I. A. Kiiko, B. Yu. Kudryavtsev, Nonlinear aeroelastic vibrations of a rectangular plate, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2005, Number 1, 68–71

Следовательно, при $d > 0$, полагая $f(x) = e^{-2\pi\frac{nr}{d}}$, получим

$$\sum_{-b<n\leqslant b} G(n)e^{-2\pi\frac{nr}{d}} = A + R_{N,d},$$

где

$$A = \sum_{m=-Nd-[d/2]}^{Nd+[d/2]} \left(\frac{d}{m}\right)\int_{-b}^{b} e^{2\pi i\frac{(-r+im)x}{d}}, \quad R_{N,d} \leqslant \frac{8M(b-a)\ln N}{N}, \quad M = \max_{x\in[-b,b]}\left|\frac{d(G(x)e^{-2\pi\frac{nr}{d}})}{dx}\right|.$$

Преобразуя выражение для A, найдем

$$\sum_{n<b}\left(\frac{d}{n}\right)e^{\left(-2\pi\frac{nr}{d}\right)} = \frac{r\sqrt{d}}{\pi}\sum_{m\leqslant\left(N+\frac{1}{2}\right)d}\left(\frac{d}{m}\right)\frac{\cos\frac{2\pi mb}{d}}{r^2+m^2} + R_{N,d}.$$

4. Пусть функция $f(x) = 1$ на промежутке $a < x \leqslant b$. Тогда из теоремы следует, что

$$\sum_{a<n\leqslant b} G(n) = \sum_{m=-Nk+1}^{Nk+k} \chi(m)\int_{a}^{b} e^{2\pi i\frac{mx}{k}}\,dx + R_{N,k},$$

где

$$R_{N,k} \leqslant \frac{8M(b-a)\ln N}{N}, \quad M = \max_{x\in[a,b]}\left|\frac{dG(x)}{dx}\right|.$$

Отсюда имеем

$$\sum_{a<n\leqslant b} G(n) = \chi(0)(b-a) + \frac{k}{2\pi i}\sum_{m=-Nk+1}^{Nk+k}{}' \frac{\chi(m)}{m}\left(e^{2\pi i\frac{mb}{k}} - e^{2\pi i\frac{ma}{k}}\right)dx + R_{N,k},$$

где величина $R_{N,k}$ определена выше и штрих в знаке суммирования означает, что выпущено слагаемое, отвечающее значению $m = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 04-01-00566.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mordell L.J.* Some applications of Fourier series in the analytic theory of numbers // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1928. **24**. 585–595.
2. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу: Учеб. для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Дрофа, 2003.

Поступила в редакцию
16.04.2004

УДК 539.3:534.1

НЕЛИНЕЙНЫЕ АЭРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

И. А. Кийко, Б. Ю. Кудрявцев

Аэроупругие колебания и устойчивость пластин в подавляющем большинстве случаев изучены в линейной постановке [1–5] с использованием формулы поршневой теории для избыточного аэродинамического давления. Достаточность такого подхода обоснована при сверхзвуковом ($M \geqslant 3$) обтекании пластины потоком, вектор скорости которого параллелен плоскости пластины. Однако в случае, когда пластина находится на грани клина, обтекаемого с большой сверхзвуковой скоростью ($M \geqslant 7$), недостаточность поршневой теории обоснована в [6]. С другой стороны, высокие квазистатические давления за ударной волной могут вызвать заметные прогибы пластины и растягивающие напряжения в ее срединной плоскости, что ставит под сомнение использование линейной теории изгиба пластин. В предлагаемой статье рассматриваются аэроупругие колебания пластины в рамках системы Кармана с использованием результатов работ [6, 7]; установлено заметное различие с расчетами по линейной теории, обнаружены новые механические эффекты.

Пусть имеется тонкий клиновидный профиль, обтекаемый без угла атаки газом с большой сверхзвуковой скоростью. Вектор скорости потока направлен по оси тела (перпендикулярно кромке). Начало ортогональной системы координат совместим с кромкой профиля, ось ox направим по вектору скорости, ось oy — по кромке, ось oz — так, чтобы система координат была правой. В недеформированном состоянии уравнение образующей имеет вид $z = \gamma x + \varphi(x)$, $|\varphi(x)/\gamma x| \ll 1$. Будем рассматривать часть поверхности профиля, занимающую в плоскости oxy область $G = \{(x,y),\ x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2\}$ и свободно опертую по кромкам. Для описания колебаний оболочки будем использовать уравнения Кармана

$$\begin{aligned} &\frac{D}{h}\,\Delta^2 w = L(w,\Phi) + \frac{q}{h} + k_y\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + k_x\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \rho\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\\ &\frac{1}{E}\,\Delta^2\Phi = 0{,}5L(w,w) - k_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &w|_{x=x_0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=x_0} = w|_{x=x_0+l_1} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=x_0+l_1} = 0,\\ &w|_{y=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{y=0} = w|_{y=l_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{y=l_2} = 0, \end{aligned}$$

где

$$L(u_1,u_2) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial y};$$

$$\begin{aligned} q = \Delta p = &\frac{2kp}{k+1}\left(M^2\operatorname{tg}^2\beta - 1\right) - A_1 M\left(\frac{\partial w}{\partial t} + v\,\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{A_2}{c_0^2}\,x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v\,\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x} + v^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) +\\ &+ A_1 c_0 M^2\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + A_2 M^2 x\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}; \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{4kp\operatorname{tg}\beta}{(k+1)c_0}\,(1 + 2\varepsilon - \varepsilon a), \quad A_2 = kp\operatorname{tg}\beta\left(1 - \frac{12\varepsilon a}{k(k+1)}\right); \quad \varepsilon = \frac{k-1}{k+1}, \quad a = 1 + \frac{2}{(k-1)M^2\operatorname{tg}^2\beta};$$

Φ — функция напряжений; w — прогибы оболочки; D и h — ее цилиндрическая жесткость и толщина; k_x, k_y — кривизны; E, ρ, ν — модуль Юнга, плотность и коэффициент Пуассона материала; p и c_0 — давление и скорость звука в невозмущенном потоке; k — показатель политропы; v — скорость потока газа; $M = v/c_0$ — число Маха; $\alpha = \operatorname{arctg}\gamma$ — угол полураствора клина; наклон ударной волны β определяется из уравнения $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha + a\varepsilon\operatorname{tg}\beta$.

Выделим в (1) основное состояние $w_0(x,y)$, $\Phi_0(x,y)$ из системы

$$\begin{aligned} D\Delta^2 w_0 = &\,hk_x\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y^2} + hk_y\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2} + L(w_0,\Phi_0) + \frac{2kp}{k+1}\left(M^2\operatorname{tg}^2\beta - 1\right) + A_1 c_0 M^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) +\\ &+ A_2 M^2 x\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right),\\ \Delta^2\Phi_0 + &\,Ek_x\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + Ek_y\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 0{,}5L(w,w) = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Положим $w = w_0 + w_1$, $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, где w_1, Φ_1 — малые возмущения основного состояния, и подставим эти выражения в (2). Отбросив слагаемые, оказывающие второстепенное влияние на результат [6] (в частности, содержащие Φ_1), получим

$$D\Delta^2 w_1 = L(w_1, \Phi_0) - A_1 M \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} + v\,\frac{\partial w_1}{\partial x}\right) - A_2 M^2 x\,\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \rho h\,\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Будем искать прогибы w_0 в виде $w_0(x,y) = c\sin\frac{\pi}{l_1}(x-x_0)\sin\frac{\pi y}{l_2}$, $c \in C$; для Φ_0 при этом получим

$$\Phi_0 = \frac{c^2 E}{32}\left(\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2\cos\frac{2\pi(x-x_0)}{l_1} + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2\cos\frac{2\pi y}{l_2} + \frac{c l_1^4 l_2^4}{\pi^2(l_1^2+l_2^2)^2}\left(\frac{k_x}{l_2^2}+\frac{k_y}{l_1^2}\right)\sin\frac{\pi}{l_1}(x-x_0)\sin\frac{\pi y}{l_2}\right) + $$
$$+ 0{,}5\left(p_x y^2 + p_y x^2\right),$$

где p_x, p_y — срединные усилия на кромках.

Рассмотрим сначала прямоугольную пластину, составляющую часть поверхности тонкого клина ($k_x = 0$, $k_y = 0$, $\varphi = 0$). Тогда при условии несближения кромок

$$p_x = Ec^2\,\frac{\pi^2}{8l_2^2}\,\frac{\nu + \frac{l_2^2}{l_1^2}}{1-\nu^2}, \quad p_y = Ec^2\,\frac{\pi^2}{8l_1^2}\,\frac{\nu\frac{l_2^2}{l_1^2}+1}{1-\nu^2}.$$

Подставим выражения для Φ_0 и w_0 в (2) и применим метод Бубнова–Галеркина. Получим уравнение с одним неизвестным c:

$$4Dc\pi^4\left(\frac{1}{l_1^4}+\frac{2}{l_1^2 l_2^2}+\frac{1}{l_2^4}\right) + \frac{hE\pi^4 c^3(l_1^4+l_2^4)}{6l_1^4 l_2^4} + 4h\pi^2 c\left(\frac{p_x}{l_1^2}+\frac{p_y}{l_2^2}\right) -$$
$$-\frac{2\pi^2 kp}{k+1}\left(M^2\operatorname{tg}^2\beta - 1\right) - 2ckp\operatorname{tg}\beta M^2\left(1-\frac{12\varepsilon a}{k(k+1)}\right)(l_1+2x_0)\,\frac{\pi^2}{l_1^2} = 0.$$

Динамический прогиб w_1 представим в виде $w_1 = \exp(\omega t)\psi(x,y)$. Подставив это выражение в (3), получим задачу на отыскание собственных функций и собственных значений λ дифференциального оператора

$$D\Delta^2\psi - L(\psi,\Phi_0) + c_0 A_1 M^2\frac{\partial\psi}{\partial x} + A_2 M^2 x\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \lambda\psi, \quad \lambda = -\rho h\omega^2 - A_1 M\omega.$$

В комплексной плоскости область устойчивых колебаний будет лежать внутри так называемой параболы устойчивости [1]

$$(A_1 M^2)\operatorname{Re}\lambda = h\rho(\operatorname{Im}\lambda)^2. \tag{4}$$

Задача, следовательно, состоит в том, чтобы найти минимум скорости потока, при котором одно из собственных значений впервые попадает на параболу устойчивости, — это и будет критическая скорость флаттера. Возьмем функцию ψ в виде

$$\psi(x,y) = \left(c_1\sin\frac{\pi}{l_1}(x-x_0) + c_2\sin\frac{2\pi}{l_1}(x-x_0)\right)\sin\frac{\pi y}{l_2}, \quad c_1, c_2 \in C.$$

Проведя процедуру Бубнова–Галеркина, будем иметь систему уравнений с неизвестными c_1, c_2. Приравнивая ее определитель к нулю, получаем значения λ, а с учетом (4) находим критическую скорость потока.

Таблица 1

α, град	$l_1 = 0{,}25$; $l_2 = 0{,}3$	$l_1 = 0{,}25$; $l_2 = 0{,}25$	$l_1 = 0{,}3$; $l_2 = 0{,}25$	$l_1 = 0{,}35$; $l_2 = 0{,}25$
10	16,9	14,4	12,7	11,16
15	15,1	11,7	9,7	8,5
20	15,1	10,7	7,9	6,9

В качестве примера рассмотрена стальная пластина при следующих значениях параметров: $h = 0{,}002$ м, $E = 2\cdot10^{11}$ Па, $\rho = 8\cdot10^6$ г/м^3, $p = 10^5$ Па, $k = 1{,}4$; $\nu = 0{,}3$; $c_0 = 330$ м/с; $x_0 = 1$ м.

В табл. 1 представлены значения критической скорости M для различных соотношений длин сторон пластины (до 1:1,5) и углов α.

Для сравнения в табл. 2 приведены критические значения M, полученные при решении задачи в линейной постановке [7].

Как видно из таблиц, в первом случае значения критической скорости большие. Это можно объяснить наличием усилий в срединной поверхности, возникающих при статических прогибах и способствующих стабилизации. С одной стороны, рост угла α должен снижать динамическую устойчивость, с другой стороны, увеличиваются статические прогибы и цепные усилия. Отсюда немонотонная (как при линейной постановке задачи) зависимость критической скорости M от α. Если $l_1/l_2 < 1$, то наблюдается минимум критической скорости при некотором значении α_0 между 15 и 20°. С увеличением отношения длины пластины к ширине значение α_0 растет и выходит за рамки применимости теории. Если при постоянных α и l_1 увеличивать ширину пластины l_2 ($l_2 \geqslant l_1$), то в первом случае критическая скорость возрастает (в отличие от второго), что объясняется теми же причинами. Таким образом, обнаружен неожиданный механический эффект, когда при некоторых условиях увеличение размеров пластины и угла α повышает динамическую устойчивость.

Таблица 2

α, град	$l_1 = 0{,}25$; $l_2 = 0{,}3$	$l_1 = 0{,}25$; $l_2 = 0{,}25$	$l_1 = 0{,}35$; $l_2 = 0{,}25$
10	8,2	8,8	7,2
15	6,5	6,8	5,3
20	5,3	5,4	4,3

Можно взять предельный случай — неограниченную полосу ($l_1 = 0{,}25$ м; $h = 0{,}001$ м; $x_0 = 2$ м) в предположении, что изгиб цилиндрический. Проведем ту же самую процедуру нахождения критической скорости, взяв уравнение для прогибов w в виде

$$D\frac{d^4w}{dx^4} - h\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\pi^2}{4l_1^2}c^2\frac{d^2w}{dx^2} - q = 0.$$

Полученные результаты содержатся в табл. 3. Явно виден минимум критической скорости при $\alpha_0 = 10°$.

Таблица 3

α, град	8	10	12
M	18,1	17,8	18,4

Рассмотрим теперь прямоугольную в плане цилиндрическую панель, положив $k_x = 1/R$, $k_y = 0$ (выпуклость направлена навстречу потоку). Тогда

$$p_x = E\left(\frac{\pi^2c^2}{8l_2^2(1-\nu^2)}\left(\frac{l_2^2}{l_1^2}+\nu\right) - \frac{4k_xc}{\pi^2(1-\nu^2)} + \frac{4k_xl_1^4c}{\pi^2(l_1^2+l_2^2)^2}\right),$$

$$p_y = E\left(\frac{\pi^2c^2}{8l_1^2(1-\nu^2)}\left(\frac{l_1^2}{l_2^2}+\nu\right) - \frac{4k_xc}{\pi^2(1-\nu^2)} + \frac{4k_xcl_1^4l_2^4}{\pi^2(l_1^2+l_2^2)^2}\right).$$

В табл. 4 приведены значения максимального статического прогиба c при $\alpha = 10°$; $l_1 = l_2 = 0{,}25$ м; $R = 0{,}75$ м.

Таблица 4

M	1	2	3	4	5	6	7	8
C	1,9	3,2	4,2	4,8	5,2	5,4	5,3	5,1

При увеличении M начиная с некоторого момента значения c уменьшаются, что означает схлопывание панели. Таким образом, статическая неустойчивость возникает раньше динамической.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мовчан А.А.* О колебаниях пластинки, движущейся в газе // Прикл. матем. и механ. 1956. **20**, вып. 2. 231–243.
2. *Новичков Ю.Н.* Флаттер пластин и оболочек // Механика деформируемого твердого тела: Итоги науки и техники. Т. 11. М.: ВИНИТИ, 1978. 67–122.
3. *Ильюшин А.А., Кийко И.А.* Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки // Прикл. матем. и механ. 1994. **58**, вып. 3. 167–171.
4. *Ильюшин А.А., Кийко И.А.* Закон плоских сечений в сверхзвуковой аэродинамике и проблема панельного флаттера // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 1995. № 6. 138–142.
5. *Алгазин С.Д., Кийко И.А.* Исследование собственных значений оператора в задачах панельного флаттера // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 1999. № 1. 170–176.
6. *Кийко И.А.* Постановка задачи о флаттере оболочки вращения и пологой оболочки, обтекаемых потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью // Прикл. матем. и механ. 1999. **63**, вып. 2. 305–312.
7. *Кудрявцев Б.Ю.* Флаттер прямоугольной пластины, составляющей часть плоскости тонкого клина, обтекаемого потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью. Деп. в ВИНИТИ, № 1085-В2002. М., 2002.

Поступила в редакцию
09.06.2003