал на целесообразность решения задачи о построении подземного контура по эпюре *выходных* скоростей.

В настоящей статье дается постановка и принципиальная схема решения такой задачи.

Пусть

$$V = f(x) \quad (l \leqslant x < \infty) \tag{1}$$

заданная эпюра выходных скоростей, где $f(x)$ — однозначная положительная монотонно убывающая функция, обращающаяся на бесконечности в нуль первого порядка, причем линии дна верхнего и нижнего бьефов (AB и CD) считаются прямолинейными и расположенными на одном уровне (рис. 1). Требуется определить форму подземного контура.

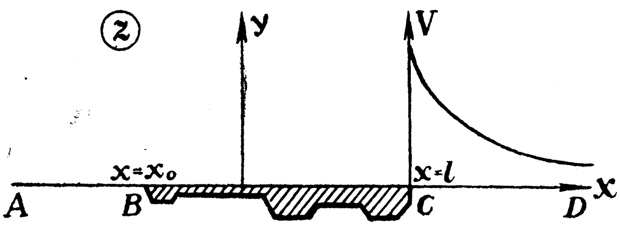

Рис. 1.

Будем предполагать, что искомый контур водонепроницаем, грунт основания однородный и изотропный, течение подчиняется закону Дарси. Тогда, как известно, поле скоростей фильтрационного потока обладает потенциалом $\varphi = -kh$, где k — коэффициент фильтрации, $h(x, y)$ — функция напора.

Пусть H — действующий на гидросооружение напор, глубина водопроницаемого слоя не ограничена. Выбирая на границе верхнего бьефа AB значение $h = \frac{H}{2}$ и принимая вдоль искомого контура функцию тока $\psi = 0$, получим в плоскости комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ полуполосу $ABCD$ шириной kH (рис. 2). При помощи функции

$$w = \frac{kH}{\pi} \arcsin \zeta \tag{2}$$

конформно отобразим эту полуполосу на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta < 0$ переменного $\zeta = \xi + i\eta$ так, что точки C, B, D, A перейдут соответственно в точки ± 1 и $\pm \infty$ оси ξ.

Из формулы (2) на участке оси ξ, соответствующем границе нижнего бьефа, найдем

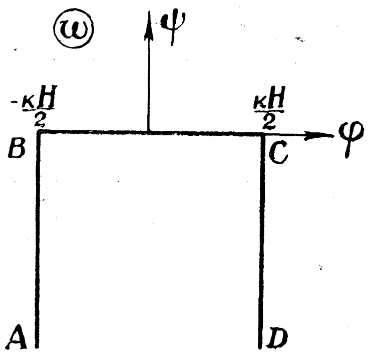

Рис. 2.

$$\psi = -\frac{kH}{\pi} \operatorname{arch} \xi \quad (1 \leqslant \xi < \infty). \tag{3}$$

С другой стороны, учитывая (1), на этой границе будем иметь

$$\psi = -\int_{l}^{x} f(x)\, dx \quad (l \leqslant x < \infty). \tag{4}$$

Сопоставляя соотношения (3) и (4), получим зависимость

$$x = \Phi(\xi) \quad (1 \leqslant \xi < \infty), \tag{5}$$

где $\Phi(\xi)$ — однозначная монотонно возрастающая функция от l до ∞.

Рассмотрим далее следующую задачу. Предположим, что на участке $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$ оси ξ нам известна зависимость $x(\xi)$ для нашего подземного контура, причем $x(1) = l$. Тогда, так как границы бьефов AB и CD в плоскости z прямолинейны и расположены на одной высоте, для отыскания отображающей функции $z(\zeta)$ получим следующую краевую задачу: найти в области $\operatorname{Im} \zeta < 0$ аналитическую функцию, имеющую в бесконечно удаленной точке полюс первого порядка и принимающую на границе области значения $\operatorname{Im} z = 0$ при $1 \leqslant |\xi| < \infty$ и $\operatorname{Re} z = x(\xi)$ при $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$. Решение этой задачи записывается в виде

$$z(\zeta) = -\frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)\, d\tau}{(\tau - \zeta)\sqrt{1 - \tau^2}} + A\sqrt{\zeta^2 - 1}, \tag{6}$$

где $A > 0$ — произвольная вещественная постоянная.

Выделяя отсюда $\operatorname{Re} z$ при $\zeta = \xi$ на участке $1 \leqslant \xi < \infty$, получим:

$$x = u(\xi) + A\sqrt{\xi^2 - 1}, \tag{7}$$

где

$$u(\xi) = \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)\, d\tau}{(\tau - \xi)\sqrt{1 - \tau^2}}, \tag{8}$$

причем знак „плюс“ берется при $-\infty < \xi \leqslant -1$, знак „минус“ — при $1 \leqslant \xi < \infty$.

Но зависимость $x(\xi)$ на участке $1 \leqslant \xi < \infty$ задана формулой (5). Следовательно, для определения $x(\xi)$ при $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$, учитывая (5) и (7), будем иметь

$$\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)\, d\tau}{(\tau - \xi)\sqrt{1 - \tau^2}} = A\sqrt{\xi^2 - 1} - \Phi(\xi) \quad (1 \leqslant \xi < \infty). \tag{9}$$

Это соотношение представляет собой интегральное уравнение Фредгольма первого рода с ядром, заданным в полуполосе $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$, $1 \leqslant \xi < \infty$, и особенностью при $\xi = 1$. Постоянная A находится по заданной эпюре скоростей (1) (см. формулу (19)).

Пусть $x = x(\xi)$ есть решение этого уравнения. Тогда из формулы (6) предельным переходом при $\zeta \to \xi \, (-1 \leqslant \xi \leqslant 1)$ получим параметрические уравнения искомого контура

$$\left.\begin{array}{l} x = x(\xi), \\ y = v(\xi) - A\sqrt{1-\xi^2} \end{array}\right\} (-1 \leqslant \xi \leqslant 1), \tag{10}$$

где интеграл

$$v(\xi) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)\, d\tau}{(\tau-\xi)\sqrt{1-\tau^2}}$$

надо понимать в смысле главного значения по Коши.

Построив подземный контур, нетрудно найти все необходимые фильтрационные характеристики грунтового потока. Так, например, определив из формулы (2) функцию напора

$$h = -\frac{H}{\pi} \arcsin \xi \qquad (-1 \leqslant \xi \leqslant 1)$$

и учитывая первое из соотношений (10), построим эпюру фильтрационного давления $h = h(x)$ $(x_0 \leqslant x \leqslant l)$, где абсцисса x_0 начальной точки флютбета B определяется из соотношения $x_0 = x(-1)$.

Полагая в формуле (6) $\zeta = \xi$, когда $-\infty < \xi \leqslant -1$, будем иметь:

$$x = \Phi^*(\xi) = u(\xi) - A\sqrt{\xi^2 - 1}.$$

Из физических соображений совершенно ясно, что функция $\Phi^*(\xi)$ должна быть монотонно возрастающей, т. е.

$$\frac{d\Phi^*}{d\xi} = -\frac{1}{\sqrt{\xi^2-1}}[p(\xi) + A\xi] > 0 \quad \text{при} \quad -\infty < \xi < -1, \tag{11}$$

где

$$p(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{d\tau} \, \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau - \xi} \, d\tau.$$

Из неравенства (11) вытекает следующее условие разрешимости нашей задачи:

$$A > M, \tag{12}$$

где M — наибольшее значение функции $\frac{p(\xi)}{-\xi}$ в интервале $(-\infty, -1)$.

Нетрудно заметить, что если найденная зависимость $x(\xi)$ монотонно возрастает при $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$, то условие разрешимости (12) примет вид

$$A \geqslant p(-1),$$

причем в этом случае подземный контур будет однолистным.

Вернемся к уравнению (9). Если в нем сделать замену переменных, положив $\tau = \cos\theta$ $(-1 \leqslant \tau \leqslant 1,\ \pi \geqslant \theta \geqslant 0)$, $\xi = \operatorname{ch}\delta$ $(1 \leqslant \xi < \infty$, $0 \leqslant \delta < \infty)$, то получим

$$\frac{\operatorname{sh}\delta}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\tilde{x}(\theta)\, d\theta}{\cos\theta - \operatorname{ch}\delta} = A \operatorname{sh}\delta - \Phi(\operatorname{ch}\delta), \tag{13}$$

где $\tilde{x}(\theta) = x(\cos\theta)$.

Из физических соображений ясно, что решение уравнения (13) следует отыскивать в классе ограниченных и непрерывных функций. Но такое решение всегда можно представить в виде ряда Фурье, сходящегося (по меньшей мере) в среднем квадратичном. Таким образом, нужное решение естественно искать в виде

$$\tilde{x}(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta. \tag{14}$$

Тогда, учитывая, что [см., напр., 2]

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta\, d\theta}{\cos\theta-\operatorname{ch}\delta}=-\pi\frac{e^{-n\delta}}{\operatorname{sh}\delta},$$

решение уравнения (13) в этом классе эквивалентно решению уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n\delta}=\Phi(\operatorname{ch}\delta)-A\operatorname{sh}\delta \qquad (0\leqslant\delta<\infty). \tag{15}$$

Представив последнее уравнение в виде

$$\Phi(\operatorname{ch}\delta)=\frac{A}{2}e^{\delta}+\left(a_1-\frac{A}{2}\right)e^{-\delta}+\sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{-n\delta}, \tag{16}$$

нетрудно заметить, что необходимым условием существования решения будет

$$0<A=\lim_{\delta\to\infty}\frac{2\Phi(\operatorname{ch}\delta)}{e^{\delta}}<\infty. \tag{17}$$

Таким образом, если функция $\Phi(\operatorname{ch}\delta)$ представима в виде (16), то решение уравнения (15), отыскиваемое в классе функций ограниченных и непрерывных, существует, единственно и определяется формулой (14). В частности, решение существует для всех функций вида (16) с конечным рядом и имеет вид конечного отрезка тригонометрического ряда (14). Следовательно, практически мы всегда найдем приближенное решение нашей задачи, если зависимость $\Phi(\operatorname{ch}\delta)$ сможем с достаточной степенью точности аппроксимировать конечной суммой вида (16).

При решении конкретных задач, когда функция $\Phi(\operatorname{ch}\delta)$ задана таблично, коэффициенты $a_n (n=1, 2, \ldots)$ могут быть приближенно определены из уравнения (15) следующим образом. Выберем N значений $\delta(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N)$ в интервале $0\leqslant\delta<\infty$ и для каждого значения δ запишем (15), ограничив суммирование до N. Тогда для отыскания a_n получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
a_1e^{-\delta_1}+a_2e^{-2\delta_1}+\cdots+a_N e^{-N\delta_1}&=\Phi(\operatorname{ch}\delta_1)-A\operatorname{sh}\delta_1,\\
a_1e^{-\delta_2}+a_2e^{-2\delta_2}+\cdots+a_N e^{-N\delta_2}&=\Phi(\operatorname{ch}\delta_2)-A\operatorname{sh}\delta_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_1e^{-\delta_N}+a_2e^{-2\delta_N}+\cdots+a_N e^{-N\delta_N}&=\Phi(\operatorname{ch}\delta_N)-A\operatorname{sh}\delta_N.
\end{aligned} \tag{18}$$

Нетрудно заметить, что определитель этой системы отличен от нуля (это определитель Вандермонда), следовательно, система (18) разрешима единственным образом. Определив коэффициенты a_n и подставив их в формулу (14), найдем необходимую для дальнейшего решения задачи зависимость $x=x(\cos\theta)$.

Полагая в условии (17) $\operatorname{ch}\delta = \xi$ и учитывая соотношения (3) — (5), получим формулу

$$A = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{\exp\left(\frac{\pi}{kH} \int\limits_{l}^{x} f(x)\,dx\right)}, \tag{19}$$

позволяющую определять постоянную A непосредственно по заданной эпюре выходных скоростей (1).

Заметим, что если в уравнениях (10) положить $\xi = \cos\gamma$, $\tau = \cos\theta$ $(-1 \leqslant \xi,\ \tau \leqslant 1,\ \pi \geqslant \gamma,\ \theta \geqslant 0)$, воспользоваться представлением (14) и учесть, что [2]

$$\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos n\theta\, d\theta}{\cos\theta - \cos\gamma} = \pi \frac{\sin n\gamma}{\sin\gamma},$$

то параметрические уравнения (10) искомого подземного контура запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{x}(\gamma) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\gamma, \\ \widetilde{y}(\gamma) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\gamma - A \sin\gamma \end{aligned}\right\} (0 \leqslant \gamma \leqslant \pi). \tag{20}$$

Пример.
Дано:

$$V = f(x) = \frac{kH}{\pi\sqrt{x^2 - l^2}} \qquad (l \leqslant x < \infty).$$

Определив по формуле (4)

$$\psi = -\frac{kH}{\pi} \operatorname{arch} \frac{x}{l}$$

и сравнивая полученное соотношение с (3), найдем

$$x = \Phi(\xi) = \xi l \qquad (1 \leqslant \xi < \infty).$$

По формуле (19) определим $A = l$, тогда уравнение (15) примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n\delta} = l e^{-\delta},$$

единственным решением которого, очевидно, является $a_1 = l$, $a_j = 0$ $(j = 2, 3, \ldots)$. Подставляя найденные коэффициенты в уравнения (20) и переходя от γ к ξ, получим

$$x = l\xi, \quad y = 0 \quad (-1 \leqslant \xi \leqslant 1),$$

т. е. подземным контуром является плоский флютбет ширины $2l$.

Доложено на семинаре 25 февраля 1964 года.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Т. Нужин и Н. Б. Ильинский. Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. Обратные краевые задачи теории фильтрации. Изд. КГУ, Казань, 1963.

2. А. И. Некрасов. Теория крыла в нестационарном потоке. Собр. соч., т. II., Изд. АН СССР, М., 1962.