Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

I. R. Nezhmetdinov, Stability of geometric properties of convolutions of univalent functions in some neighborhoods,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1994, Number 8, 46–54

https://www.mathnet.ru/eng/ivm4272

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.175
December 14, 2025, 18:54:31

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1994 МАТЕМАТИКА № 8 (387)

УДК 517.546

И.Р. НЕЖМЕТДИНОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СВЕРТОК ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ В НЕКОТОРЫХ ОКРЕСТНОСТЯХ

1. Введение

Пусть $\mathfrak{A}$ – класс функций вида $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$, регулярных в единичном круге $E=\{z: |z|<1\}$, а S, S^* и S^0 – подклассы $\mathfrak{A}$, состоящие из однолистных, звездообразных и выпуклых функций соответственно (см., напр., [1], с.6). В статье [2] получены следующие достаточные условия принадлежности функций $f\in\mathfrak{A}$ классам S^0 и S^*:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k|a_k| \leq 1 \implies f\in S^*, \tag{1}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^2|a_k| \leq 1 \implies f\in S^0. \tag{2}$$

С.Рушевейх [3] определил δ-окрестность для функции $f\in\mathfrak{A}$ следующим образом:

$$N_\delta(f) = \left\{g(z) = z+\sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k\in\mathfrak{A}:\ \rho(f,g)=\sum_{k=2}^{\infty} k|a_k-b_k|\leq\delta\right\},$$

интерпретировав условие (1) как включение $N_1(e)\subset S^*\subset S$, где $e(z)\equiv z$. Вместе с тем, в [3] отмечено, что включение $N_\delta(e)\subset S^0$ не выполняется ни при каком $\delta>0$. Т.Шейл-Смолл и Е.Сильвия [4] ввели более общее понятие T-δ-окрестности

$$TN_\delta(f) = \left\{g(z)\in\mathfrak{A}:\ \rho_T(f,g)=\sum_{k=2}^{\infty} T_k|a_k-b_k| \leq \delta\right\},$$

где $T=\{T_k\}_{k=2}^{\infty}$ – некоторая последовательность положительных чисел. Отсюда при $T_k=k$, $k\geq 2$, получаем $TN_\delta(f)=N_\delta(f)$. Заметим, что при $T_k=k^2$, $k\geq 2$, условие (2) записывается как $TN_1(e)\subset S^0$, т.е. точка e может оказаться внутренней для класса S^0 в зависимости от выбора последовательности T.

Рассмотрим две свертки

$$(f*g)(z)= z+\sum_{k=2}^{\infty} a_k b_k z^k, \tag{3}$$

$$(f\otimes g)(z) = z+\sum_{k=2}^{\infty} (a_k b_k/k) z^k, \tag{4}$$

определенные на классе $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{M},\mathfrak{N}\subset\mathfrak{A}$, то через $\mathfrak{M}*\mathfrak{N}$ ($\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N}$) обозначим множество всех функций вида $f*g$ ($f\otimes g$), где $f\in\mathfrak{M}$, $g\in\mathfrak{N}$. Известно, напр., что $S^0*S^0\subset S^0$ (или, что равносильно, $S^*\otimes S^*\subset S^*$) (см. [5]). Предположим, что имеет место включение $\mathfrak{M}*\mathfrak{N}\subset\mathfrak{P}$, где $\mathfrak{P}\subset\mathfrak{A}$. Тогда если существует $\delta>0$ такое, что $TN_\delta(\mathfrak{M})*TN_\delta(\mathfrak{N})\subset\mathfrak{P}$, то свертку (3) назовем T-$\mathfrak{P}$-устойчивой на паре классов $(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$. Здесь $TN_\delta(\mathfrak{M})=\bigcup_{f\in\mathfrak{M}} TN_\delta(f)$ является T-δ-окрестностью класса $\mathfrak{M}$.

В данной статье будут установлены необходимые и достаточные условия $T-\mathfrak{P}$-устойчивости сверток (3) и (4) в виде ограничений на последовательность T для всех случаев, когда справедливо включение $\mathfrak{M}*\mathfrak{N}\subset\mathfrak{P}$ ($\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N}\subset\mathfrak{P}$), где $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ – какие-либо из подклассов $\{e\}$, S^0, S^*, S. Получены также уравнения или оценки для постоянных устойчивости, определяемых как

$$\delta_T(\mathfrak{M}*\mathfrak{N},\mathfrak{P}) = \sup\{\delta\colon TN_\delta(\mathfrak{M})*TN_\delta(\mathfrak{N})\subset\mathfrak{P}\}, \tag{5}$$

$$\delta_T(\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N},\mathfrak{P}) = \sup\{\delta\colon TN_\delta(\mathfrak{M})\otimes TN_\delta(\mathfrak{N})\subset\mathfrak{P}\}. \tag{6}$$

В дальнейшем, если это не оговорено особо, под $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{P}$ подразумевается любой из классов S^* или S. Через $K_m(z)$ обозначим функцию $z+\sum_{k=2}^{\infty}k^m z^k\in\mathfrak{A}$, где m – целое число. Известно, что $K_0(z)=z(1-z)^{-1}\in S^0$, а $K_1(z)=z(1-z)^{-2}\in S^*\subset S$.

2. Основные результаты

ТЕОРЕМА 1. *Свертка* (3) *является*:

a) *$T-S^0$-устойчивой на* $(\{e\},\{e\})\Leftrightarrow T_k^{-1}=O(k^{-1})$, $k\to\infty$ (*кроме того,* $\delta_T(\{e\}*\{e\},S^0)=\inf\{T_k k^{-1}\colon k\geqslant 2\}$);

b) *$T-\mathfrak{P}$-устойчивой на* $(\{e\},\{e\})\Leftrightarrow T_k^{-1}=O(k^{-1/2})$, $k\to\infty$ (*при этом* $\delta_T(\{e\}*\{e\},\mathfrak{P})=\inf\{T_k k^{-1/2}\colon k\geqslant 2\}$);

c) *$T-S^0$-устойчивой на* $(S^0,\{e\})\Leftrightarrow T_k^{-1}=O(k^{-2})$, $k\to\infty$ (*величина* $\delta=\delta_T(S^0*\{e\},S^0)$ *определяется как единственный неотрицательный корень уравнения* $\delta=\inf\{T_k^2k^{-2}(T_k+\delta)^{-1}\colon k\geqslant 2\}$);

d) *$T-\mathfrak{P}$-устойчивой на* $(S^0,\{e\})\Leftrightarrow T_k^{-1}=O(k^{-1})$, $k\to\infty$ (*точное значение постоянной* $\delta=\delta_T(S^0*\{e\},\mathfrak{P})$ *находится из уравнения* $\delta=\inf\{T_k^2k^{-1}(T_k+\delta)^{-1}\colon k\geqslant 2\}$);

e) *$T-S^0$-устойчивой на* $(\mathfrak{M},\{e\})\Leftrightarrow T_k^{-1}=O(k^{-3})$, $k\to\infty$ (*при этом* $\delta=\delta_T(\mathfrak{M}*\{e\},S^0)$ *является единственным неотрицательным корнем уравнения* $\delta=\inf\{T_k^2k^{-2}(kT_k+\delta)^{-1}\colon k\geqslant 2\}$);

f) *$T-\mathfrak{P}$-устойчивой на* $(\mathfrak{M},\{e\})\Leftrightarrow T_k^{-1}=O(k^{-2})$, $k\to\infty$ (*более того, величина* $\delta=\delta_T(\mathfrak{M}*\{e\},\mathfrak{P})$ *определяется из равенства* $\delta=\inf\{T_k^2k^{-1}(kT_k+\delta)^{-1}\colon k\geqslant 2\}$);

g) *$T-\mathfrak{P}$-устойчивой на* $(S^0,S^0)\Leftrightarrow T_k^{-1}=O(k^{-1})$, $k\to\infty$. *Для точного значения* $\delta=\delta_T(S^0*S^0,\mathfrak{P})$ *справедливы оценки*

$$\inf\{T_k^2k^{-1}(2T_k+\delta)^{-1}\colon k\geqslant 2\}\leqslant 4\delta\leqslant\inf\{T_k^2k^{-1}(2T_k+\delta)^{-1}\colon k\geqslant 2,\ k\ \text{четно}\}. \tag{7}$$

Заметим, что ни для какой последовательности T свертка (3) не является $T-S^0$-устойчивой на (S^0,S^0). Действительно, положим $f(z)=g(z)=K_0(z)+\delta T_k^{-1}z^k\in TN_\delta(S^0)$, где $\delta>0$ и $k\geqslant 2$. Тогда k-й коэффициент в разложении $f*g$ будет больше 1, и поэтому $f*g\notin S^0$ (см. [6], с.204).

ТЕОРЕМА 2. *Свертка* (4) *является*:

a) *$T-S^0$-устойчивой на* $(\{e\},\{e\})\Leftrightarrow T_k^{-1}=O(k^{-1/2})$, $k\to\infty$ (*кроме того,* $\delta_T(\{e\}\otimes\{e\},S^0)=\inf\{T_k k^{-1/2}\colon k\geqslant 2\}$);

b) *$T-\mathfrak{P}$-устойчивой на* $(\{e\},\{e\})\Leftrightarrow T_k^{-1}=O(1)$, $k\to\infty$ (*при этом* $\delta_T(\{e\}\otimes\{e\},\mathfrak{P})=\inf\{T_k\colon k\geqslant 2\}$);

c) *$T-S^0$-устойчивой на* $(S^0,\{e\}) \Leftrightarrow T_k^{-1} = O(k^{-1})$, $k \to \infty$ *(постоянная* $\delta=\delta_T(S^0\otimes\{e\},S^0)$ *определяется как единственный неотрицательный корень уравнения*

$$\delta = \inf\{T_k^2 k^{-1}(T_k+\delta)^{-1}:\ k\geq 2\});$$

d) *$T-\mathfrak{P}$-устойчивой на* $(S^0,\{e\}) \Leftrightarrow T_k^{-1} = O(1)$, $k \to \infty$ *(точное значение постоянной* $\delta=\delta_T(S^0\otimes\{e\},\mathfrak{P})$ *находится из уравнения* $\delta=\inf\{T_k^2(T_k+\delta)^{-1}:\ k\geq 2\})$;

e) *$T-S^0$-устойчивой на* $(\mathfrak{M},\{e\}) \Leftrightarrow T_k^{-1}=O(k^{-2})$, $k\to\infty$ *(при этом* $\delta=\delta_T(\mathfrak{M}\otimes\{e\},S^0)$ *является единственным неотрицательным корнем уравнения* $\delta=\inf\{T_k^2 k^{-1}(kT_k+\delta)^{-1}:\ k\geq 2\})$;

f) *$T-\mathfrak{P}$-устойчивой на* $(\mathfrak{M},\{e\}) \Leftrightarrow T_k^{-1}=O(k^{-1})$, $k\to\infty$ *(величина* $\delta=\delta_T(\mathfrak{M}\otimes\{e\},\mathfrak{P})$ *определяется из равенства* $\delta=\inf\{T_k^2(kT_k+\delta)^{-1}:\ k\geq 2\})$;

g) *$T-S^0$-устойчивой на* $(S^0,S^0) \Leftrightarrow T_k^{-1} = O(k^{-1})$, $k \to \infty$ *(для точного значения* $\delta = \delta_T(S^0\otimes S^0,S^0)$ *справедливы оценки*

$$\inf\{T_k^2 k^{-1}(2T_k+\delta)^{-1}:\ k\geq 2\} \leq 4\delta \leq \inf\{T_k^2 k^{-1}(2T_k+\delta)^{-1}:\ k\geq 2,\ \ k \text{ четно}\});$$

h) *$T-\mathfrak{P}$-устойчивой на* $(S^0,S^0) \Leftrightarrow T_k^{-1}=O(1)$, $k\to\infty$ *(при этом для* $\delta=\delta_T(S^0\otimes S^0,\mathfrak{P})$ *имеем*

$$\inf\{T_k^2(2T_k+\delta)^{-1}:\ k\geq 2\} \leq 2\delta \leq \inf\{T_k^2(2T_k+\delta)^{-1}:\ k\geq 2,\ k \text{ четно}\});$$

i) *$T-\mathfrak{P}$-устойчивой на* $(S^*,S^0) \Leftrightarrow T_k^{-1}=O(k^{-1})$, $k\to\infty$. *Если* $\delta=\delta_T(S^*\otimes S^0,\mathfrak{P})$, *то выполняются неравенства:*

$$\inf\{T_k^2[(k+1)T_k+\delta]^{-1}:\ k\geq 2\} \leq 4\delta \leq \inf\{T_k^2[(k+1)T_k+\delta]^{-1}:\ k\geq 2,\ k \text{ четно}\}.$$

Хотя имеют место включения $S^*\otimes S^0\subset S^0$ и $S^*\otimes S^*\subset S^*$, однако не существует такой последовательности T, для которой свертка (4) является, напр., $T-\mathfrak{P}$-устойчивой на (S^*, S^*). Достаточно рассмотреть функции $f(z)=g(z)=K_1(z)+\delta T_k^{-1}z^k\in TN_\delta(S^*)$ такие, что k-й коэффициент разложения $f\otimes g$ не удовлетворяет условию Бибербаха (см. [7]).

Исследуем также устойчивость геометрических свойств функции f при интегральном преобразовании

$$Q[f](z) = \int_0^z (f(t)/t)dt, \quad z\in E. \tag{8}$$

Пусть $Q[\mathfrak{M}]$ – образ подкласса $\mathfrak{M}$ при отображении Q. Известно, напр., что $Q[S^*]=S^0$, однако $Q[S]\not\subset S$ (см. [1], с.47–48). При выполнении включения $Q[\mathfrak{M}]\subset\mathfrak{P}$ можно определить постоянную устойчивости

$$\delta_T(Q[\mathfrak{M}],\mathfrak{P}) = \sup\{\delta:\ Q[TN_\delta(\mathfrak{M})]\subset\mathfrak{P}\}. \tag{9}$$

Оператор (8) будем называть $T-\mathfrak{P}$-устойчивым на классе $\mathfrak{M}$, если $\delta_T(Q[\mathfrak{M}],\mathfrak{P})>0$.

ТЕОРЕМА 3. *Интегральный оператор* (8) *является:*

a) *$T-S^0$-устойчивым на* $\{e\} \Leftrightarrow T_k^{-1} = O(k^{-1})$, $k \to \infty$ *(при этом* $\delta_T(Q[\{e\}],S^0) = \inf\{T_k k^{-1}:\ k\geq 2\})$;

b) *$T-\mathfrak{P}$-устойчивым на* $\{e\}\Leftrightarrow T_k^{-1}=O(1)$, $k\to\infty$ *(кроме того,* $\delta_T(Q[\{e\}],\mathfrak{P})=\inf\{T_k:\ k\geq 2\})$;

c) *$T-S^0$-устойчивым на* $S^0 \Leftrightarrow T_k^{-1} = O(k^{-1})$, $k \to \infty$ *(постоянная устойчивости* $\delta = \delta_T(Q[S^0],S^0)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\inf\{T_k k^{-1}:\ k\geq 2\} \leq 4\delta \leq \inf\{T_k k^{-1}:\ k\geq 2,\ k \text{ четное}\});$$

d) *$T-\mathfrak{P}$-устойчивым на $S^0 \Leftrightarrow T_k^{-1}=O(1)$, $k\to\infty$ (для величины $\delta=\delta_T(Q[S^0],\mathfrak{P})$ выполняются соотношения* $\inf\{T_k\colon k\geq 2\} \leq 2\delta \leq \inf\{T_k\colon k\geq 2,\ k$ *четно*$\}$);

e) *$T-\mathfrak{P}$-устойчивым на $S^* \Leftrightarrow T_k^{-1} = O(1)$, $k\to\infty$ (при этом для $\delta = \delta_T(Q[S^*],\mathfrak{P})$ имеем* $\inf\{T_k\colon k\geq 2\} \leq 4\delta \leq \inf\{T_k\colon k\geq 2,\ k$ *четно*$\}$.)

Заметим, что постоянная устойчивости $\delta_T(Q[S^*],S^0)$ равна нулю независимо от выбора последовательности T.

3. Доказательства теорем 1–3

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. *Для любого натурального $k\geq 2$ имеем (см., напр., [8]):*

$$z+cz^k\in S^0 \iff |c|\leq 1/k^2,$$
$$z+cz^k\in \mathfrak{P} \iff |c|\leq 1/k.$$

ЛЕММА 2. *Следуя [3], обозначим через $S^{*\prime}$ класс всех функций вида $h(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty} c_k z^k$, где $c_k=(k+i\alpha)/(1+i\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Если для всех $h\in S^{*\prime}$ и для всех $z\in E$ имеем $(f*h)(z)/z\neq 0$, то $f\in S^*$. Заметим, что $|c_k|\leq k$ при $k=2,3,\ldots$*

ЛЕММА 3. *Пусть $f\in S^0$. Тогда справедливы следующие оценки:*

$$|(f*h)(z)/z| \geq 1/4, \tag{10}$$

$$|(f\otimes h)(z)/z| \geq 1/2, \tag{11}$$

где $h\in S^{*\prime}$ и $z\in E$.

Лемма 2 и неравенство (10) леммы 3 представляют собой результаты из статьи [3]. Докажем оценку (11). Известно [3], что для произвольных $f\in S^0$, $h\in S^{*\prime}$ функция $f*h$ принадлежит классу K почти выпуклых функций (см. [1], с.11). Поскольку $f\otimes h=Q[f*h]$ и $Q[K]\subset K$ (см. [9]), то $f\otimes h\in K\subset S$. В силу однолистности $f\otimes h$ неравенство $|(f\otimes h)'(z)|=|(f*h)(z)/z|\geq (1+|z|)^{-2}$, полученное в [3], можно проинтегрировать по прообразу отрезка, соединяющего начало с ближайшей к нему точкой на $(f\otimes h)(C_r)$, где C_r – окружность $|z|=r<1$. Таким образом,

$$|(f\otimes h)(z)| = \left|\int_0^z d(f\otimes h)(t)\right| = \int_0^z |(f*h)(t)/t|\,|dt| \geq \int_0^r (1+\rho)^{-2}d\rho,$$

откуда и следует (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. *Случай* а). Пусть существует такое $\delta>0$, что $TN_\delta(e)*TN_\delta(e)\subset S^0$. Тогда, полагая $f(z)=g(z)=z+\delta T_k^{-1}z^k\in TN_\delta(e)$, $k\geq 2$, имеем $(f*g)(z)=z+\delta^2T_k^{-2}z^k\in S^0$. Отсюда в силу леммы 1 получим $T_k^{-1}\leq\delta^{-1}k^{-1}$ при любом $k\geq 2$, что и требовалось. Точно так же убедимся, что при $\delta>\inf\{T_kk^{-1}\colon k\geq 2\}$ включение $TN_\delta(e)*TN_\delta(e)\subset S^0$ не выполняется.

Пусть теперь $T_k^{-1}=O(k^{-1})$, $k\to\infty$. Это означает, что для некоторого $M>0$ справедлива оценка $T_k^{-1}\leq Mk^{-1}$, где $k=2,3,\ldots$, и, следовательно, $\delta_0=\inf\{T_kk^{-1}\colon k\geq 2\}>0$. Предположим, что $0<\delta\leq\delta_0$ и $f,g\in TN_\delta(e)$. Поскольку $z(f*g)'=zf'*g$, то нетрудно видеть, что для любых функций $f, g, f_0, g_0\in\mathfrak{A}$ имеет место оценка

$$\begin{aligned}|[z(f*g)'*h](z)/z| \geq\ & |(zf_0'*g_0*h)(z)/z| - |[zf_0'*(g-g_0)*h](z)/z| - \\ & - |[z(f'-f_0')*g_0*h](z)/z| - |[z(f'-f_0')*(g-g_0)*h](z)/z|.\end{aligned} \tag{12}$$

Положим $f_0=g_0=e$, откуда для всех $h\in S^{*\prime}$ и $z\in E$ с учетом оценок из леммы 2 получим

$$|[z(f*g)'*h](z)/z| \geqslant 1-\sum_{k=2}^{\infty} k|a_k b_k c_k z^{k-1}| \geqslant 1-|z|\sum_{k=2}^{\infty} k^2|a_k b_k|. \tag{13}$$

Так как $\delta\leqslant\delta_0$ и функция $g\in TN_\delta(e)$, то $kT_k^{-1}\leqslant\delta^{-1}$ и $T_k|b_k|\leqslant\delta$ для всех $k\geqslant 2$. Следовательно,

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^2|a_k b_k| \leqslant \delta\sum_{k=2}^{\infty} k^2 T_k^{-2} T_k|a_k| \leqslant \delta^{-1}\sum_{k=2}^{\infty} T_k|a_k| \leqslant 1, \tag{14}$$

т.к. $f\in TN_\delta(e)$. Из оценок (13) и (14) заключаем, что $[z(f*g)'*h](z)/z\neq 0$ при всех $h\in S^{*\prime}$ и $z\in E$. Отсюда, согласно лемме 2, имеем $z(f*g)'\in S^*$. Это означает, что $f*g\in S^0$, т.е. условие $T_k^{-1}=O(k^{-1})$, $k\longrightarrow\infty$, является достаточным для T-S^0-устойчивости свертки (3) на $(\{e\},\{e\})$, причем $\delta_T(\{e\}*\{e\},S^0)=\inf\{T_k k^{-1}\colon k\geqslant 2\}$.

Случай b). Доказательство проводится почти так же, как и в предыдущем случае, только вместо (12) используется неравенство

$$|(f*g*h)(z)/z| \geqslant |(f_0*g_0*h)(z)/z| - |[f_0*(g-g_0)*h](z)/z| -$$
$$- |[(f-f_0)*g_0*h](z)/z| - |[(f-f_0)*(g-g_0)*h](z)/z|, \quad h\in S^{*\prime},\ z\in E. \tag{15}$$

Случай c). Пусть свертка (3) T-S^0-устойчива на $(S^0,\{e\})$. Тогда существует $\delta>0$ такое, что $TN_\delta(S^0)*TN_\delta(e)\subset S^0$. Рассмотрим функции $f(z) = K_0(z)+\delta T_k^{-1}z^k \in TN_\delta(S^0)$, $g(z) = z+\delta T_k^{-1}z^k\in TN_\delta(e)$, $k\geqslant 2$. В силу сделанных предположений $(f*g)(z)=z+\delta T_k^{-1}(1+\delta T_k^{-1})z^k \in S^0$, и из леммы 1 следует, что $\delta T_k^{-1} < \delta T_k^{-1}(1+\delta T_k^{-1}) \leqslant k^{-2}$, откуда $T_k^{-1} = O(k^{-2})$, $k \longrightarrow \infty$. Предположим теперь, что $\delta > \delta_0$, где δ_0 – единственный неотрицательный корень уравнения $\delta = \inf\{T_k^2 k^{-2}(T_k+\delta)^{-1}\colon k\geqslant 2\}$. Тогда в силу монотонности обеих частей этого уравнения по δ имеем $\delta>\inf\{T_k^2 k^{-2}(T_k+\delta)^{-1}\colon k\geqslant 2\}$. Поэтому найдется $k\geqslant 2$ такое, что $\delta>T_k^2 k^{-2}(T_k+\delta)^{-1}$, и для выбранных функций f, g свертка $f*g\notin S^0$.

С другой стороны, пусть $T_k^{-1} = O(k^{-2})$, $k \longrightarrow \infty$, т.е. при некотором $M>0$ будем иметь $T_k^{-1}\leqslant Mk^{-2}$ для всех $k\geqslant 2$. Заметим, что тогда и $T_k^{-1}\leqslant M$, $k\geqslant 2$. Предполагая, что $f(z)\in TN_\delta(f_0)$, $g(z)\in TN_\delta(g_0)$, где $f_0(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty} a_{0k}z^k\in S^0$, а $g_0=e$, запишем (12) в следующем виде:

$$|[z(f*g)'*h](z)/z| \geqslant 1-|[zf_0'*(g-e)*h](z)/z| - |[z(f'-f_0')*(g-e)*h](z)/z| \geqslant$$
$$\geqslant 1-|z|\sum_{k=2}^{\infty} k[|a_{0k}|+|a_k-a_{0k}|]\,|b_k c_k|. \tag{16}$$

Используя оценки $|a_{0k}|\leqslant 1$ (см. [6], с.204), $|c_k|\leqslant k$ и $|a_k-a_{0k}|\leqslant\delta T_k^{-1}$, где $k\geqslant 2$, получим

$$\sum_{k=2}^{\infty} k[|a_{0k}|+|a_k-a_{0k}|]\,|b_k c_k| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} k^2(1+\delta T_k^{-1})|b_k|. \tag{17}$$

Из оценок (16) и (17) нетрудно видеть, что при $\delta < 1/2M$ выражение $[z(f*g)'*h](z)/z$ не обращается в нуль в круге E, какова бы ни была функция $h \in S^{*\prime}$. Отсюда в силу леммы 2 $f*g\in S^0$, т.е. свертка (3) будет T-S^0-устойчивой на $(S^0,\{e\})$.

Пусть теперь $0<\delta\leqslant\delta_0$, где δ_0 определено выше. Тогда имеем $\delta\leqslant\inf\{T_k^2 k^{-2}(T_k+\delta)^{-1}\colon k\geqslant 2\}$ откуда $\delta\leqslant T_k^2 k^{-2}(T_k+\delta)^{-1}$ при всех $k\geqslant 2$. Поэтому $k^2(1+\delta T_k^{-1})\leqslant\delta^{-1}T_k$, $k\geqslant 2$, и так же, как и выше, получаем $[z(f*g)'*h](z)/z\neq 0$, если только $h\in S^{*\prime}$, $z\in E$. Следовательно, $z(f*g)'\in S^*$, а $f*g\in S^0$, что и требовалось.

Случай d) аналогичен предыдущему, только вместо (12) следует применить оценку (15).

Случай e). Доказательство здесь такое же, как и в случае c), только для примера берем вместо $K_0(z)$ функцию $K_1(z)\in S^*\subset S$, а для коэффициентов произвольной функции $f_0\in\mathfrak{M}$ используется оценка Бибербаха $|a_{0k}|\leq k$, $k\geq 2$ (см. [7]).

Случай f) рассматривается аналогично случаю c) с учетом изменений, внесенных в предыдущие случаи.

Случай g). Очевидно, что $T-\mathfrak{P}$-устойчивость свертки (3) на (S^0,S^0) влечет за собой ее $T-\mathfrak{P}$-устойчивость на $(S^0,\{e\})$, откуда $T_k^{-1}=O(k^{-1})$, $k\to\infty$. Более того, если существует $\delta>0$ такое, что $TN_\delta(S^0)*TN_\delta(S^0)\subset\mathfrak{P}$, то для функций $f(z)=g(z)=K_0(z)+\delta T_k^{-1}z^k$ при любом $k\geq 2$ имеем $(f*g)(z)=K_0(z)+(2\delta T_k^{-1}+\delta^2T_k^{-2})z^k\in\mathfrak{P}$. Тогда $(f*g)'(z)\neq 0$ в круге E, и, в частности, $(f*g)'(x)=1/(1-x)^2+k(2\delta T_k^{-1}+\delta^2T_k^{-2})x^{k-1}\geq 0$ на интервале $-1\leq x\leq 0$. Отсюда при четных $k\geq 2$ получаем верхнюю оценку для $\delta_T(S^0*S^0,\mathfrak{P})$.

Обратно, пусть $T_k^{-1}=O(k^{-1})$, $k\to\infty$. Тогда найдется $M>0$ такое, что $T_k^{-1}\leq Mk^{-1}$ при всех $k\geq 2$. Запишем (15) в предположении, что $f_0,g_0\in S^0$, а $f\in TN_\delta(f_0)$ и $g\in TN_\delta(g_0)$. Отсюда следует

$$|(f*g*h)(z)/z| \geq |(f_0*g_0*h)(z)/z| - |z|\Bigg[\sum_{k=2}^{\infty}|a_k-a_{0k}||b_{0k}c_k| +$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}|a_{0k}||b_k-b_{0k}||c_k| + \sum_{k=2}^{\infty}|a_k-a_{0k}||b_k-b_{0k}||c_k|\Bigg].$$

Известно [5], что $S^0*S^0\subset S^0$, откуда и из леммы 3 получим $|(f_0*g_0*h)(z)/z|\geq 1/4$, $h\in S^{*\prime}$, $z\in E$. С учетом оценок $|a_{0k}|,|b_{0k}|\leq 1$; $|a_k-a_{0k}|,|b_k-b_{0k}|\leq\delta T_k^{-1}$ и $|c_k|\leq k$ при $k\geq 2$ запишем

$$|(f*g*h)(z)/z| \geq 1/4 - |z|\sum_{k=2}^{\infty}k(1+\delta/2T_k)[|a_k-a_{0k}|+|b_k-b_{0k}|] \geq$$
$$\geq 1/4-\delta|z|\sup\{k(2T_k+\delta)T_k^{-2}:\ k\geq 2\},\quad h\in S^{*\prime},\ z\in E.$$

Нетрудно видеть, что в силу сделанных предположений при $k\geq 2$ имеем $k(2T_k+\delta)T_k^{-2}\leq M(2+k^{-1})$, и найдется такое $\delta>0$, что $(f*g*h)(z)/z\neq 0$ для всех $f,g\in S^0$, $h\in S^{*\prime}$, $z\in E$. Отсюда следует $T-\mathfrak{P}$-устойчивость свертки (3) на (S^0,S^0) при выполнении условия $T_k^{-1}=O(k^{-1})$, $k\to\infty$. Нижняя оценка в (7) доказывается аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Прежде всего заметим,что

$$(f\otimes g)(z) = \int_0^z[(f*g)(t)/t]dt = Q[f*g](z),$$

а, как известно, $Q[S^*]=S^0$, поэтому

$$(f\otimes g)(z)\in S^0 \Longleftrightarrow (f*g)(z)\in S^*.$$

Таким образом, случаи a), c), e) и g) теоремы 2 непосредственно следуют из случаев b), d), f) и g) теоремы 1. Далее, для свертки (4) можно записать неравенство, аналогичное (15):

$$|(f\otimes g*h)(z)/z| \geq |(f\otimes g*h)(z)/z| - |[f_0\otimes(g-g_0)*h](z)/z| -$$
$$-|[(f-f_0)\otimes g_0*h](z)/z| - |[(f-f_0)\otimes(g-g_0)*h](z)/z|. \qquad (18)$$

Случай b). Поскольку $f_0=g_0=e$, то оценка (18) принимает вид $|(f\otimes g*h)(z)/z| \geqslant 1-\sum_{k=2}^{\infty}|a_k b_k c_k k^{-1}z^{k-1}|$. Предположим, что $T_k^{-1}=O(1)$, $k\to\infty$, и возьмем $\delta\leqslant\inf\{T_k\colon k\geqslant 2\}$. Тогда для $f,g\in TN_\delta(e)$ имеем $T_k|b_k|\leqslant\rho_T(g,e)\leqslant\delta\leqslant T_k$, и $|b_k|\leqslant 1$ при $k\geqslant 2$. Отсюда $\sum_{k=2}^{\infty}|a_k b_k c_k k^{-1}|\leqslant \sum_{k=2}^{\infty}|a_k|\leqslant\delta^{-1}\sum_{k=2}^{\infty}T_k|a_k|\leqslant 1$, и в силу леммы 2 и оценки (18) заключаем, что $f\otimes g\in S^*\subset S$.

Обратно, рассматривая функции $f(z)=g(z)=z+\delta T_k^{-1}z^k$, $k\geqslant 2$, нетрудно убедиться в том, что при $\delta>\inf\{T_k\colon k\geqslant 2\}$ их свертка $f\otimes g$ неоднолистна, т.е. для ее $T-\mathfrak{P}$-устойчивости на $(\{e\},\{e\})$ необходимо выполнение условия $T_k^{-1}=O(k^{-1})$, $k\to\infty$. Одновременно доказывается неулучшаемость найденной постоянной.

Случай d). Из $T-\mathfrak{P}$-устойчивости свертки (4) на $(S^0,\{e\})$ следует ее устойчивость на $(\{e\},\{e\})$, откуда $T_k^{-1}=O(1)$, $k\to\infty$. Пример функций $f(z)=K_0(z)+\delta T_k^{-1}z^k\in TN_\delta(S^0)$ и $g(z)=z+\delta T_k^{-1}z^k\in TN_\delta(e)$ показывает, что при $\delta>\delta_0$, где δ_0 – корень уравнения $\delta=\inf\{T_k^2(T_k+\delta)^{-1}\colon k\geqslant 2\}$, включение $TN_\delta(S^0)\otimes TN_\delta(e)\subset S$ не имеет места.

С другой стороны, пусть $T_k^{-1}=O(1), k\to\infty$. Заменяя в неравенстве (15) первую $*$-свертку на $\otimes$ и подставляя $g_0=e$, получим

$$|(f\otimes g*h)(z)/z| \geqslant 1-|z|\sum_{k=2}^{\infty}[|a_{0k}|+|a_k-a_{0k}|]\,|b_k c_k k^{-1}|. \tag{19}$$

Отсюда в силу оценок $|a_{0k}|\leqslant 1$ $(f_0\in S^0)$, $|c_k|\leqslant k$ и $|a_k-a_{0k}|\leqslant\delta T_k^{-1}$, где $k\geqslant 2$, следует

$$|(f\otimes g*h)(z)/z| \geqslant 1-|z|\sum_{k=2}^{\infty}(1+\delta T_k^{-1})|b_k|,\quad h\in S^{*\prime},\ z\in E.$$

Точно так же, как и в случае c) теоремы 1, теперь можно показать, что свертка (4) $T-\mathfrak{P}$-устойчива на $(S^0,\{e\})$, причем значение δ_0, определенное выше, совпадает с постоянной устойчивости.

Случай f) рассматривается аналогично предыдущему, только в неравенство (19) подставляем оценку Бибербаха $|a_{0k}|\leqslant k$, $k\geqslant 2$ (см. [7]) и в качестве примера рассмотрим функции $f(z)=K_1(z)+\delta T_k^{-1}z^k\in TN_\delta(\mathfrak{M})$, $g(z)=z+\delta T_k^{-1}z^k\in TN_\delta(e)$.

Случай h). Поскольку для $f_0,g_0\in S^0$ имеем $f_0*g_0\in S^0$ [5], то в силу тождества $f\otimes g*h=f*g\otimes h$ и (11) справедливо неравенство

$$|(f\otimes g*h)(z)/z| \geqslant 1/2-|[(f-f_0)\otimes g_0*h](z)/z|-|[f_0\otimes(g-g_0)*h](z)/z|-$$
$$-|[(f-f_0)\otimes(g-g_0)*h](z)/z|,\quad h\in S^{*\prime},\ z\in E. \tag{20}$$

С учетом оценок $|a_{0k}|,|b_{0k}|\leqslant 1$ $(f_0,g_0\in S^0)$; $|a_k-a_{0k}|,|b_k-b_{0k}|\leqslant\delta T_k^{-1}$ и $|c_k|\leqslant k$ при $k\geqslant 2$ получим

$$|[(f-f_0)\otimes g_0*h](z)/z| \leqslant |z|\sum_{k=2}^{\infty}|a_k-a_{0k}|\,|b_{0k}c_k k^{-1}| \leqslant |z|\sum_{k=2}^{\infty}|a_k-a_{0k}|, \tag{21}$$

$$|[f_0\otimes(g-g_0)*h](z)/z| \leqslant |z|\sum_{k=2}^{\infty}|b_k-b_{0k}|, \tag{22}$$

$$|[(f-f_0)\otimes(g-g_0)*h](z)/z| \leqslant |z|\sum_{k=2}^{\infty}|a_k-a_{0k}|\,|b_k-b_{0k}| \leqslant$$
$$\leqslant(\delta|z|/2)\sum_{k=2}^{\infty}T_k^{-1}[|a_k-a_{0k}|+|b_k-b_{0k}|]. \tag{23}$$

Из неравенств (20)-(23) следует, что

$$|(f\otimes g*h)(z)/z| \geqslant 1/2 - |z|\sum_{k=2}^{\infty}[1+\delta/(2T_k)]\,[|a_k-a_{0k}|+|b_k-b_{0k}|] \geqslant$$
$$\geqslant 1/2 - \delta|z|\sup\{(2T_k+\delta)T_k^{-2}:\ k\geqslant 2\}.$$

Исходя из этой оценки, доказываем достаточность условия $T_k^{-1} = O(1)$, $k\to\infty$, для $T-\mathfrak{P}$-устойчивости свертки (4) на (S^0,S^0). Необходимость этого условия следует так же, как и в случае d). Чтобы оценить постоянную устойчивости сверху, рассмотрим функции $f(z)=g(z)=$ $=K_0(z)+\delta T_k^{-1}z^k\in TN_\delta(S^0)$. Тогда при любом четном $k\geqslant 2$ имеем $(f\otimes g)'(-1)=1/2-\delta T_k^{-2}(2T_k+\delta)$. Это выражение должно быть неотрицательным, в противном случае производная $(f\otimes g)'$ обращается в нуль в некоторой точке $x_0\in(-1,0)$, и поэтому $f\otimes g$ неоднолистна в круге E. Отсюда получаем искомую оценку.

Случай i). Пусть $f_0\in S^*$, а $g_0\in S^0$. Тогда $f_0\otimes g_0\in S^0$ [5], и в неравенстве (20) постоянную 1/2 следует заменить на 1/4. Поскольку теперь для коэффициентов f_0 справедлива лишь оценка $|a_{0k}|\leqslant k$, $k\geqslant 2$, то неравенства (22) и (23) запишутся в следующем виде:

$$|[f_0\otimes(g-g_0)*h](z)/z| \leqslant |z|\sum_{k=2}^{\infty}k|b_k-b_{0k}|,$$

$$|[(f-f_0)\otimes(g-g_0)*h](z)/z| \leqslant \delta|z|\sum_{k=2}^{\infty}[(k+1)T_k]^{-1}[|a_k-a_{0k}|+k|b_k-b_{0k}|].$$

Отсюда и из оценки (21) получим

$$|(f\otimes g*h)(z)/z| \geqslant 1/4 - |z|\sum_{k=2}^{\infty}\{1+\delta[(k+1)T_k]^{-1}\}[|a_k-a_{0k}|+k|b_k-b_{0k}|] \geqslant$$
$$\geqslant 1/4 - \delta|z|\sup\{[(k+1)T_k+\delta]T_k^{-2}:\ k\geqslant 2\},\quad h\in S^{*\prime},\ z\in E.$$

Из этого неравенства можно доказать достаточность условия $T-\mathfrak{P}$-устойчивости и получить нижнюю оценку для постоянной $\delta_T(S^*\otimes S^0,\mathfrak{P})$. Верхняя оценка и необходимость условия обосновываются, как и в предыдущем случае.

Интегральное представление (8) с помощью сверток (3) и (4) можно представить как $Q[f]=f*K_{-1}=f\otimes K_0$. Теперь, используя вместо оценок (12) и (15) неравенства

$$|\{(Q[f])'*h\}(z)| = |(f*h)(z)/z| \geqslant |(f_0*h)(z)/z| - |[(f-f_0)*h](z)/z|,$$
$$|\{Q[f]*h\}(z)/z| = |(f\otimes h)(z)/z| \geqslant |(f_0\otimes h)(z)/z| - |[(f-f_0)\otimes h](z)/z|,$$

где $h\in S^{*\prime}$, $z\in E$, доказываем теорему 3 по аналогии с теоремами 1 и 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Полагая $T_k=k$, $k\geqslant 2$, из теорем 1-3 во всех рассмотренных случаях получаем точные значения постоянных устойчивости, найденные ранее в [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А. *Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций* // УМН. - 1975. - Т.30. - № 4. - С.3-60.

2. Goodman A.W. *Univalent functions and non-analytic curves* // Proc. Amer. Math. Soc. - 1957. - V.8. - P.598-601.

3. Ruscheweyh St. *Neighborhoods of univalent functions* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – V.81. – P.521–527.

4. Sheil-Small T., Silvia E.M. *Neighborhoods of analytic functions* // J. d'Analyse Math. – 1989. – V.52. – P.210–240.

5. Ruscheweyh St., Sheil-Small T. *Hadamard products of schlicht functions and the Polya-Schoenberg conjecture* // Comment. Math. Helv. – 1973. – V.48. – P.119–135.

6. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

7. Branges, de L. *A proof of the Bieberbach conjecture* // Acta Math. – 1985. – V.154. – P.137–152.

8. Ruscheweyh St. *Über die Faltung schlichter Funktionen* // Math. Z. – 1972. – Bd. 128. – S.85–92.

9. Merkes E.P., Wright D.J. *On the univalence of certain integrals* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – V.27. – P.97–100.

10. Нежметдинов И.Р. *Устойчивость геометрических свойств сверток однолистных функций* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 11. – С. 27–34.

Казанский государственный университет

Поступила
07.02.1994