НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ГИДРОАЭРОМЕХАНИКИ

Г. Г. ТУМАШЕВ

Одним из наиболее интересных приложений обратных краевых задач в механике жидкости является задача построения изолированного профиля или систем профилей (гидродинамических решеток) по заданному на их поверхности распределению скорости или давления в потенциальном потоке сжимаемой или несжимаемой жидкости. Решению этой задачи посвящено значительное количество работ. Изложение некоторых из полученных результатов можно найти в работе (1).

Задача построения профилей и решеток может быть поставлена как для случая обтекания установившимся, так и неустановившимся потоком. Значения скорости или давления могут задаваться в функции дуговой абсциссы s или одной из декартовых координат точек искомых контуров.

Остановимся сначала на случае обтекания установившимся потенциальным потоком. Для первого из указанных выше способов задания скорости (т. е. задания через дуговую абсциссу) задачи построения профилей и гидродинамических решеток, а также модификации профилей (нахождение форм профилей с распределением скорости, близким к распределению некоторого известного профиля) можно считать полностью решенными. Существующие методы позволяют определять формы профилей с нужной для практики точностью. Однако существенный вопрос о том, каково должно быть распределение скорости для того, чтобы профиль обладал требуемыми аэродинамическими характеристиками — остается открытым. Этот вопрос может быть решен только с учетом влияния вязкости на распределение скоростей по обтекаемой поверхности, отклонения теоретического распределения (полученного для жидкости, не обладающей вязкостью) от экспериментального.

В связи с задачей модификации профилей существенное значение приобретают вопросы устойчивости и однолистности решения обратных краевых задач. В большинстве случаев эти задачи имеют смысл только в тех случаях, когда область в физической плоскости является однолистной.

При втором способе задания скорости на профиле мы имеем т. н. задачу построения профиля по хордовой диаграмме скорости или давления. Предложен ряд методов решения этой задачи. Здесь ограничимся рассмотрением метода, предложенного Н. И. Глебовым (2).

Как известно, задачу о нахождении функции, отображающей внешность профиля на внешность круга, можно считать полностью решенной, если известно соответствие между точками профиля и окружности, переходящими друг в друга.

Н. И. Глебовым установление такого соответствия сведено к нахождению функции $x = x(\theta)$ из следующего уравнения:

$$\frac{dx}{d\theta} = -2u_0 \frac{\sin(\theta - \alpha) - \sin(\theta_2 - \alpha)}{v(x)} \cos\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln v(x) \operatorname{ctg}\frac{\theta - \theta'}{2} d\theta'\right\} \cdot \quad (1)$$

Здесь величина перед косинусом равна модулю производной, отображающей функции на окружности единичного радиуса, а величина в фигурных скобках — угол наклона скорости к оси x, α — угол атаки,
$v(x)$ — скорость на профиле, определяемая по хордовой диаграмме, $e^{\theta_2 i}$ — точка, соответствующая точке разветвления потока $(x = x_2)$.

Обозначив через $x^{(k-1)}(\theta)$ $k-1$ приближение к зависимости $x = x(\theta)$, следующее приближение $x^{(k)}(\theta)$ находится из уравнения

$$\frac{dx^{(k)}(\theta)}{d\theta} = -2\dot{u}_0^{(k)} \frac{\sin(\theta - \alpha^{(k)}) - \sin(\theta_2^{(k)} - \alpha^{(k)})}{v_{(\theta)}^{(k-1)}},$$

$$\cos\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln v(\theta)^{(k-1)} \operatorname{ctg}\frac{\theta' - \theta}{2} d\theta' + c_0^{(k-1)}\right\},$$

где $\theta_2^{(k)}$ — корень уравнения $x_{(\theta)}^{(k-1)} - x_2 = 0$.

Величины $c_0^{(k-1)}$, $u_0^{(k)}$, $\alpha^{(k)}$, θ^* определяются из соотношений

$$c_0^{(k-1)} = \pm\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln v_{(\theta')}^{(k-1)} \operatorname{ctg}\frac{\theta' - \theta^*}{2} d\theta',$$

$$\frac{dx^{(k)}(\theta^*)}{d\theta} = 0,$$

$$x^{(k)}(\theta^*) = -\frac{l}{2}, \quad x^{(k)}(\theta_1) = \frac{l}{2},$$

$$\text{где } \theta_1^{(k)} = \pi - \theta_2^{(k)} + 2\alpha^{(k)}.$$

Числовые расчеты, выполненные для конкретных профилей, показывают быструю сходимость применяемого метода последовательных приближений. Однако доказательств единственности решения задачи и сходимости процесса последовательных приближений мы не имеем.

Рассмотренная задача путем выбора в качестве независимых переменных абсциссы x и функции тока ψ может быть сведена к первой краевой задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\psi\partial x} + 2\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\psi^2} = 0. \quad (2)$$

Функция Φ со скоростью v и ее проекцией на ось y связана соотношениями

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{v^2}{2}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\psi} = v_y.$$

Области течения в физической плоскости соответствует вся плоскость переменных x, ψ с разрезом по оси x.

Легко видеть, что уравнения верхней и нижней поверхностей профилей запишутся

$$y^+ = \int_{-\frac{l}{2}}^{x} \frac{\frac{\partial \Phi^+}{\partial \psi}\, dx}{\sqrt{2\frac{\partial \Phi^+}{\partial x} - \left(\frac{\partial \Phi^+}{\partial \psi}\right)^2}}, \tag{3}$$

$$y^- = \int_{-\frac{l}{2}}^{x} \frac{\frac{\partial \Phi^-}{\partial \psi}\, dx}{\sqrt{2\frac{\partial \Phi^-}{\partial x} - \left(\frac{\partial \Phi^-}{\partial \psi}\right)^2}}.$$

Профиль будет замкнут, если значения y^+ и y^- при $x = \frac{l}{2}$ совпадут.

Задача о построении профиля крыла по распределению скорости или давления в общем случае неустановившегося движения является весьма сложной. Решения получены для двух частных случаев. В первом из них на искомом профиле предполагаются известными нормальная и касательная составляющие скорости (Л. Л. Лебедев). Второй случай соответствует движению профиля вдоль первой оси, при котором циркуляция вокруг профиля остается постоянной.

Обычный метод может быть применен, если профиль считать неподвижным, а циркуляцию постоянной, скорость заданной через дуговую абсциссу.

Решение обратных краевых задач гидроаэромеханики с учетом сжимаемости жидкости в установившемся потенциальном потоке легко получается, если воспользоваться приближенными уравнениями движения газа при дозвуковых скоростях (уравнения С. А. Чаплыгина, Кармана — Тзяна и др.).

Эти уравнения приводятся к уравнению Лапласа относительно функции, зависящей только от модуля скорости, если в качестве независимых переменных принять потенциал φ и функцию тока ψ. Сопряженной функцией является угол наклона вектора скорости β. Т. к. область в плоскости переменных φ, ψ для задач обтекания установившимся потоком известна, обратную задачу можно свести к решению задачи Дирихле и осуществлению перехода от некоторой канонической области к области в физической плоскости.

В этих задачах представляет интерес оценка точности методов, основанных на использовании различных приближенных уравнений и разработка численных методов решения.

Важным примером применения методов решения обратных краевых задач может служить задача нахождения форм стенок каналов и сопел по заданному вдоль них распределению скорости. Получены решения для случая течений жидкости необладающей вязкостью с учетом или без учета сжимаемости. Скорость на стенках предполагается заданной в функции дуговой абсциссы.

Одной из первых работ, посвященных решению задачи построения канала, является работа Лайтхилла [3]. В ней рассматривается задача для случая несжимаемой жидкости. Принимая значения функции тока на одной из стенок равным $+h$, а на другой $-h$, область в плоскости комплексного потенциала w в виде бесконечной полосы отображается на внутренность круга единичного радиуса в плоскости вспомогательного переменного $\zeta = re^{\theta i}$. При этом точки $\pm\infty$ переходят в точки $\zeta \pm 1$. Т. к. потенциал скорости является функцией сопряженной с функцией тока ψ, выражение φ записывается в виде

$$\varphi = \frac{2h}{\pi} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

Формулы для координат x, y стенок будут

$$x = \int \frac{\cos\beta}{v} \frac{2h}{\pi} \operatorname{cosec} \theta \, d\theta,$$

$$y = \int \frac{\sin\beta}{v} \frac{2h}{\pi} \operatorname{cosec} \theta \, d\theta,$$

где β — находится по формуле

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln v(\theta') \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta'}{2} d\theta'.$$

Та же задача с учетом сжимаемости решалась в работах [4], [5], [6] и др. Зависимость между давлением и удельным объемом принималась линейной. Вудсом решена также задача построения канала при периодических граничных условиях. Им использованы приближенные уравнения дозвукового течения газа, представленные в виде:

$$\frac{\partial\beta}{\partial(m_\infty \psi)} - \frac{\partial r}{\partial\varphi} = 0; \quad \frac{\partial\beta}{\partial\varphi} + \frac{\partial r}{\partial(m_\infty \psi)} = 0, \tag{4}$$

где

$$r = \int\limits_{v=v_0}^{v} (1 - M^2)^{\frac{1}{2}} d\left(\frac{v_\infty}{v}\right),$$

$$m_\infty = (1 - M_\infty^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\rho_0}{\rho_\infty} = (1 - M_\infty^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\varkappa - 1}{2} M_\infty^2\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}}.$$

Для осуществления перехода от области переменных φ, ψ к области в плоскости $z = x + iy$ служит формула

$$dz = \frac{e^{i\beta}}{v}\left(d\varphi + i\frac{\rho_0}{\rho} d\psi\right).$$

Стейниц при решении задачи для потенциального течения несжимаемой жидкости пользовался функцией Грина:

$$G = -\frac{1}{2} \ln [\operatorname{ch}^2(\varphi - \varphi_0) - \cos^2(\psi - \psi_0)]$$
$$[\operatorname{ch}^2(\varphi - \varphi_0) - \cos^2(\psi + \psi_0)].$$

Для угла наклона касательной к стенкам канала находится выражение

$$\beta = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\left(G \frac{\partial \ln v}{\partial\varphi}\right)_{\psi = \frac{\pi}{2}} - \left(G \frac{\partial \ln v}{\partial\varphi}\right)_{\psi=0}\right] d\varphi.$$

Недостаток существующих методов для решения задач построения каналов в случае сжимаемой жидкости состоит в том, что они применимы только при малых числах Маха. Для течений с большими числами Маха задача представляет большие трудности. Приближенные методы разработаны только для течений со сверхзвуковыми скоростями в соплах (7), (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Тумашев и М. Т. Нужин. Обратные краевые задачи. Ученые записки Казанского Госуд. университета, т. 115, кн. 6, 1955.

2. Н. И. Глебов. Построение крылового профиля по хордовой диаграмме распределения скорости или давления. Сборник студ. работ, Издание КГУ, 1961.

3. M. I. Lighthill. A new method of two-dimensional Aerodynamic gesign. Reports and memoranda, № 2112, 1945.

4. Г. Г. Тумашев. Построение каналов и сопел по заданному распределению дозвуковых скоростей вдоль стенок. Известия КФАН СССР, серия физико-матем. и технических наук, № 1, 1948.

5. L. C. Woods. The theory of subsonic plane flow. Oxford university press, 1961. (см. также Механика. сб. переводов и обзоров, № 1 (35), № 2 (36), 1956).

6. Iohn D. Stanitz. Design of twodimensional channels with prescribed velocity distribution along the channel walls. NACA, Rep. 1115, 1953.

7. Г. Г. Тумашев. Построение сопла по распределению сверхзвуковых скоростей вдоль стенок. Известия КФАН СССР, серия физико-математических и технических наук, № 2, 1950.

8. Г. А. Домбровский. О построении плоского сопла по распределению сверхзвуковых скоростей вдоль стенок. Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, № 3, 1957.